

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

**ПРОГНОЗУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В УМОВАХ
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ І ТЕОРІЯ ІГОР**
Курсова робота
за спеціальністю «113 Прикладна математика»

Керівник курсової роботи
доц. Щестюк Н.Ю.

(підпис)
“19” квітня 2020 р.

Виконала студент
Грищенко С.С.
“19” квітня 2020 р.

Київ 2020

Тема: Прогнозування випадкових процесів в умовах невизначеності і теорія ігор

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	02.11.2019	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи.	15.11.2019	
3.	Опрацювання матеріалів	17.11.2019	
4.	Проведення аналізу	20.01.2020	
5.	Написання роботи	06.03.2020	
6.	Перевірка та погодження роботи	06.04.2020	
7.	Створення презентації та написання доповіді	10.04.2020	
8.	Остаточне оформлення роботи	15.04.2020	
9.	Захист курсової роботи	19.04.2020	

Студент Грищенко С.С.

Керівник Щестюк Н.Ю.

“19” квітня 2020 р.

	ЗМІСТ	Стор.
Анотація		4
ВСТУП		5
РОЗДІЛ 1: Основні положення теорії стаціонарних процесів і теорії ігор		6
1.1. Основні поняття теорії стаціонарних процесів		6
1.2. Основні терміни і поняття теорії ігор		9
РОЗДІЛ 2: Теорія Гренандера		12
2.1. Постановка задачі		12
2.2. Виведення $\max \min$		13
2.3. Виведення $\min \max$		16
РОЗДІЛ 3: Приклади застосування теорії Гренандера		20
3.1. Перше застосування		20
3.2. Друге застосування		23
Висновки по роботі		25
Джерела		26

Анотація

В роботі знаходиться розв’язок гри, в якій стратегіями першого гравця є спектральні функції стаціонарного процесу без шумів x_t , про який відома лише його дисперсія. Другий гравець спостерігає значення x_t при $t \leq 0$ та намагається спрогнозувати значення

$$\int_0^1 a(t)x_t dt = Ax.$$

Спрогнозоване значення позначається px . Функцією виграшу гри є $(Ax - px)^2$.

Перший гравець намагається максимізувати математичне сподівання функції гри, а другий гравець намагається мінімізувати те саме значення. Ця гра має положення рівноваги, а гравці – чисті оптимальні стратегії, які їм вдається знайти.

Метою наукового дослідження є застосування теорії ігор до задач оцінювання випадкових процесів.

Основні завдання дослідження:

- опанувати термінологію й основні положення як теорії стаціонарних процесів, так і теорії ігор
- вивчити теорію Гренандера розв’язку гри, в якій стратегіями першого гравця є спектральні функції стаціонарного процесу x_t , про який відома лише його дисперсія.
- розглянути приклади застосування теорії Гренандера для оцінювання функціоналів від випадкових процесів з $a(x) = 1$, $a(x) = 1 - x$.

Вступ

В останні роки зростає інтерес до задач оцінювання випадкових процесів в умовах невизначеності. Такі задачі виникають при розгляді проблем теорії автоматичного управління, кодування та обробки сигналів у радіо- та гідролокації, проблем розпізнавання образів мовних сигналів та зображень. Останнім часом такі задачі розглядаються для прогнозу фінансової інформації.

Постановка задачі інтерполяції та екстраполяції для стаціонарних випадкових послідовностей вперше була розглянута А.М. Колмогоровим за умови відомих кореляційних функцій. Надалі цю теорію розробляли Г.Крейн, Н. Вінер, А.М. Яглом, Ю.А. Розанов.

Та існує цілий ряд задач, коли зручною математичною моделлю є передбачення лінійних перетворень (функціоналів) випадкових процесів, а задачі знаходження оцінок процесів доводиться розв'язувати в умовах спектральної невизначеності.

Вперше задача подібного класу була поставлена У.Гренадером у термінах теорії ігор [Grenander U . A prediction problem in game theory // Ark. Mat. - 1957. -Vol . 3 - p . 371-379 .]. Її розв'язання можна інтерпретувати як розв'язання задачі прогнозування стаціонарного випадкового процесу, що спостерігається без шуму, точне значення спектральної щільності невідомо, але відомо дисперсію сигналу, що і визначає в даному випадку параметричний клас спектральних щільностей.

1. Основні положення теорії стаціонарних процесів і теорії ігор

1.1 Основні поняття теорії стаціонарних процесів

Елементарною випадковою функцією називається функція аргументу t , в якій залежність від t подається звичайною не випадковою функцією, яка як параметри містить одну або кілька звичайних, незалежних від t випадкових величин.

Елементарна випадкова функція може мати наступний вигляд:

$$Y(t) = Xe^{-t},$$

де $t > 0$, X - неперервна випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $(-1; 1)$.

Випадкова функція $X(t)$ називається *стаціонарною*, якщо вона має:

1. стале математичне сподівання, тобто відсутність тренду;
2. сталу дисперсію;
3. кореляційна функція залежить від різниці аргументів $t_2 - t_1$.

Важлива особливість випадкової функції – це залежність властивостей функції від початку відліку часу. Відповідно до цього розглянемо *стаціонарні процеси*.

В стаціонарних випадкових функціях усі закони розподілу залежать не від самих величин, а від взаємного розміщення моментів часу $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Часовий ряд – одна з реалізацій випадкового процесу, яка реально спостерігається.

Випадковий процес – набір випадкових величин на якомусь проміжку T , або сукупність реалізацій

$$\xi(t) = \xi(t, \omega): [T \times \Omega] \rightarrow R^1$$

Стаціонарність:

- У вузькому понятті – з зсувом часового ряду числові характеристики не змінюються.
- У широкому понятті:
 1. $E(\xi(t)) = \text{const}$ (немає тренду),
 2. $\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \text{cov}(\xi(t), \xi(t + k)) = R(k)$,
 k -лаг (крок).

Наслідок:

$$\text{cov}(\xi(t_0), \xi(t_0)) = D(t) = R(0) = \text{const} \text{ (стабільна дисперсія).}$$

Випадковий процес називається *стаціонарним випадковим процесом*, якщо його характеристики не змінюються зі зміною його аргументу, тобто однакові у всіх перетинах процесів $X(t)$ і $X(t + t_0)$, де t_0 – будь-яке фіксоване число.

Отже, у стаціонарному процесі функції щільності ймовірностей не змінюються при заміні аргументу t на $t + t_0$, тобто:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0),$$

$$\text{де } n = 1, 2, \dots, -\infty < t_0 < +\infty.$$

Областю визначення такого процесу може бути або один з інтервалів $(-\infty; +\infty)$, $[0; +\infty)$, або множина всіх цілих чи додатних чисел.

Стаціонарний випадковий процес можна аналізувати, починаючи з будь-

якого моменту часу, оскільки він знаходиться, по суті, в стані ймовірної рівноваги.

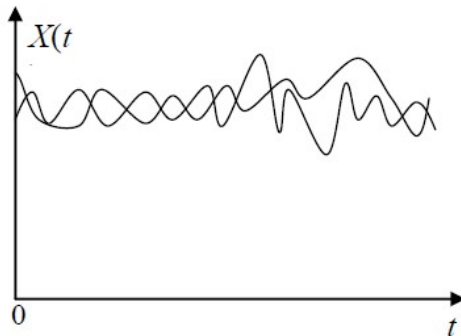


Рисунок 1

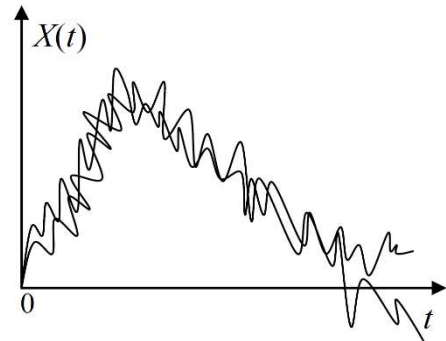


Рисунок 2

Приклади випадкових процесів – криві стаціонарного процесу (Рисунок 1), і нестаціонарного (Рисунок 2).

Білий шум є найпростішим прикладом стаціонарного випадкового процесу. Іншим прикладом стаціонарного процесу дискретного часу, коли пробний простір також дискретний (так що випадкова змінна може приймати одне з N можливих значень), є схема Бернуллі.

1.2 Основні терміни і поняття теорії ігор

Теорія ігор – це теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах певного конфлікту. А оскільки обидві сторони конфлікту прагнуть будь-якою ціною приховати власні наміри (або хоча б звести обізнаність суперника у власних намірах до мінімуму), то зазвичай прийняття усіх рішень в умовах конфлікту відбувається в умовах невизначеності.

Складовими теорії ігор є наступні поняття:

- конфлікт як такий;
- прийняття рішень;
- оптимальність і подальша оптимізація прийнятих рішень.

Теорія ігор активно використовує різні математичні методи й результати досліджень в теорії ймовірності, класичного й функціонального аналізу, комбінаториці, теорії інтегральних та диференціальних рівнянь і так далі. Специфіка теорії ігор сприяє розробці різноманітних математичних напрямів (наприклад, теорія опуклих множин, лінійне програмування та інше).

Під *конфліктом* розуміється ситуація, в якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, які переслідують різні (інколи протилежні) цілі. Кожна з сторін-учасників конфліктних ситуацій може у певний спосіб впливати на хід подій, але не має змоги повністю ним керувати.

Теорія ігор завжди передбачає, що існує мінімум два гравці і результат їхнього конфлікту, тобто гри, визначається певним вибором. Та на відміну від звичайних спортивних ігор, за умови виграшу одного гравця, другий не обов'язково має програвати. Конфлікт може бути частковий, а обидва гравці можуть як виграти, так і програти одночасно.

Зазвичай гравці обирають рішення, або ж стратегії, виходячи з результату. Спочатку один гравець обирає стратегію, яка, на його думку, буде оптимальною, тоді інший гравець робить так само.

Типи стратегій в теорії ігор:

- чисті стратегії
- змішані стратегії

Чиста стратегія надає цілковиту визначеність, яким чином гравець має продовжити (або ж почати) гру. Вона визначає результат для всіх можливих виборів, які гравець повинен буде зробити.

Змішана стратегія є вказівкою ймовірності кожної чистої стратегії. З цього слідує, що гравець обирає одну з чистих стратегій відповідно до тих імовірностей, що задані змішаною стратегією. Гравець робить вибір на початку гри і не змінює його аж до самого кінця. Кожна чиста стратегія є частковим випадком змішаної, якщо ймовірність чистої стратегії дорівнює одиниці, а усіх інших можливих чистих стратегій – нулю.

Для того, щоб вирішити гру, або знайти рішення гри необхідно для кожного гравця вибрати стратегію, яка б відповідала умові оптимальності. Це означає, що один із гравців повинен одержати максимальний виграш, у той час як другий дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються *оптимальними*.

Яскравим і дуже відомим прикладом із теорії ігор є так звана «Дилема в'язня». Це гра, в якій гравці прагнуть одержати вигоду, співпрацюючи один з одним або ж зраджуючи одне одного. Звісно, як було сказано раніше, гравець намагається максимізувати свій виграш.

У «Дилемі в'язня» зрада домінує над співпрацею, тому єдина можлива рівновага – це коли обоє гравці зраджують одне одного. Гру можна представити у вигляді простої таблиці (Таблиця 1).

	В'язень А зберігає мовчання	В'язень А надає свідчення проти в'язня Б
В'язень Б зберігає мовчання	Обидва одержують півроку заключення	А вільний. Б одержує 10 років заключення
В'язень Б надає свідчення проти в'язня А	Б вільний. А одержує 10 років заключення	Обидва одержують 2 роки заключення

Таблиця 1

Двоє підозрюваних, А і Б, заарештовані. У поліції немає достатніх доказів для звинувачення, і, ізолювавши їх один від одного, вони пропонують їм одну і ту ж пропозицію: якщо один свідчить проти іншого, а той зберігає мовчання, то перший звільняється, а другий одержує 10 років в'язниці. Якщо обидва мовчать, у поліції мало доказів, і вони засуджуються до 6 місяців. Якщо обидва свідчать проти один одного, вони одержують по 2 роки. Кожен ув'язнений вибирає, мовчати або свідчити проти іншого. Проте жоден з них не знає точно, що зробить інший.

Отже, найкраще співпрацювати одне з одним, тобто мовчати і одержати всього півроку ув'язнення. Будь-яке з трьох інших рішень є менш вигідним.

2. Теорія Гренандера

2.1 Постановка задачі

Двоє людей, X і P , грають у наступну гру. X керує випадковим механізмом, що створює стаціонарний стохастичний процес $x = \{x_t\}$. Дано середнє значення $Ex(t) = 0$ і дисперсію $Ex^2(t) = 1$, але форму спектра процесу можна повністю визначити за допомогою X . Гравець P дотримується значень $x(t)$ для $t < 0$ і хоче передбачити значення

$$z = \int_0^1 a(t)x_t dt = Ax,$$

де $a(t)$ – дійсна і неперервна функція t в $(0, 1)$. Для цієї мети P має всі лінійні предиктори, утворені зі стохастичних змінних $x_t, t \leq 0$. Позначимо вибраний предиктор через p , а передбачуване значення – px .

Функція окупності гри становить $(Ax - px)^2$. X хоче максимально збільшити кількість $\|Ax - px\|^2 = E[Ax - px]^2$ і P намагається мінімізувати той самий вираз.

У наступному пункті ми дізнаємось про значення $\max \min \|Ax - px\|^2$ і як це значення досягається. У пункті 2.3 ми покажемо, що це значення збігається з $\min \max \|Ax - px\|^2$, гра визначена, і виходить пара чистих стратегій, яка утворює рішення гри. Може бути питанням конвенції, чи вважати стратегію гравця X чистою (єдиний вибір $g(t)$) або рандомізованою (вибір стохастичного процесу x). Пункти 3.1 і 3.2 присвячені деяким додаткам теореми в пункті 2.3.

2.2. Виведення max min

Коли P першим вибирає свою стратегію p для мінімізації $\|Ax - px\|^2$, а тоді X вибирає x для максимізації мінімального значення, зрозуміло, що ми можемо негайно обмежити набір стратегій X процесами, які повністю не детерміновані.

Щоб побачити це, зазначимо спочатку, що для даного x ми мінімізуємо $\|Ax - px\|^2$, вибравши

$$px = \int_0^1 a(t)x_t^* dt,$$

де x_t^* - найкращий прогноз значення x_t , коли спостерігається x_τ , $\tau \leq 0$. По-друге, якщо x_t - довільний стаціонарний процес, добре відомо, що його можна розкласти $x_t = y_t + z_t$ на два доданки: один, y_t , повністю не детермінований та інший, z_t , детермінований і такий, що $y_s \perp z_t$ для всіх s, t . Але тоді для оптимального прогнозованого коректування до x_t маємо $\|Ax - px\|^2 = \|Ay - py\|^2$ і $\|y\| \leq \|x\| = 1$ з рівністю, лише якщо $z = 0$. Якщо $z \neq 0$, ми досягли би більшого значення, вибравши процес $\|y\|^{-1}y_t$ замість x_t , що підтверджує твердження.

Але якщо x_t абсолютно недетермінований, він може бути представлений як

$$\int_{-\infty}^t g(t-u)d\xi(u),$$

де $\xi(u)$ – процес з ортогональними приростами і нормованим $\|\Delta\xi(u)\|^2 = \Delta u$, а також

$$\int_0^\infty g^2(t)dt = 1. \quad (1)$$

Загалом існує багато різних уявлень цієї форми, але нас особливо цікавить те (яке завжди існує) таке, що лінійні багатообрази, що охоплюються x_s , $s \leq t$, і $\xi(u)$, $s \leq t$, збігаються для всіх значень t . Тоді оптимальний прогноз – просто

$$x_t^* = \int_{-\infty}^t g(t-u) d\xi(u),$$

і ми маємо

$$\min_p \|Ax - px\|^2 = \left\| \int_0^1 a(t)(x_t - x_t^*) dt \right\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 a(s)a(t)r(s,t) ds dt$$

де

$$r(s,t) = E(x_s - x_s^*)(x_t - x_t^*) = \int_0^{\min(s,t)} g(s-u)g(t-u) du.$$

Звідси мінімальне значення задається

$$\begin{aligned} \min_p \|Ax - px\|^2 &= \int_0^1 \int_0^1 a(s)a(t) \int_0^{\min(s,t)} g(s-u)g(t-u) du ds dt \\ &= \int_0^1 K(x,y)g(x)g(y) dx dy \end{aligned}$$

де

$$K(x,y) = \int_0^{\min(1-x,1-y)} a(x+u)a(y+u) du. \quad (2)$$

Тепер гравець X намагається зробити це мінімальне значення максимально великим, вибравши відповідний x . Через побічну умову (1) зрозуміло, що

$$\max_x \min_p \|Ax - px\|^2 \leq v$$

якщо v – найбільше власне значення безперервного і симетричного ядра $K(x, y)$ в (2). З іншого боку якщо $\gamma(t)$ нормована власна функція, що відповідає власному значенню v (або одна з функцій, якщо v кратне значення), тоді

$$\min_p \|Ax - px\|^2 \geq \int K(x, y) \gamma(x) \gamma(y) dx dy = v.$$

Зараз ми довели, що $\max \min$ = найбільше власне значення v ядра $K(x, y)$. Тепер переходимо до виведення значення $\min \max$.

2.3. Виведення $\min \max$

Апроксимуємо $a(t)$ рівномірно з ступеневою функцією

$$a_n(t) = a\left(\frac{v+1}{n}\right) = a_v$$

для

$$\frac{v}{n} \leq t \leq \frac{v+1}{n}, v = 0, 1, \dots, n-1$$

Оскільки

$$\left\| \int_0^1 a(t)x_t dt - \int_0^1 a_n(t)x_t dt \right\| \leq \|x_t\| \int_0^1 |a(t) - a_n(t)| dt$$

ми бачимо, що ми робимо доволіно невелику помилку, якщо ми маємо справу з $\int_0^1 a_n(t)x_t dt$ замість Ax . Позначимо як C клас всіх прогнозів, сформованих із стохастичних змінних

$$x_v = n \int_{\frac{v}{n}}^{\frac{v+1}{n}} x_t dt, \quad v = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тоді очевидно, що

$$\min_p \max_x \|A_n x - px\| \leq \min_{p \in C} \max_x \|A_n x - px\|.$$

X утворює стаціонарний процес із дисперсією менше, але близької до одиниці, коли n велика. Позначимо через Γ клас усіх дискретних стохастичних процесів, які можна представити у вигляді x , з точки зору стаціонарного стохастичного процесу з неперервним часовим параметром.

Тоді

$$\min_{p \in C} \max_x \|A_n x - px\| = \min_{p \in C} \max_{x \in \Gamma} \|A_n x - px\| \leq \min_{p \in C} \max_{x \in D} \|A_n x - px\|$$

де D позначає клас усіх дискретних стаціонарних процесів з дисперсією одного.

Тепер максимум можна зручно виразити іншим способом.

Використовуючи відоме спектральне представлення, яке ми можемо записати

$$x_v = n \int_{-\pi}^{\pi} e^{tv\lambda} dZ(\lambda)$$

де $\|\Delta Z(\lambda)\|^2 = \Delta F(\lambda)$ і $F(\pi) - F(-\pi) = 1$. Ми також маємо

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} a_v x_v - \sum_{-\infty}^{-1} c_v x_v = \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha(\lambda) - \gamma(\lambda)] dZ(\lambda),$$

де

$$\begin{cases} \alpha(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} a_v e^{iv\lambda} \\ \varphi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{-1} c_v e^{iv\lambda} \end{cases},$$

а також

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} a_v x_v - \sum_{-\infty}^{-1} c_v x_v \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\alpha(\lambda) - \gamma(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

Тоді

$$\max_{x \in D} \|A_n x - px\|^2 = \max_{\lambda} |\alpha(\lambda) - \gamma(\lambda)|^2.$$

Тепер ми можемо застосувати таку теорему: Розглянемо клас усіх степеневих рядів $f(\zeta)$, які є регулярними на $|\zeta| < 1$ і починається із додатного виразу $\sum_{k=0}^n \alpha_k \zeta^k$.

Позначимо через μ_n^2 найвище власне значення матриці з елементами

$$\begin{cases} h_{pq} = \alpha_p \bar{\alpha}_q + \alpha_{p-1} \bar{\alpha}_{q-1} + \dots + \alpha_0 \bar{\alpha}_{q-p} \text{ for } p \leq q \\ h_{pq} = \bar{h}_{qp} \\ p, q = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

Тоді якщо $\mu_n > 0$,

$$\max_{|\zeta|=1} |f(\zeta)| \geq \mu_n$$

і рівність стосується функції наступної форми

$$f(\zeta) = \mu_n e^{i\gamma} \prod_{k=1}^m \frac{\zeta + w_k}{1 + \bar{w}_k \zeta}, \quad \gamma \text{ дійсне}, \quad |w_k| < 1.$$

У даному випадку ми маємо вивести найбільше власне значення симетричної матриці з елементами

$$\begin{aligned} h_{pq} = \frac{1}{n^2} \left[a\left(1 - \frac{p}{n}\right) a\left(1 - \frac{q}{n}\right) + a\left(1 - \frac{p-1}{n}\right) a\left(1 - \frac{q-1}{n}\right) + \dots + \right. \\ \left. + a(1) a\left(1 - \frac{q-p}{n}\right) \right] \quad \text{для } p \leq q, p, q = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Оскільки $a(t)$ неперервна функція від t , з цього слідує те, що для $\frac{p}{n} \rightarrow x, \frac{q}{n} \rightarrow y, x \leq y$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n h_{pq} = \int_0^{\min(x,y)} a(1-x+u) a(1-y+u) du = K(1-x, 1-y).$$

З цього тепер слідує, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^2 = v$, найбільше власне значення ядра $K(x, y)$.

Отже, ми показали, що

$$\min_p \max_x \|Ax - px\|^2 \leq v = \max_x \min_p \|Ax - px\|^2,$$

де можливий тільки знак рівності. Це закінчує доведення теореми:

Теорема: Гра з нульовою сумою для двох осіб, що визначена вище за допомогою функції виплат $(Ax - px)^2$, – визначена. Рішення гри подано в чистих стратегіях

$$\begin{cases} x_t = \int_{-\infty}^t \gamma(t-u) d\xi(u) \\ px = \int_0^1 a(t)x_t^* dt \end{cases},$$

де $\gamma(t)$ – власна функція, що відповідає найбільшій власній величині v симетричного ядра

$$K(x, y) = \int_0^{\min(1-x, 1-y)} a(x+u)a(y+u)du.$$

Значення гри – v . Якщо v – просте власне значення, рішення гри унікальне.

3. Приклади застосування теорії Гренадера

3.1 Перше застосування

Якщо $a(x) = 1 - x$, маємо вирішити інтегральну рівність

$$\int_0^1 K(x, y)g(x)dx = \lambda g(y)$$

разом із $K(x, y) = K(y, x)$, а також

$$K(x, y) = \int_0^{1-x} (1 - u - y)(1 - u - x)du \quad \text{для } y < x.$$

Цю елементарну проблему буде вирішено за допомогою аргументу, який використовується у зв'язку з функціями Гріна.

Маємо частинні похідні відносно y :

$$\begin{cases} K'_y = - \int_0^{1-x} (1 - x - u)du \\ K''_y = K'''_y = 0 \end{cases} \quad \text{для } y < x$$

і

$$\begin{cases} K'_y = - \int_0^{1-y} (1 - x - y)du \\ K''_y = y - x \\ K'''_y = 1 \end{cases} \quad \text{для } y > x$$

За винятком точки $y = x$, функція $K(x, y)$ має безперервні похідні всіх порядків відносно y . В $y = x$ перша і друга похідні неперервні

$$\begin{cases} (K'_y)_{y=x-} = (K'_y)_{y=x+} = - \int_0^{1-x} (1 - x - u)du \\ (K''_y)_{y=x-} = (K''_y)_{y=x+} = 0 \end{cases}$$

але третя похідна має розрив. Продиференціюємо інтегральне рівняння двічі відносно y ,

$$\lambda g''(y) = \int_0^1 K_y''(x, y)g(x)dx = \int_0^y (y-x)g(x)dx.$$

Продиференціювавши це рівняння ще двічі, отримаємо

$$\lambda g^{IV}(y) = g(y).$$

Рішення цього диференційного рівняння мають вигляд

$$g(t) = Ae^{ixt} + Be^{-ixt} + Ce^{xt} + De^{-xt}$$

де $x = \lambda^{-t}$. Для визначення A, B, C і D ми повинні дотримуватися граничних умов, яким $g(t)$ має задовольнятися. Дійсно, оскільки $K(x, 1) = K'_y(x, 1) = 0$ і з того, що $g''(0) = g'''(0) = 0$, маємо

$$\begin{cases} Ae^{ix} + Be^{-ix} + Ce^x + De^{-x} = 0 \\ x(Aie^{ix} - Be^{-ix} + Ce^x + De^{-x}) = 0 \\ x^2(-A - B + C + D) = 0 \\ x^3(-iA + iB + C - D) = 0 \end{cases}$$

Для того, щоб ця система лінійних рівнянь мала нетривіальні розв'язки, необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю

$$D(x) = \begin{vmatrix} e^{ix} & e^{-ix} & e^x & e^{-x} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} & e^x & -e^{-x} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -i & i & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Розширивши визначник після його першого ряду, маємо

$$\begin{aligned} D(x) &= [2ie^{-ix} + (i-1)e^x + (i+1)e^{-x}]e^{ix} - \\ &- [-2ie^{ix} + (-1-i)e^x + (1-i)e^{-x}]e^{-i} + \\ &+ [(1+i)e^{ix} + (-1+i)e^{-ix} + 2ie^{-x}]e^x - \\ &- [(1-i)e^{ix} + (-1-i)e^{-ix} - 2ie^x]e^{-x} \\ &= 8i[1 + \cos x \cosh x]. \end{aligned}$$

Найбільше значення λ відповідає найменшому x , що задовольняє

$$\cos x \cosh x = -1.$$

Ми знаходимо наближене значення $x_{min} \cong 1.88$, тому значення гри

$$v = \lambda_{max} = x_{min}^{-t} \cong 0.88.$$

Для визначення відповідної власної функції ми почнемо з наступного

$$\begin{cases} Ae^{ix} + Be^{-ix} + Ce^x + De^{-x} = 0 \\ -A - B + C + D = 0 \\ -iA + iB + C - D = 0 \end{cases}$$

Поклавши

$$\begin{cases} \alpha = A + B = C + D \\ \frac{\beta}{i} = A - B = \frac{C - D}{i} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{i}\right), & B = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{i}\right) \\ C = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), & D = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \end{cases},$$

отримаємо

$$\gamma(t) = \alpha(\cos xt + \cos hxt) + \beta(\sin xt),$$

де α і β можуть бути визначені з наступного

$$\begin{cases} \gamma(1) = 0 \\ \int_0^1 \gamma^2(t) dt = 1 \end{cases},$$

Вигляд $\gamma(t)$ показаний на діаграмі (Рисунок 3).

3.2 Друге застосування

Якщо $a(x) \equiv 1$, ми маємо вивчити замість простого інтегрального рівняння

$$\int_0^1 K(x, y)g(x)dx = \lambda g(y)$$

де $K(x, y) = \min(1 - x, 1 - y)$,

$$\lambda g(y) = (1 - y) \int_0^y g(x)dx + \int_y^1 (1 - x)g(x)dx.$$

З уже відомим аргументом ми отримуємо $\lambda g''(y) + g(y) = 0$ з $g(1) = g'(0) = 0$.

Отже,

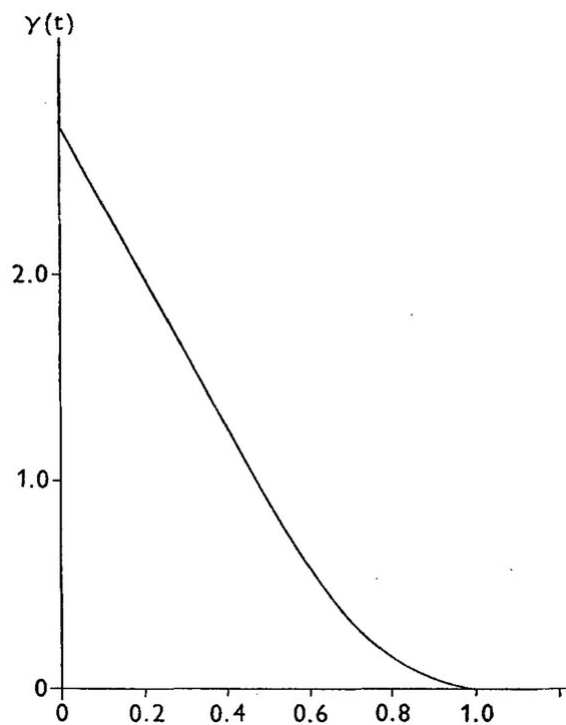


Рисунок 3

$$g(t) = Ae^{ixt} + Be^{-ixt}$$

разом із $x = \lambda^{-t}$. Оскільки

$$\begin{aligned} Ae^{ix} + Be^{-i} &= 0 \\ A - B &= 0 \end{aligned}$$

ми повинні мати $\cos x = 0$, тому $v = \lambda_{max} = \sqrt{2/\pi}$, а тому

$$x(t) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Висновки по роботі

Отже, підбиваючи підсумки виконаної роботи, ми змогли розглянути такі теми, як теорія стаціонарних процесів, теорія ігор, прогнозування випадкових процесів в умовах невизначеності.

Ми дослідили застосування теорії ігор до задач оцінювання випадкових процесів. Виконуючи курсову роботу, ми вивчили застосування теорії ігор до задач оцінювання випадкових процесів. Також були розглянуті основні положення теорії стаціонарних процесів і теорії ігор, теорію Гренандера, її приклади та застосування. Для цього я використовувала знання, отримані на лекціях, та методичних вказівках до виконання курсової роботи.

У наш час проблеми оцінки випадкових процесів виникають достатньо часто. Найбільш часто ця тематика зустрічається в економіці та фінансовій галузі.

Як можна побачити, Ульф Гренандер вперше поставив таку задачу у свій час, а ми наразі можемо тлумачити її як вирішення задачі прогнозування випадкового процесу, що є стаціонарним, який в свою чергу спостерігається без шуму. У цій задачі нам відоме лише значення дисперсії. Ми розглянули рішення гри, яка, як виявилось, має положення рівноваги, а гравці використовують чисті стратегії, які їм вдається знайти.

Також ми розглянули два приклади застосування теорії Гренандера для оцінювання функціоналів від випадкових процесів з $a(x) = 1$ та $a(x) = 1 - x$.

Джерела:

1. [Grenander U . A prediction problem in game theory // Ark. Mat. - 1957. – Vol. 3 – p. 371-379
2. Вентцель, Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – М. : Академия, 2003. – 488 с.
3. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст]: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с.
4. Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика [Текст] : навч.-метод. посібник / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладов. – К. : КНЕУ, 2005. – 256 с.
5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 4-изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.
6. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.
7. Жлуктенко, В. І. Стохастичні моделі в економіці [Текст] : монографія / В. І. Жлуктенко, А. В. Бегун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с.
8. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології [Текст] : навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с.
9. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст] : підручник / С. П. Сеньо; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с.
10. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко – М.: Наука, 1969. – 400 с.

11. *А. Субботін*. Ігор теорія // Політична енциклопедія. Редкол.: Ю. Левенець (голова), Ю. Шаповал (заст. голови) та ін. — К.: Парламентське видавництво, 2011. — с.273
12. Дослідження операцій. Ч. 3. Ухвалення рішень і теорія ігор / М. Я. Бартіш, І. М. Дудзяний. — Львів: Видавничий центр Львівського національного університету ім. І.Франка, 2009. — 277 с.: іл. — Бібліогр.: с.271-272 (36 назв). —
13. Теорія ігор / Бартіш М. Я., Роман Л. Л. — Львів: Видавничий центр ЛНУ, 2005. — 120 с.
14. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 420 с.
15. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. — М.: Мир, 1985. — 200 с.
16. *фон Нейман Дж., Моргенштерн Э.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
17. *Оуэн Г.* Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 232 с.
18. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%96%D0%B3%D0%BE%D1%80
19. Данилов В. И. Лекции по теории игр. — М.: Российская экономическая школа, 2002.
20. https://pidruchniki.com/15890315/ekonomika/teoriya_igor
21. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%B2%27%D1%8F%D0%B7%D0%BD%D1%8F