

ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ
ТА ЙОГО
ЗАСТОСУВАННЯ У
ФІНАНСОВІЙ
МАТЕМАТИЦІ

Зубріцька Дар'я ПМ-4

МОТИВАЦІЯ

Дві проблеми даної теми:

- Чи можна узагальнити теорію диференціювання на випадок, коли порядок диференціювання це дріб?
- Чи буде це мати застосування?

Історія дробового числення (інтерпретація)

Ейлер (1730)

$$\frac{d^\alpha x^m}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Ріман-Ліувіль (1876)

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (2)$$

Капуто (1967)

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (3)$$

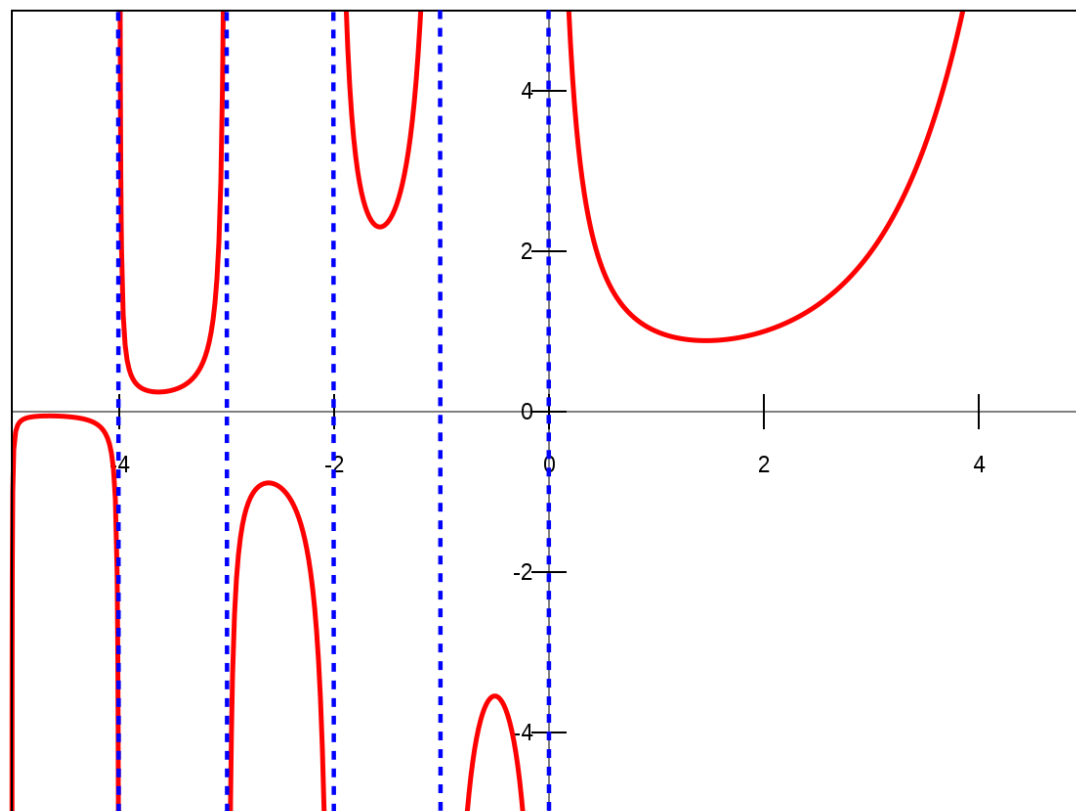
Підхід Рімана-Ліувілля. Дробове інтегрування

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-\tau)^{n-1} f(x) d\tau$$

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(x) d\tau$$

$$\Delta e, \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Gamma function



Підхід Рімана-Ліувілля. Властивості

Інтеграл виконує такі властивості:

- $I^\alpha (I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f$
- $\frac{d}{dx} I^{\alpha+1} f = I^\alpha f$

Підхід Рімана-Ліувілля.

Дробове диференціювання і зв'язок з інтегруванням

За цілого числення:

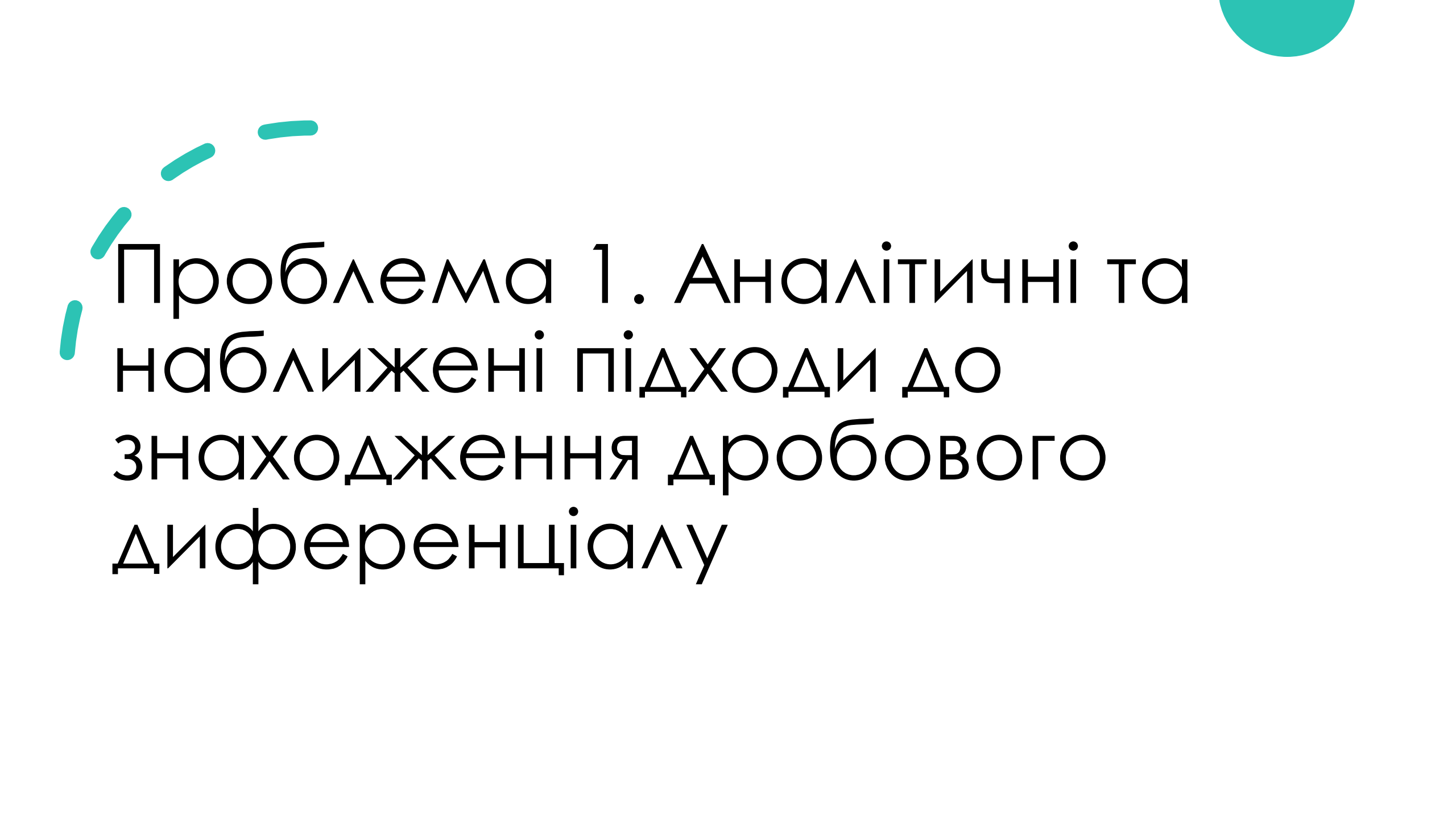
- $I^n \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = f(x)$
- $\frac{d^n}{dx^n} (I^n f(x)) = f(x)$

За дробового числення:

$$D^\alpha (I^\alpha f(x)) = f(x)$$
$$D^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I^{n-\alpha} f(x)), \text{ де } n - 1 \leq \alpha < n, \quad (4).$$

Дробове диференціювання Рімана-Ліувілля:

$${}_a D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x - \tau)^{\alpha - n + 1}}$$



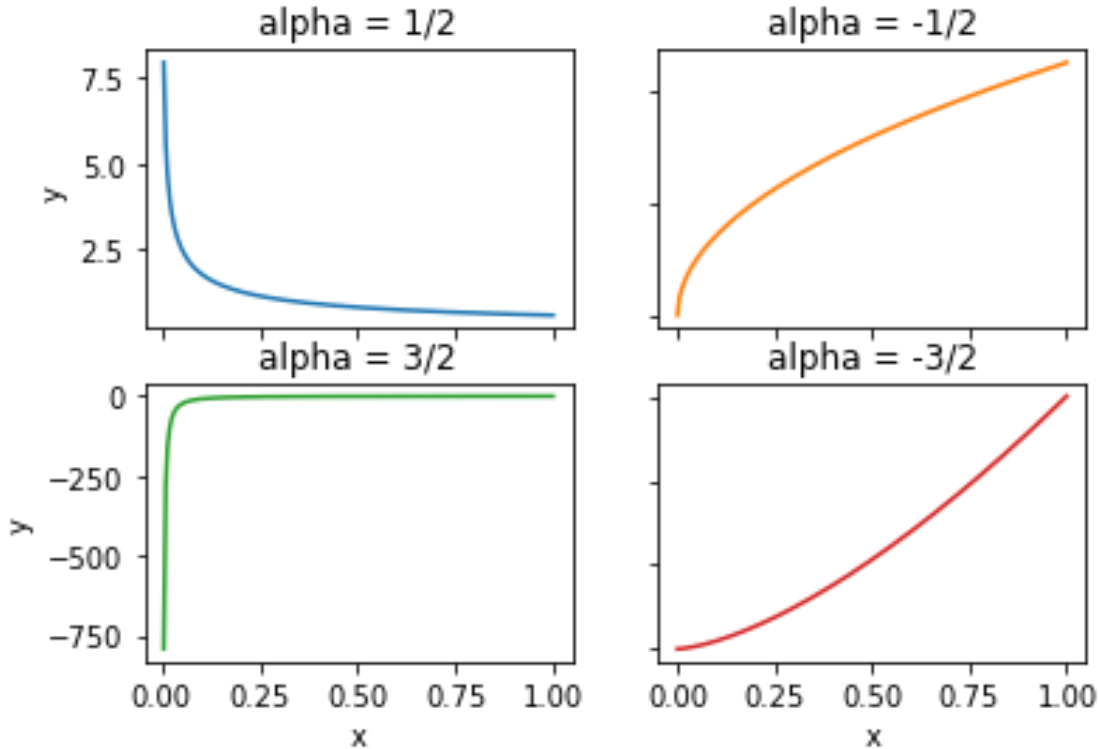
Проблема 1. Аналітичні та наближені підходи до знаходження дробового диференціалу

Дробове диференціювання.

Підхід Ейлера $\frac{d^\alpha x^m}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha}$.

$$f(x) = 1,$$

$$\frac{d^\alpha 1}{dx^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$



```
x = np.linspace(0, 1, 200)

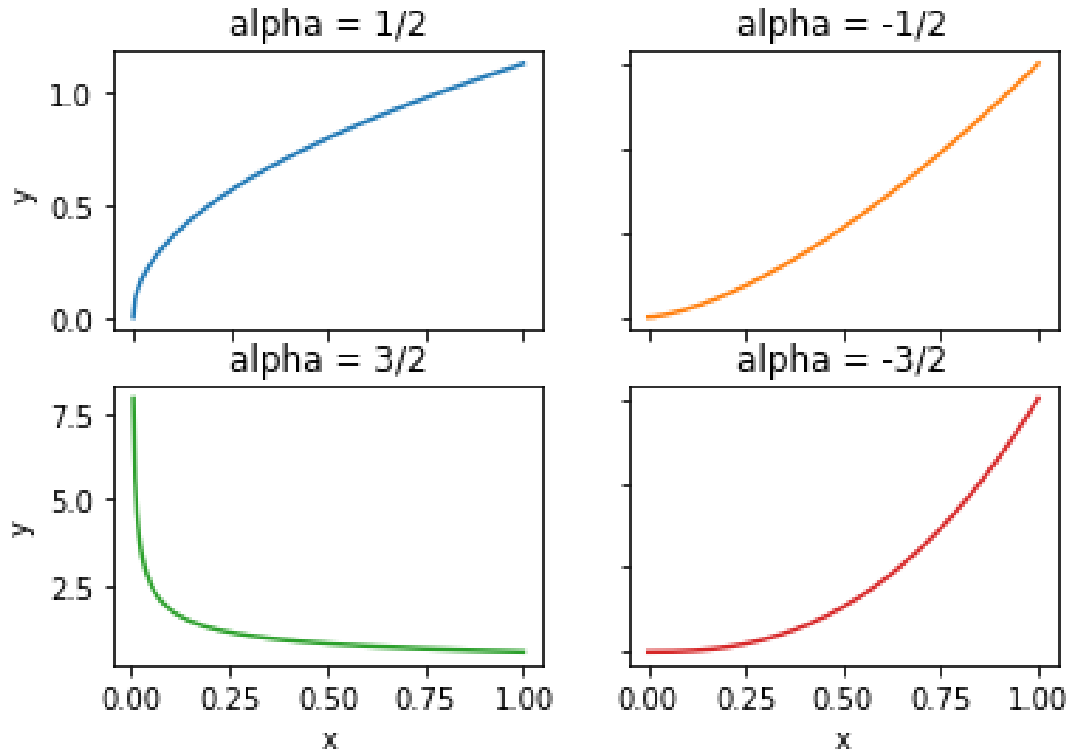
fig, axs = plt.subplots(2, 2)
axs[0, 0].plot(x, (x**(-1/2))/gamma(1 - 1/2))
axs[0, 0].set_title('alpha = 1/2')
axs[0, 1].plot(x, (x**(1/2))/gamma(1 + 1/2), 'tab:orange')
axs[0, 1].set_title('alpha = -1/2')
axs[1, 0].plot(x, (x**(-3/2))/gamma(1 - 3/2), 'tab:green')
axs[1, 0].set_title('alpha = 3/2')
axs[1, 1].plot(x, (x**(3/2))/gamma(1 + 3/2), 'tab:red')
axs[1, 1].set_title('alpha = -3/2')

for ax in axs.flat:
    ax.set(xlabel='x', ylabel='y')

for ax in axs.flat:
    ax.label_outer()
```


Дробове диференціювання. Підхід Ейлера (1).

$$f(x) = x, \quad \frac{d^\alpha x}{dx^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$



```
x = np.linspace(0, 1, 200)
```

```
fig, axs = plt.subplots(2, 2)
```

```
axs[0, 0].plot(x, (x**(1 - 1/2))/gamma(2 - 1/2))
```

```
axs[0, 0].set_title('alpha = 1/2')
```

```
axs[0, 1].plot(x, (x**(1 + 1/2))/gamma(2 + 1/2), 'tab:orange')
```

```
axs[0, 1].set_title('alpha = -1/2')
```

```
axs[1, 0].plot(x, (x**(1 - 3/2))/gamma(2 - 3/2), 'tab:green')
```

```
axs[1, 0].set_title('alpha = 3/2')
```

```
axs[1, 1].plot(x, (x**(1 + 3/2))/gamma(2 + 3/2), 'tab:red')
```

```
axs[1, 1].set_title('alpha = -3/2')
```

```
for ax in axs.flat:
```

```
    ax.set(xlabel='x', ylabel='y')
```

```
for ax in axs.flat:
```

```
    ax.label_outer()
```

Дробове диференціювання.

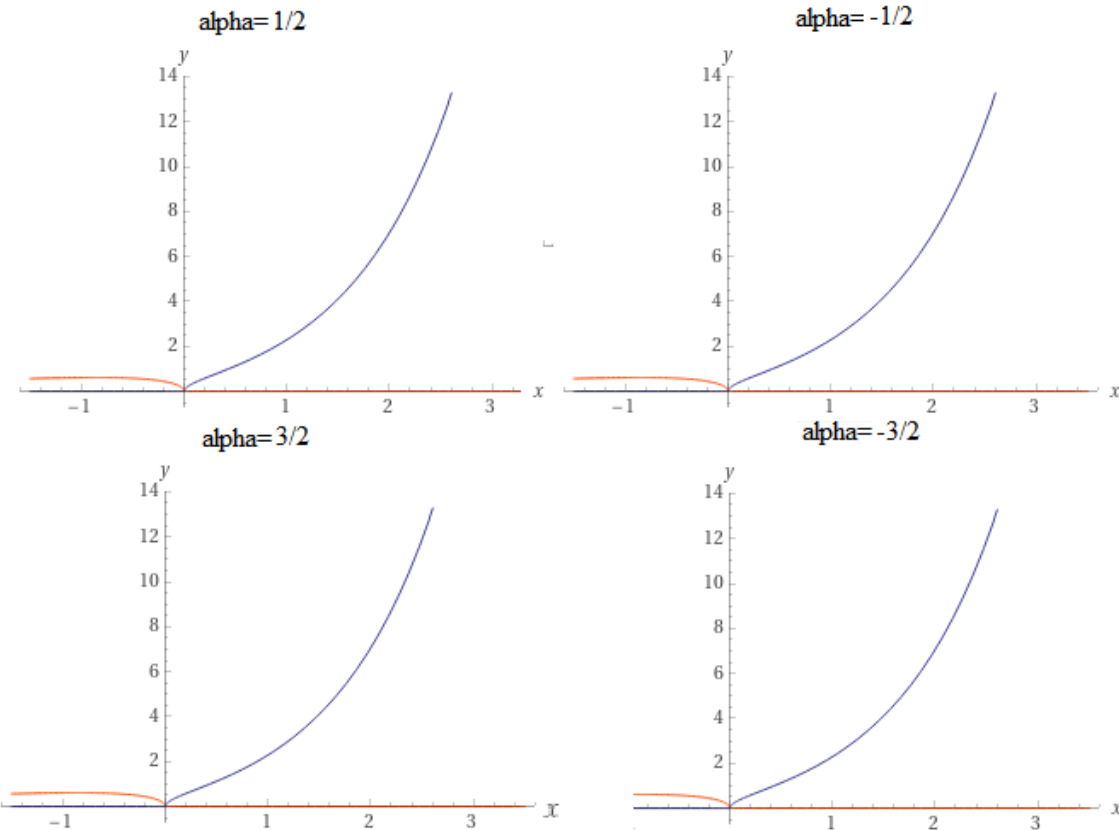
Підхід Капуто (3).

Формула М. Іштева [1].

$$f(x) = e^x,$$

$$\frac{d^\alpha e^x}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n-\alpha+1)}$$

Для графічної візуалізації було використано WolframAlpha.



Input interpretation

plot

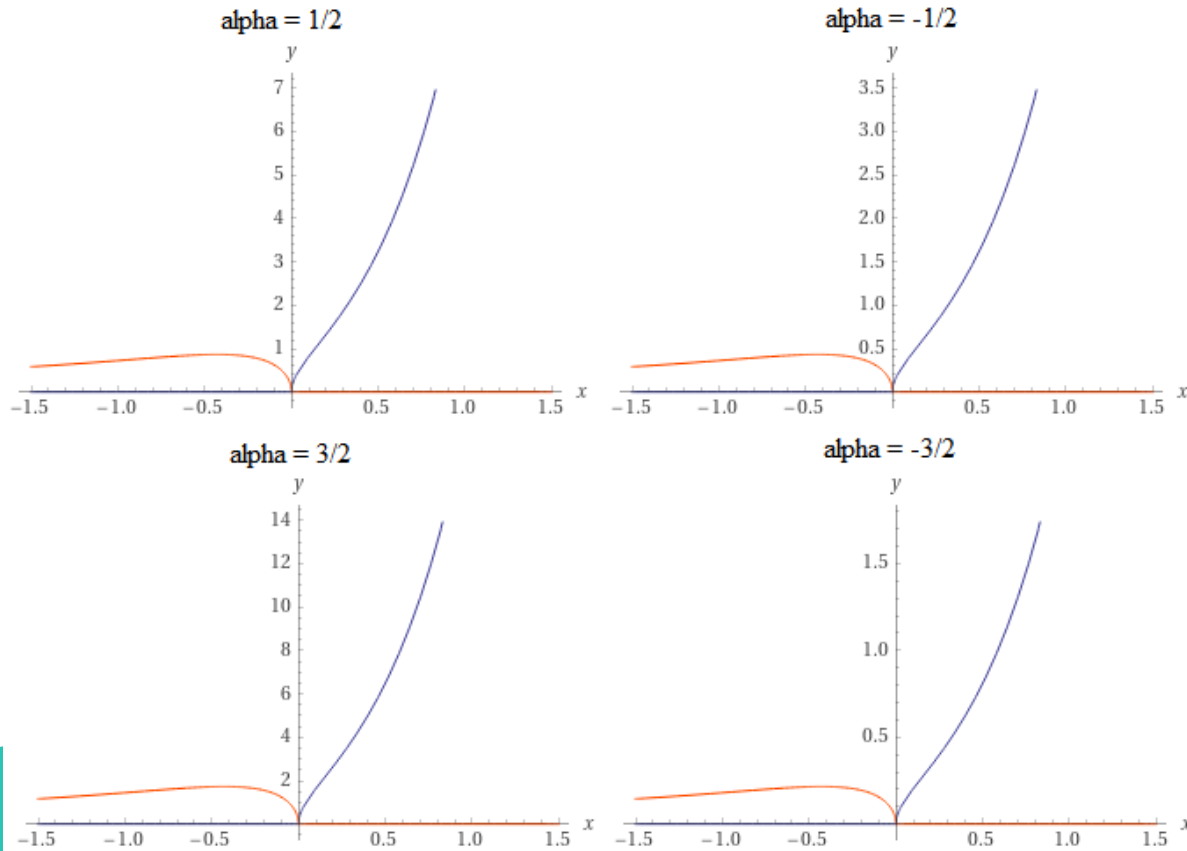
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1-1/2}}{\Gamma(k+1-\frac{1}{2}+1)}$$

Дробове диференціювання.

Підхід Капуто (3).

Формула М. Іштева [1].

$$f(x) = e^{2x}, \frac{d^\alpha e^{2x}}{dx^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+n} x^{k+n-\alpha}}{\Gamma(k+n+1-\alpha)}$$



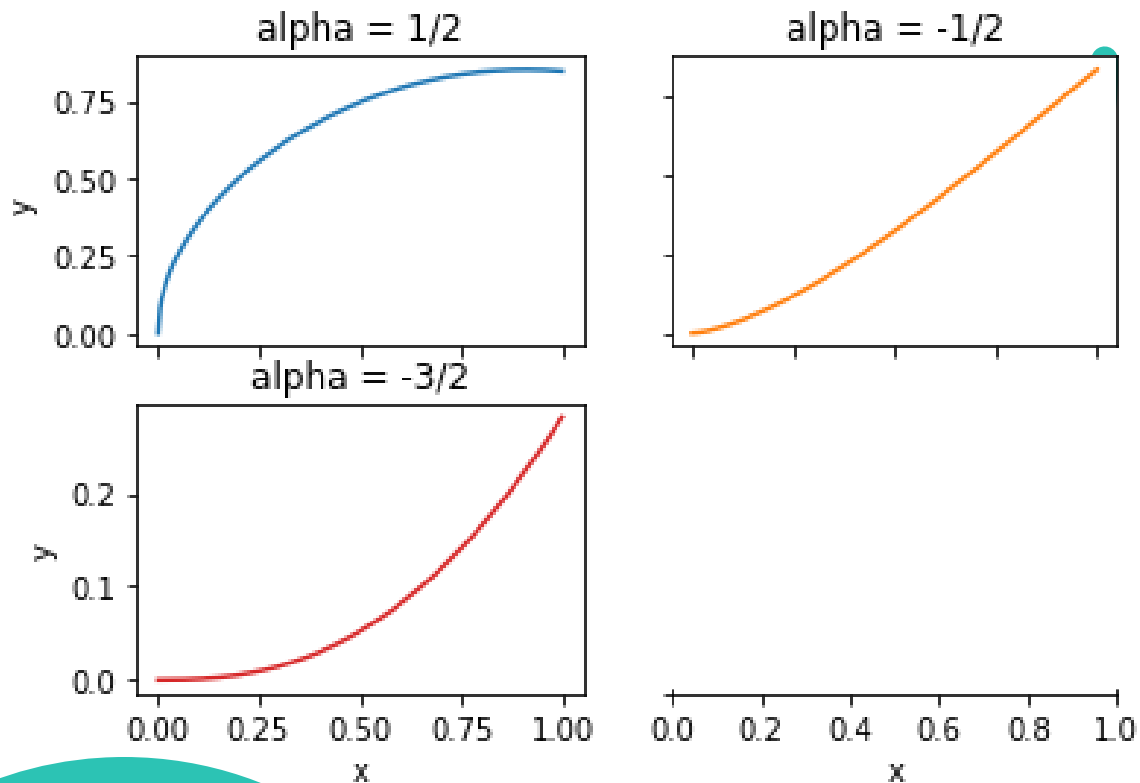
Для графічної візуалізації було використано WolframAlpha.

Input interpretation

plot

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1} x^{k+1-1/2}}{\Gamma(k+1-\frac{1}{2}+1)}$$

Підхід Рімана-Ліувілля для $f(x) = \sin(x)$

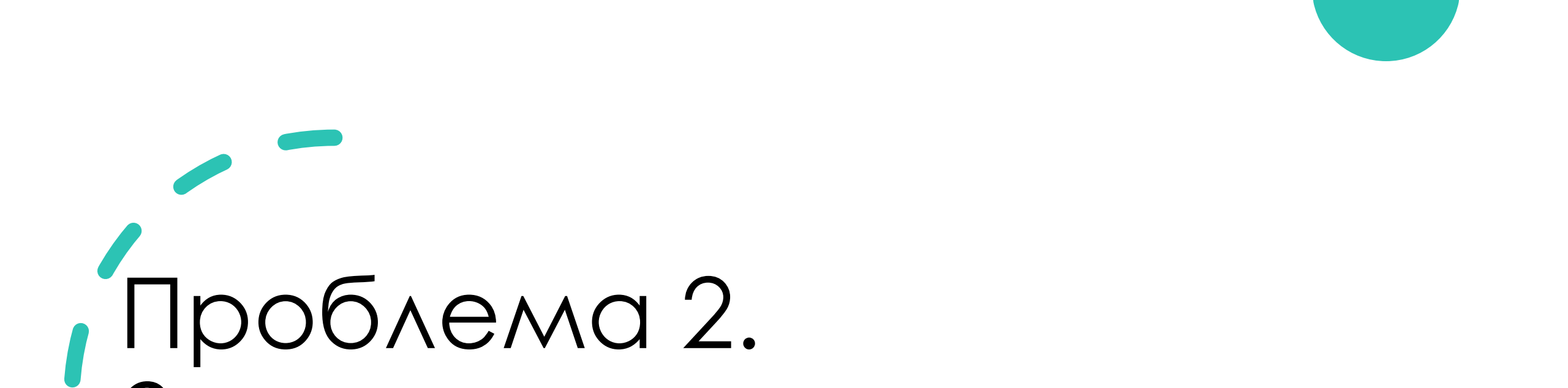


Main Function	Usage
GLpoint	Computes the GL differintegral at a point
GL	Computes the GL differintegral over an entire array of function values using the Fast Fourier Transform
GLI	Computes the improved GL differintegral over an entire array of function values
RLpoint	Computes the RL differintegral at a point
RL	Computes the RL differintegral over an entire array of function values using matrix methods

```
import differint.differint as df
x = np.linspace(0, 1, 200)

DF1 = df.RL(1/2, f, 0, 1, 200)
DF2 = df.RL(-1/2, f, 0, 1, 200)
DF3 = df.RL(-3/2, f, 0, 1, 200)

def f(x):
    return math.sin(x)
```



Проблема 2. Застосування у фінансовій математиці

Ціноутворення опціонів у субдифузійній моделі Блека-Шоулза

Використання дробового числення у дослідженні

1. Таутохронна задача.
2. Поширення ультразвукових хвиль у губчастій кістці людини.
3. Моделювання голосових сигналів з використанням дробового числення.
4. Поширення звукових хвиль у жорстких пористих матеріалах.
5. Теорії в'язкопружності.
6. Виявлення країв.
7. Механіки рідини.
8. Фінансова математика.

Модель Блека-Шоулза для опису цін акцій. Дифузійний процес.

$$Z(t) = Z_0 e^{\sigma B(t) + \mu t} \quad t \geq 0, Z_0 > 0$$

$$dZ(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Z(t) dt + \sigma Z(t) dB(t) \quad Z(0) = Z_0$$

PDF дифузійного процесу описаний рівнянням Фоккера-Планка:

$$\frac{df(x, \tau)}{d\tau} = - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} x f(x, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 f(x, \tau)$$

f -Probability Density Function (PDF) для процесу $Z(t)$.

Справедлива ціна опціонів колл та пут у дифузійній моделі

$$C_{BS}(X_0, K, T, \sigma) = X_0 N(d_+) - Ke^{-rt} N(d_-)$$

$$P_{BS}(X_0, K, T, \sigma) = C_{BS}(X_0, K, T, \sigma) + K - X_0$$

Субдифузійний процес та його PDF

$$Z_\alpha(t) = Z(S_\alpha(t))$$

$S_\alpha(t)$ – hitting time (обернений субординатор)

$$S_\alpha(t) = \inf\{\tau > 0: U_\alpha(\tau) > t\}$$

де $U_\alpha(t)$ – α -стабільний субординатор.

PDF процесу $Z_\alpha(t)$ це розв'язок фрактального F-P-E:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} \left[- \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} x w(x,t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 w(x,t) \right],$$

де ${}_0D_t^{1-\alpha}$ - дробовий диференціал Рімана-Ліувілля (2).

Справедлива ціна опціонів КОЛЛ та ПУТ у субдифузійній моделі

$$C_{BS}^{Sub}(X_0, K, T, \sigma) = \int_0^{\infty} C_{BS}(X_0, K, x, \sigma) g_{\psi}(x, T) dx$$
$$P_{BS}^{Sub}(X_0, K, T, \sigma) = C_{BS}^{Sub}(X_0, K, T, \sigma) + K - X_0$$

$$g_{\psi}(x, T) = T^{-\alpha} g_{\alpha}(x/T^{\alpha})$$

Для $\alpha = 1/2$:

$$g_{0.5}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

$$C_{BS}^{Sub}(X_0, K, T, \sigma) = \int_0^{\infty} C_{BS}(X_0, K, x, \sigma) T^{0.5} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4T}} \right) dx$$

Приклад

Для розрахунку теоретичної справедливої ціни опціону у випадку $\alpha = 1/2$ було використано субдифузійну модель Блека-Шоулза та наступні формули:

$$C_{BS}^{Sub}(X_0, K, T, \sigma) = \int_0^{\infty} C_{BS}(X_0, K, x, \sigma) T^{0.5} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4T}} \right) dx$$

$$C_{BS}(X_0, K, x, \sigma) = X_0 N(d_+) - K e^{-rx} N(d_-)$$

$$d_+ = \frac{\log \frac{X_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) x}{\sigma \sqrt{x}}, \quad d_- = d_+ - \sigma \sqrt{x}$$

Приклад результату праці програми

Дано: $\sigma = 60.307\%$, $K = 240.00$, $T = \frac{11}{365}$, $S = 240.14$,
 $r = 0.181\%$

Ціна з сайту для порівняння: 9.08

Перевірочний результат бібліотеки mibian

```
call = mibian.BS([x0, k, r, Tm], volatility=sigma)
print(call.callPrice)
```

```
10.098800586864485
```

Написаний метод Блека-Шоулза

```
ex1 = cBS(x0, k, r, x, sigma)
```

```
ex1.evalf(subs={x: T})
```

```
10.0988005868645
```

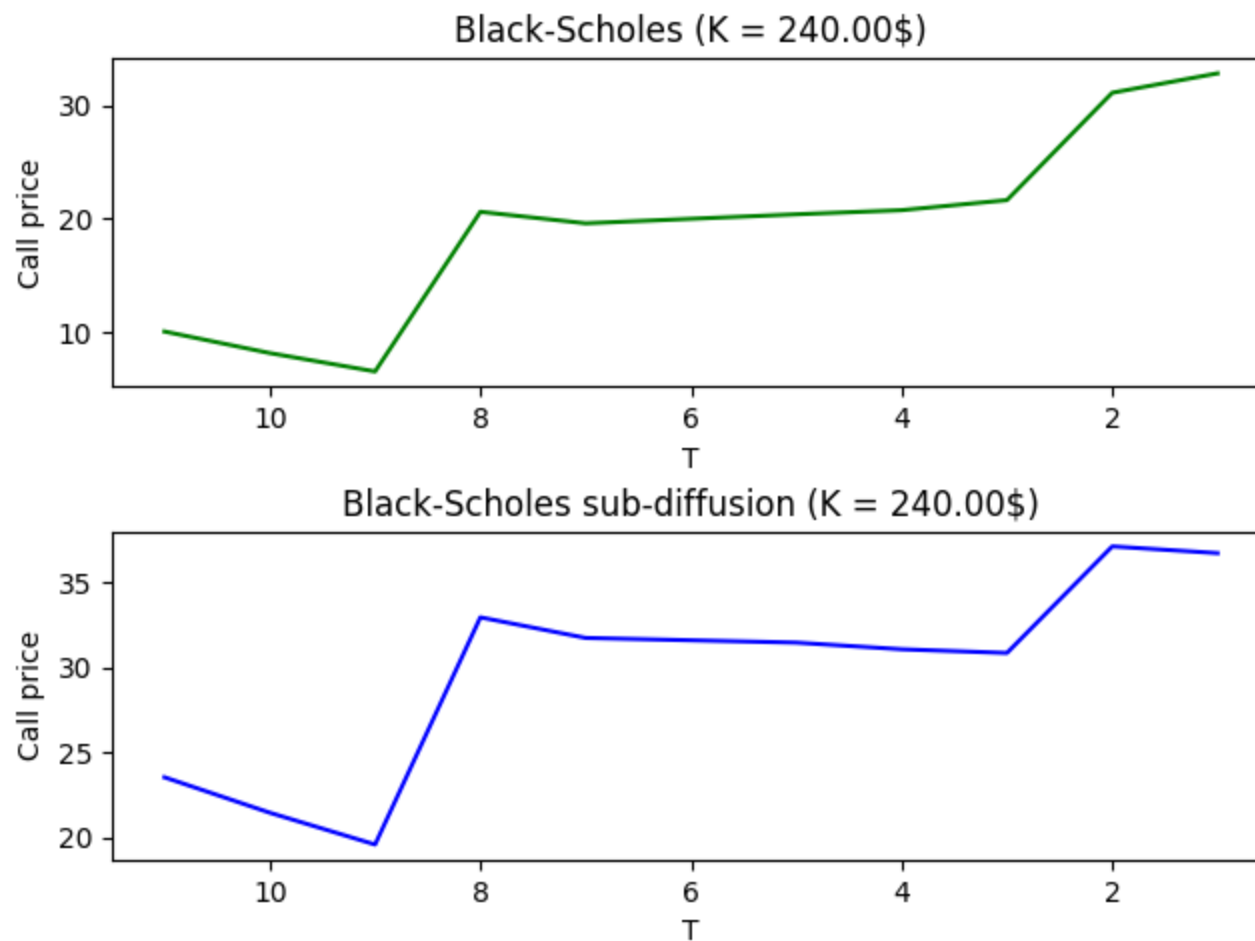
Справедлива ціна опціону у субдифузійній моделі при $\alpha = 1/2$

```
ex1 = subcBS(dataS.iat[i,1], K, r, x, sigma, T)
ex1.evalf()
```

```
23.5458720371733
```



- Дані отримані з сайту nasdaq.com (NVIDIA Corporation Common Stock)

Порівняння результируючих графіків



Висновки

1. За допомогою підходу Ейлера було аналітично знайдено дробові похідні для функцій: x^0 , x^1 . Закономірностей не було виявлено (візуалізація графіків в Python).
2. Для підходу Капуто було проілюстровано наближеним методом (формула М. Іштева) для функцій e^x , e^{2x} . Були виявлені закономірності (візуалізація графіків в WolframAlpha).
3. Підхід Рімана-Ліувілля було продемонстровано для **sin(x)** за допомогою бібліотеки Python.
4. Застосування дробового числення було продемонстровано на використанні підходу Рімана-Ліувілля у фінансовій математиці.
5. Для субдифузійної моделі фінансового ринку було записане фрактальне рівняння Фоккера-Планка і у частковому випадку було знайдено теоретичні ціни для порівняння та аналізу.



Дякую за увагу!