α-ЗОБРАЖЕННЯ ЛЮРОТА ТА МНОЖИНИ ЧИСЕЛ, ЗАДАНІ ОБМЕЖЕННЯМИ НА СИМВОЛИ ЦЬОГО ЗОБРАЖЕННЯ

К.Ю. СОКОЛОВА

Нехай $\alpha := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — зліченне розбиття одиничного інтервалу $\mathcal{U}$, яке складається з непорожніх відкритих справа і закритих зліва інтервалів. Передбачається, що елементи α впорядковані справа наліво, починаючи з A_1. І нехай a_n — міра Лебега $\lambda(A_n), A_n \in \alpha$ та $t_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ — міра Лебега n-го залишку α. Зрозуміло, що $t_1 := \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ для кожного розбиття α. Також корисно мати на увазі, що $t_{n+1} = t_n - a_n$.

Означення 1. Для даного розбиття α, визначимо відображення $L_\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ таке, що:

$$L_\alpha(x) := \begin{cases} \dfrac{(t_n - x)}{a_n}, & x \in A_n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Відображення L_α називається відображенням α-Люрота [1].

Означення 2. Для кожного розбиття α відображення L_α призводить до розкладання чисел в ряд на $\mathcal{U}$, який має назву розклад α-Люрота.

Позначимо скінченний розклад α-Люрота через $[l_1, l_2, \ldots, l_k]_\alpha$, для деякого $k \in \mathbb{N}$, і нескінченний — через $[l_1, l_2, l_3, \ldots]_\alpha$. Розклад α-Люрота визначатимемо наступним чином [2] :

$$x = t_{l_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\prod_{i<n} a_{l_i} \right) t_{l_n} = t_{l_1} - a_{l_1} t_{l_2} + a_{l_1} a_{l_2} t_{l_3} - \cdots = \\ = [l_1, l_2, l_3, \ldots]_\alpha .$$

Для класичного розкладу Люрота J. Galambos в 1976 році [3] показав, що для майже для всіх $x \in (0, 1]$ відносно міри Лебега

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log L_n(x)}{\log n} = 1.$$

де $L_n(x) = \max\{l_1(x), \ldots, l_n(x)\}$ — найбільша цифра серед n перших цифр числа x.

Це означає, що майже для всіх x найбільші цифри x наближаються до нескінченності з лінійною швидкістю. З іншого боку, існують точки,

цифри яких можуть бути довільно великими. Це призводить до питання, чи можливо, що для якоїсь точки x, $L_n(x)$ може наближатися до нескінченності з іншою швидкістю. У зв'язку з цим було розглянуто множину

$$E(\alpha) = \left\{ x \in (0,1] : \lim_{n\to+\infty} \frac{\log L_n(x)}{\log n} = \alpha \right\} \quad (\alpha \geq 0),$$

в термінах розмірності Хаусдорфа. І доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Для деякого числа* $\alpha \geq 0, \dim_H E(\alpha) = 1$.

Зауваження 1. Дану проблему для класичного розкладу Люрота було розглянуто L. Shen в роботі [4].

Література

[1] M. Kesseböhmer, S. Munday, B.O. Stratmann. *Infinite Ergodic Theory of Numbers.* — 2016.

[2] S. Munday *Finite and infinite ergodic theory for linear and conformal dynamical systems. PhD thesis.* — University of St. Andrews — 2011.

[3] J. Galambos *Representations of Real Numbers by Infinite Series.* — Springer, 1976.

[4] L. Shen, Y. Yu, Y. Zhou *A note on the largest digits in Luroth expansion* // Int. J. Number Theory. — 2014. — Т. 9, № 5. — С. 1015–1024.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: 18fmf.k.sokolova@std.npu.edu.ua