

ВЕЛИКОМАСШТАБНІ КРАЙОВІ ЗБУДЖЕННЯ НЕСТИСЛИВОЇ ЗАРЯДЖЕНОЇ РІДИНИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті зроблено огляд основних підходів у дослідженнях сильно скорельованої двовимірної електронної системи, яка, перебуваючи в сильному магнітному полі, має властивості нестисливої зарядженої рідини, а її квантові властивості проявляються на макроскопічному рівні у дробовому квантовому ефекті Холла. Особливу увагу приділено динаміці крайових збуджень нестисливої рідини. Проаналізовано розклади за параметром кулонівської нелокальності в інтегральних виразах для нормальної складової швидкості на контурі, що охоплює рідину, та отримано інтегровані рівняння з вищими похідними для локальної кривизни контуру.

Вступ

Відкриття спочатку цілочисельного [1], а потім дробового [2] квантового ефекту Холла стимулювало велику кількість експериментальних та теоретичних робіт, в яких досліджувалась колективна поведінка носіїв заряду (електронів або дірок) в сильному магнітному полі та при низьких температурах. Було виявлено, що плоска система електронів, у магнітному полі порядку $10 \div 30$ Тл та при температурі $T \sim 0,5\text{К} \div 5\text{К}$, є сильно скорельованою і веде себе як нестислива фермі-рідина. Її квантові властивості проявляються на макроскопічному рівні у дробовому квантуванні холлівської провідності та в особливостях транспортного опору при певних значеннях прикладеного магнітного поля.

В експериментах Д. Тсуї (D. Tsui), Х. Л. Штермера (H. L. Stormer) і А. Госсарда (A. Gossard) [2] досліджувалась холлівська провідність у гетероструктурах GaAs–Al_xGa_{1-x}As при температурах від 0,48К до 4,15К та магнітних полях від нуля до 10 Тл. При певних значеннях магнітного поля спостерігалось стрибкоподібне зростання холлівського опору на величину $\Delta R_H = \frac{3h}{e^2}$ та $\frac{3h}{2e^2}$.

У проміжках між цими значеннями опір R_H залишався незмінним (плато на кривій $R_H(B)$ на рис. 1), натомість транспортний опір R падав практично до нуля, як і у випадку цілочисельного квантового ефекту Холла.

У подальших дослідженнях на якісніших зразках і з більшою рухливістю носіїв заряду спостерігалися нові особливості холлівської провідності σ_H , а саме її стрибки на $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ та $\frac{7}{3}$ величини $\frac{e^2}{h}$. Спостерігалось також $\Delta\sigma_H = \frac{5e^2}{2h}$.

Сходинокоподібна залежність холлівської провідності від величини зовнішнього магнітного поля у вигляді $\sigma_H = \frac{q e^2}{p h}$, де q і p – взаємно прості числа, $p > q$, дістала назву дробового квантового ефекту Холла (FQHE).

Хоча цілочисельний та дробовий квантові ефекти Холла зовнішньо схожі, вони спостерігаються за неоднакових умов. Очевидно, фізична природа і відповідно теорії цих явищ різні. Для пояснення цілочисельного ефекту достатньо врахувати квантування орбіт окремих електронів у зовнішньому магнітному полі. Таку задачу розв'язав Л. Д. Ландау ще у 1930 році [3]. Запов-

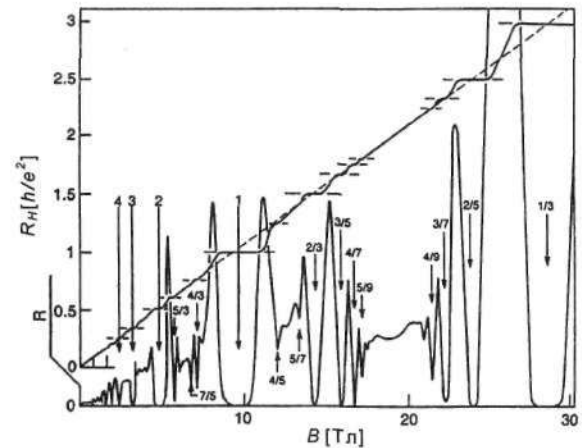


Рис. 1. Залежність холлівського опору R_H та опору провідності R від магнітного поля B . Опір вимірюється в одиницях $\frac{h}{e^2}$, магнітне поле B в Теслах. Числа на рисунку вказують на фактор заповнення рівнів Ландау, якому відповідає дана ділянка

Примітка. Рисунок взято зі статті Штермера (H. Stormer, Physica B 177, 401 (1992)).

нюючи «рівні Ландау» у відповідності з принципом Паулі й з урахуванням їх виродження, легко отримати формулу для холлівської провідності:

$$\sigma_H = \frac{ve^2}{h}, \quad (1)$$

де v – ціле число (фактор заповнення рівнів Ландау). Формула (1) пояснює цілочисельне квантування провідності.

Дробовий квантовий ефект Холла – явище суттєво багаточастинкове. Його фізична природа полягає в тому, що кулонівські сили відштовхування, сильне (стискує) магнітне поле та міжелектронні кореляції, обумовлені принципом Паулі, перетворюють електронний газ у квантову нестисливу рідину. Це новий стан матерії, відкритий Р. Лафліном [4, 5] та іншими [6] у 1983 р. При описі цього стану виявилася неефективною традиційна теорія фермі-рідини, яка розроблялася у 50-х роках і ґрунтувалася на концепції «слабовзаємодіючих квазічастинок» [7, 8]. Внаслідок сильної скорельованості і нестисливості у квантовій рідині Лафліна, на відміну від фермі-рідини Ландау, не можуть поширюватися лінійні звукові хвилі; збудження не можуть описуватися як газ слабовзаємодіючих квазічастинок. Усі ефекти в «об'ємі» нестисливої електронної рідини є суттєво нелінійними і мають певний енергетичний поріг. Повний спектр збуджень, а також фізичні властивості сильно скорельованої системи електронів у різних енергетичних станах залишаються нерозв'язаною задачею.

На сьогодні написано сотні статей, присвячених дробовому квантовому ефекту Холла та властивостям квантової рідини Лафліна. Очевидно, що ця проблема виходить далеко за межі нехай і фундаментального, та все ж часткового явища, яким є ефект Холла. Тут ми маємо справу із загальнофізичною проблемою, глибоке вивчення якої може дати ключ до розуміння багатьох загадкових явищ, таких як утримання кварків полями Янга-Міллса, поведінка матерії у сильних гравітаційних полях (в околі «чорних дірок»), виникнення нових фаз у квантово-польових системах тощо.

Оскільки, як зазначалось, квантова рідина Лафліна є нестисливою, важливу роль у формуванні її енергетичного спектру відіграють крайові збудження. Вперше на це звернув увагу Б. Гальперин, аналізуючи проблему аномально високої транспортної провідності в цілочисельному квантовому ефекті Холла. Він встановив, що крайові збудження є безщілинними і поводяться як квазіодновимірні (таку розмірність має «край» двовимірної електронної системи) фермі-рідина.

Спираючись на аргументацію, наведену в роботах [9, 10], Вен (Xiao-Gang Wen) показав [11, 12], що крайові збудження у випадку дробового ефекту Холла також є безщілинними. Але тепер це суттєво багаточастинкові утворення і вони не описуються стандартною теорією фермі-рідини.

На сьогодні актуальною залишається задача побудови ефективної теорії квантової нестисливої рідини Лафліна й опису на її основі об'ємних та безщілинних крайових збуджень. Під ефективною теорією розуміють квантово-польову теорію, характерним масштабом якої є так звана магнітна довжина $l_B = \sqrt{2hc/eB}$. У такій теорії мікроскопічні процеси на рівні електронів усереднені, але особливості квантового стану закладено в квантових операторах, середнє від яких дає густину квантової рідини, а флуктуації магнітного поля описуються полем Черна-Саймона [13, 14].

Паралельно з ефективною квантовою теорією логічно розвивати класичний магніто-гідродинамічний підхід, як це робиться в теорії надпровідності (аналіз великомасштабної поведінки на основі рідини Гінзбурга-Ландау) або у фізиці плазми. Умови застосовності гідродинамічного підходу вимагають додаткової аргументації і не завжди виконуються в реальних ситуаціях. Магніто-гідродинамічні міркування використовуються багатьма дослідниками. Спробу розвинути на їх основі теорію крайових збуджень зроблено в працях [15–17].

Наша публікація має на меті дати аналіз існуючих підходів до опису нестисливої зарядженої рідини Лафліна як нового стану матерії. Ми зосереджуємо увагу на проблемі великомасштабних (низькочастотних) крайових збуджень, які можна описати в магніто-гідродинамічному наближенні. Відповідно до поставленої задачі праця складається з двох частин. В першій частині (п. 1, 2) розглянуто різні підходи до опису N -частинкової електронної системи в магнітному полі. В другій частині на основі нелінійного рівняння з вищими похідними, яке описує локальну кривизну крайового контуру нестисливої зарядженої рідини, розвинуто гідродинамічну теорію крайових збуджень, отримано найпростіші деформації крайового контуру у випадку малих деформацій.

1. Хвильова функція Лафліна

У цьому пункті ми, наслідуючи Лафліна [4, 5], побудуємо багаточастинкову хвильову функцію системи N -електронів у сталому магнітному полі. На початку викладемо добре відомі результати про рух одного нерелятивістського електрона в однорідному магнітному полі. Значна величина магнітного поля дає змогу припустити, що спіни електронів паралельні магнітному полю, і розглядати лише один спіновий стан. Насправді через аномально малий g -фактор для електронів у GaAs ($\frac{1}{4}$ величини g -фактора вільного електрона) і малу ефективну масу енергія взаємодії спіна із зовнішнім магнітним полем близька за масштабом до енергії квазічастинок в аномальних холлівських станах при магнітних полях порядку 10 Тл. Отже не можна повністю виключити появи в

основному стані електронів зі спінами, орієнтованими проти магнітного поля [6]. Однак в наших дослідженнях ми виключаємо таку можливість.

Одноелектронна задача. Розглянемо квантову заряджену частинку (електрон), що рухається в площині $x-y$ у сталому однорідному магнітному полі $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. Одночастинковий гамільтоніан має вигляд:

$$H = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar \nabla}{i} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad (2)$$

де $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, m^* – ефективна маса електрона. Як зазначалось вище, поле \mathbf{B} вважається сильним і спін електрона орієнтується за напрямком поля. Енергія взаємодії спіна із зовнішнім магнітним полем $\frac{e\hbar g}{2m^*c} B_0$ є сталим доданком у повній енергії, який опущено у виразі (2).

Стационарне рівняння Шредингера запишемо лише для координатної частини хвильової функції:

$$H\Psi(x, y) = E\Psi(x, y). \quad (3)$$

Векторний потенціал \mathbf{A} у симетричній калибровці виберемо у вигляді:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}] = \frac{1}{2} B_0 (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y). \quad (4)$$

Він відрізняється від потенціалу Ландау [3] ($\mathbf{A} = (-B_0 y, 0, 0)$) на градієнт калибрувальної функції $\alpha(x, y) = -xy$. Підставивши потенціал (4) у гамільтоніан (2), матимемо:

$$H = \frac{1}{2m^*} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eB_0}{2c} y \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eB_0}{2c} x \right)^2 \right\}.$$

Поділимо праву та ліву частину рівняння (3) на величину $\frac{eB_0 \hbar}{m^* c} = \omega_0 \hbar$, де $\omega_0 = \frac{eB_0}{m^* c}$ – циклотронна частота, і перейдемо до безрозмірних координат

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{eB_0}{2\hbar c}} x, \quad \tilde{y} = \sqrt{\frac{eB_0}{2\hbar c}} y$$

і безрозмірної енергії: $\varepsilon = \frac{E}{\omega_0 \hbar}$. Величина $l_B = \sqrt{\frac{2\hbar c}{eB_0}}$

є характерним масштабом нашої системи і має назву магнітної довжини. Гамільтоніан (2) у безрозмірних координатах має вигляд:

$$\tilde{H} = \frac{1}{4} \left\{ - \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 2L \right\}, \quad (5)$$

де $L = \frac{1}{i} \left(\tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} - \tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)$ – оператор кутового моменту, який комутує з гамільтоніаном: $[\tilde{H}, L] = 0$.

Перейдемо до комплексних змінних: $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$, $\bar{z} = \tilde{x} - i\tilde{y}$ і перепишемо гамільтоніан (5) через оператори

$$a = \left(\frac{1}{2} z + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad a^+ = \left(\frac{1}{2} \bar{z} - \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

для яких $[a, a^+] = 1$. Легко обрахувати, що

$$\tilde{H} = a^+ a + \frac{1}{2}, \quad L = b^+ b - a^+ a,$$

де $b = \left(\frac{1}{2} \bar{z} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$, $b^+ = \left(\frac{1}{2} z - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$, $[b, b^+] = 1$.

Оператори a і b комутують між собою.

Знайдемо найнижчий (основний) стан оператора \tilde{H} з умови: $a\Psi_0 = 0$, $b\Psi_0 = 0$.

Очевидно, що

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{|z|^2}{2} \right).$$

Основний стан має нескінченну кратність виродження. Усі функції вигляду

$$\Psi_{0,m}(z, \bar{z}) = \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{|z|^2}{2} \right), \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad (6)$$

відповідають найнижчій енергії $E_0 = \frac{1}{2} \omega_0 \hbar$ і мають кутовий момент m , де m – ціле і додатне:

$$L\Psi_{0,m} = m\Psi_{0,m}.$$

Тобто виродження обумовлене обертовою симетрією системи.

Для енергій $E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \hbar$ хвильові функції мають вигляд:

$$\Psi_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{(b^+)^{n+m} (a^+)^n}{\sqrt{(n+m)!}} \Psi_0(z, \bar{z}), \quad (7)$$

де $n \geq 0$, а $m \geq -n$. Хвильова функція Ψ_{0m} дає розподіл імовірностей, який зосереджений на колі радіуса $r = l_B \sqrt{m+1}$. Щоб переконатися в цьому, обрахуємо середнє значення квадрата радіуса електронної орбіти:

$$\frac{1}{l_B^2} \langle \Psi_{0,m}, r^2 \Psi_{0,m} \rangle = \left\langle \Psi_0 \frac{(b^+)^m}{\sqrt{m!}}, \bar{z} z \frac{(b^+)^m}{\sqrt{m!}} \Psi_0 \right\rangle = m+1. \quad (8)$$

При обрахунку використано представлення: $\bar{z} z = (a+b^+)(a^+ + b) = aa^+ + b^+ a^+ + ab + b^+ b$; відмінний від нуля вклад у формулу (8) дає лише останній доданок.

Двочастинкова задача. Розглянемо два електрони в магнітному полі. Гамільтоніан квантової задачі має вигляд:

$$H = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar \nabla_1}{i} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_1 \right)^2 + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar \nabla_2}{i} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_2 \right)^2 + \frac{e^2}{r_{12}}. \quad (9)$$

Рівняння Шредингера з гамільтоніаном (2.9) допускає розділення руху на рух центру мас та внутрішній рух відносно центру мас:

$$R_{ч.м.} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \quad \vec{r}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

$$H_{\text{внутр.}} = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_a - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{e^2}{\sqrt{2}r_a}. \quad (10)$$

Перейдемо, як і в попередньому випадку, до безрозмірної енергії та безрозмірних комплексних координат:

$$z_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2), \quad z_{\text{ц.м.}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2).$$

Рівняння Шредингера з гамільтоніаном (10) будемо розв'язувати за теорією збурень, вважаючи енергію кулонівського відштовхування малою величиною. Справді, обраховуючи середнє

$$\left\langle \Psi_{0m}, \frac{1}{\tilde{r}_{12}} \Psi_{0m} \right\rangle = \frac{2}{m!} \int_0^\infty r^{2m} e^{-r^2} dr = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \sqrt{\pi},$$

бачимо, що при великих m ця величина веде себе як $\sim \frac{1}{\sqrt{m}}$ (така оцінка випливає з формули Стірлінга: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ при $n \rightarrow \infty$).

Тепер двочастинкові хвильові функції основного стану в нульовому наближенні мають вигляд:

$$\Psi_{0,m}(z_1, z_2) = \frac{1}{\sqrt{m!}} (z_1 - z_2)^m \exp\left(-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)\right). \quad (11)$$

(Тут враховано той факт, що в системі центру мас $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.)

Енергія основного стану гамільтоніану $\tilde{H}_{\text{внутр.}}$ має вигляд:

$$\tilde{H}_{\text{внутр.}} \Psi_{0m} = \left(\varepsilon_m + \frac{1}{2} \right) \Psi_{0m},$$

де $\varepsilon_m = \frac{2e^2 m l_B}{\hbar^2} \langle \Psi_{0m} | \tilde{r}^{-1} | \Psi_{0m} \rangle$ – безрозмірна енергія кулонівського відштовхування. Окрім того, числа m є непарними, щоб функція (11) була антисиметричною при перестановках частинок.

***N*-частинкова функція Лафліна та її власливості.** Розглянемо тричастинкову задачу у площині. Нехай z_1, z_2, z_3 – безрозмірні координати трьох частинок. Введемо нові координати:

$$z_{\text{ц.м.}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(z_1 + z_2 + z_3), \quad z_a = \frac{1}{\sqrt{6}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}z_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}z_3, \\ z_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2).$$

Легко перевірити, що перетворення від координат z_1, z_2, z_3 до $z_{\text{ц.м.}}, z_a, z_b$ є ортогональним. У нових координатах тричастинковий гамільтоніан має вигляд:

$$H_{\text{внутр.}} = \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_a - \frac{e}{c} \mathbf{A}_a \right)^2 + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_b - \frac{e}{c} \mathbf{A}_b \right)^2 + \frac{e^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{|z_a|} + \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} z_a - \frac{1}{2} z_b \right|} + \frac{1}{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} z_a + \frac{1}{2} z_b \right|} \right).$$

Цей гамільтоніан, окрім симетрії обертання у кожній з площин z_a та z_b , має дискретну симетрію стосовно поворотів на кут 120° у площині z_a, z_b . Ця симетрія, доповнена інверсією змінної z_b , породжує всю групу перестановок S_3 , оскільки $S_3 = C_3 + (1,2)C_3$, де (1, 2) означає перестановку частинок 1 і 2. Беручи до уваги цей факт і вимогу антисиметрії хвильової функції стосовно перестановки будь-якої пари частинок, Лафлін [4] запропонував тричастинкову функцію у вигляді:

$$\Psi_{nm} = C(n, m) \frac{1}{2i} \left[(z_a + iz_b)^{3m} - (z_a - iz_b)^{3m} \right] \times \\ \times (z_a^2 - z_b^2)^n \exp\left(-\frac{1}{2}(|z_a|^2 + |z_b|^2)\right).$$

У координатах z_1, z_2, z_3 хвильова функція основного стану Ψ_{0m} приводиться до вигляду:

$$\Psi_{0m} = C(m) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |z_j|^2\right). \quad (12)$$

Для забезпечення антисиметрії m повинно бути непарним.

Хвильова функція Ψ_{nm} є власною функцією оператора повного кутового моменту

$$L = \sum_{k=1}^3 (b_k^+ b_k - a_k^+ a_k)$$

з власним значенням $l = 3m + 2n$.

Формулу (12) неважко узагальнити на довільне число частинок:

$$\Psi_{0m} = C(m) \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right). \quad (13)$$

Це і є хвильова функція Лафліна для основного стану системи N електронів у магнітному полі. Вона є власною функцією оператора повного кутового моменту з власним значенням $l = m \frac{N(N-1)}{2}$.

Перебуваючи в стані з фіксованим кутовим моментом, електрони заповнюють диск площею $\pi R_m^2 = \pi m N l_B^2 = 2\pi m N \frac{\hbar c}{eB}$. Очевидно, тоді густина електронів $\bar{n} = \frac{eB}{m\hbar c}$, а холлівська провідність, обрахована за класичною формулою

$$\sigma_H = \frac{\bar{n} e c}{B} = \frac{1}{m} \frac{e^2}{h}, \quad m = 2k + 1, \quad (14)$$

має плато (не залежить від B) при значеннях

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \frac{e^2}{h}, \quad \frac{1}{5} \frac{e^2}{h}, \quad \dots$$

2. Представлення вторинного квантування для системи електронів у магнітному полі

У цьому пункті ми розглянемо квантову N -електронну двовимірну систему в представленні вторинного квантування, або іншими словами, будемо описувати електрони в магнітному полі

квантовими фермі-операторами. Як буде показано далі, середні значення електронної густини зосереджено в диску, радіус якого визначається кутовим моментом системи. На краю диска, де електронна густина зазнає змін, виникає певна густина струму. Середню густину струму та електронну густину неважко розрахувати для цілочисельного квантового ефекту Холла. Якщо стан системи описується функцією Лафліна з параметром $m > 1$, що відповідає дробовому квантовому ефекту Холла, обрахунки спостережуваних величин суттєво ускладнюються.

Поставимо у відповідність з одночастинковими хвильовими функціями Лафліна

$$\Psi_{nm}(\mathbf{r}) = \frac{(b^\dagger)^{m+n} (a^\dagger)^n}{\sqrt{(m+n)!} \sqrt{n!}} \Psi_0(\mathbf{r})$$

операторне поле

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{\infty} C_m^{(n)} \Psi_{nm}(\mathbf{r}) \exp\left(-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right), \quad (15)$$

де коефіцієнтами $C_m^{(n)}$ є фермі-оператори, що задовольняють антикомутаційним співвідношенням:

$$\{C_k^{(n)}, C_m^{(p)\dagger}\} = \delta_{np} \delta_{km}.$$

Поле (15) еволюціонує згідно з рівняннями Гайзенберга та гамільтоніаном

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} \int (D_i \hat{\Psi})^\dagger (D_i \hat{\Psi}) d^2x - \frac{eB}{2m^*} \int \hat{\rho}(\mathbf{r}, t) d^2x, \quad (16)$$

де $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{e}{c} A_i$, а $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ – оператор густини частинок. Другий доданок у гамільтоніані (16) відповідає енергії взаємодії всіх N -спінів із зовнішнім магнітним полем. Нагадаємо, що спіни орієнтовані вздовж поля.

Якщо електронна система перебуває в основному стані ($n = 0$), то достатньо розглянути оператори поля в статичному режимі:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(0)} \Psi_{0m}(\mathbf{r}).$$

Покладемо надалі $C_m^{(0)} \equiv C_m$. Оскільки $a \Psi_{0m} = 0$, то поле $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ задовольняє рівнянню:

$$(D_1 + iD_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = 0,$$

яке називають рівнянням самодуальності.

Нехай $|0\rangle$ – вакуумний вектор для операторів

C_m , $C_m |0\rangle = 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Тоді N -частинковий стан $|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle$ має вигляд

$$|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle = C_{m_1}^\dagger C_{m_2}^\dagger \dots C_{m_N}^\dagger |0\rangle. \quad (17)$$

Відповідна N -частинкова хвильова функція є детермінантом Слетера:

$$\Psi_{[m_1, m_2, \dots, m_N]}(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0 | \Psi(z_1) \Psi(z_2) \dots \Psi(z_N) | 0 \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_{m_1}(z_1) & \Psi_{m_2}(z_1) & \dots & \Psi_{m_N}(z_1) \\ \Psi_{m_1}(z_2) & \Psi_{m_2}(z_2) & \dots & \Psi_{m_N}(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{m_1}(z_N) & \Psi_{m_2}(z_N) & \dots & \Psi_{m_N}(z_N) \end{vmatrix}.$$

(Тут ми перейшли до комплексних координат $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$.)

Зауважимо, що хвильова функція Лафліна факторизується (представляється детермінантом Слетера) лише при $m = 1$, тобто в режимі цілочисельного квантового ефекту Холла. Для отримання такої функції у формулі (17) слід покласти $m_1 = N - 1$, $m_2 = N - 2, \dots, m_N = 0$. Ця хвильова функція відповідає стану

$$|\Omega\rangle = |N - 1, N - 2, \dots, 0\rangle \quad (18)$$

з найнижчим значенням кутового моменту:

$$l = \frac{1}{2} N(N - 1).$$

Оскільки функції вигляду (17) формують повний базис у просторі Фока, то функцію Лафліна з довільним m можна подати як суперпозицію детермінантів Слетера.

Неважко обрахувати середню густину електронів, якщо система перебуває у стані $|\Omega\rangle$

$$\bar{\rho}(r) = \langle \Omega | \hat{\rho}(r) | \Omega \rangle = \frac{1}{l^2 \pi} \exp\left(-\frac{r^2}{l^2}\right) \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left(\frac{r}{l}\right)^{2l}. \quad (19)$$

Ряд у правій частині формули (19) є неповною експонентою від $\frac{r^2}{l^2}$. Тому $\bar{\rho}(r) = \text{const}$ для $r \ll l\sqrt{N}$. Залежність середньої густини $\bar{\rho}$, вираженої в одиницях $1/l^2$, від безрозмірної радіальної змінної r/l при $N = 50$ показано на рис. 2.

Оператор струму має вигляд:

$$\hat{j}_k = \frac{1}{2im^*} \left\{ \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) D_i \hat{\Psi} - (D_i \hat{\Psi}(\mathbf{r}))^\dagger \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (20)$$

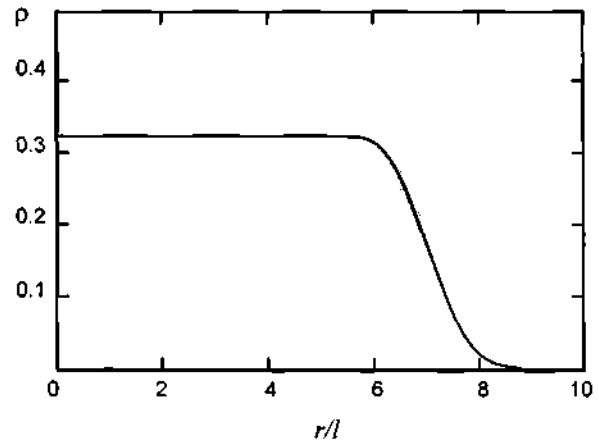


Рис. 2. Залежність середньої густини $\bar{\rho}$ від радіальної змінної r

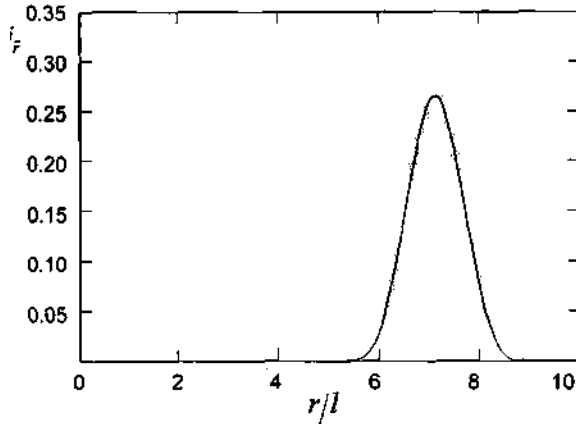


Рис. 3. Розподіл радіальної компоненти середнього струму

Якщо використати рівняння (19) і очевидну рівність

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\rho} = \hat{\Psi}^* D_i \hat{\Psi} + (D_i \hat{\Psi})^* \hat{\Psi},$$

то отримаємо співвідношення

$$\langle \Omega | \hat{j}_k | \Omega \rangle = -\frac{1}{2m^*} \varepsilon^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \Omega | \hat{\rho} | \Omega \rangle, \quad (21)$$

де $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$. З формули (21) видно, що струм зосереджений там, де густина зазнає зміни, тобто на границі області, яку займає електронна густина. Розподіл радіальної компоненти середнього струму показано на рис. 3. Струм вимірюється в одиницях $-\frac{1}{2m^* e^2}$.

3. Крайові збудження: магнітогідродинамічний підхід

На краю диска, де електронна густина зазнає змін, виникають безщілинні збудження, спектр частоти яких має вигляд:

$$\omega(k) = \frac{2\bar{n}e^2}{\varepsilon m^* \omega_0} k \ln \left(\frac{e^{-\gamma}}{2|kd|} \right), \quad (22)$$

де d – ширина смуги на краю диска, в якій виникають збудження, \bar{n} – середня густина електронної рідини в середині диска, ε – діелектрична проникність, $\gamma = 0,577\dots$ – стала Ейлера. Збудження зі спектром вигляду (22) називають крайовими магнітоплазмонами. Вперше він був отриманий у роботі [14] в рамках магнітогідродинамічної теорії двовимірної плазми. Цей результат був повторений у роботах [15, 16, 19].

У загальному випадку спектр крайових збуджень залежить від квантового стану, в якому перебуває електронна система. Спектр (16) відповідає ситуації, коли система перебуває в основному стані з

мінімальним кутовим моментом. При цьому середня густина електронів визначається: $\bar{n} = \frac{eB}{mhc}$.

Інші типи крайових збуджень розглянуто в роботах [12,19]. У цих роботах електрони в магнітному полі розглядаються як квантово-польова система.

Найпростішим шляхом до розуміння динаміки крайових збуджень нестисливої електронної рідини Лафліна є гідродинамічний підхід. Очевидно, що цей підхід не може бути повним, оскільки масштаби гідродинаміки не охоплюють усіх деталей квантового руху. Окрім того, гідродинамічні рівняння містять феноменологічні параметри, природа яких може бути виявлена лише при квантово-польовому розгляді.

Гідродинаміка двовимірної електронної рідини в магнітному полі. Підхід, що викладений нижче, запропоновано в роботах [20–22]. Нехай $\rho(\mathbf{r}, t)$ – розподіл електронної густини на площині, $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ – поле швидкості. Будемо вважати електронну рідину нестисливою і нев'язкою. Гідродинамічні рівняння (рівняння Ейлера) для такої рідини у магнітному полі $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ матимуть вигляд:

$$\dot{\mathbf{V}} = \omega_0 [\mathbf{V}; \mathbf{e}_3] - \frac{e^2}{m^*} \bar{\nabla} \int d^2 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (23)$$

де $\omega_0 = \frac{eB}{m^* c}$. У першому рівнянні величина m^* відрізняється від ефективної маси електрона на діелектричну сталу середовища: $m^* = m_e^* \varepsilon$.

Нехай у початковий момент часу рідина має форму краплі (див. рис. 2), яка рівномірно обертається з певною кутовою швидкістю. Стационарне поле швидкостей легко отримати, якщо праву частину рівняння (23) помножити векторно на \mathbf{e}_3 . Використавши правило $[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, будемо мати:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \frac{e^2}{m^* \omega_0} [\mathbf{e}_3, \bar{\nabla}] \int d^2 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} = \\ &= \frac{e^2}{m^* \omega_0} \int d^2 r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ((y - y') \mathbf{e}_1 - (x - x') \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Легко перевірити, що $\text{div } \mathbf{V} = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 = 0$, тобто умова нестисливості виконується.

Для визначення швидкості на контурі, що охоплює нестисливу рідину, перейдемо в (24) від інтегралу по площі до інтегралу по контуру. При цьому врахуємо, що $\rho(\mathbf{r})$ є сталою величиною в об'ємі. Отримаємо формулу [22]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{e^2 \bar{\rho}}{m^* \omega_0} \oint ds' \frac{\mathbf{t}(s')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(s')|}, \quad (25)$$

де $\mathbf{t}(s')$ – одиничний вектор, дотичний до контуру, $\bar{\rho}$ – середня густина в об'ємі. Якщо s – нату-

ральный параметр на контурі (довжина дуги кривої), то $\mathbf{t}(s') = \frac{\partial \mathbf{r}(s')}{\partial s'}$. У загальному випадку довільної параметризації $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha)$ маємо:

$$\mathbf{t}(\alpha) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha)}{\partial \alpha} \right|^{-1} \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Інтеграл (25) слід розуміти в сенсі головного значення.

Для доведення рівності (25) розглянемо контурний інтеграл

$$\oint \left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}^{-1/2} \left(\frac{dy}{ds} \pm \frac{dx}{ds} \right) ds. \quad (26)$$

За формулою Гріна цей інтеграл дорівнює інтегралу по області, що охоплюється контуром, від функції

$$-\left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}^{-3/2} \left((x-x') \mp (y-y') \right).$$

Утворюючи півсуму та піврізницю виразів (26) (відповідно зі знаками «+» та «-»), легко довести рівність (25).

Надалі вважатимемо, що $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t)$ є радіусом-вектором точки на контурі. Тоді рівняння

$$\dot{\mathbf{r}}(s, t) = \frac{e\bar{\rho}}{m^* \omega_0} \oint ds' \frac{\mathbf{t}(s', t)}{|\mathbf{r}(s, t) - \mathbf{r}(s', t)|} \quad (27)$$

буде основним рівнянням контурної динаміки нестисливої рідини. Умову нестисливості можна перевірити безпосередньо для швидкості, що виражена формулою (27). Вираз $\text{div } \mathbf{V} = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2$ зводиться до інтегралу по замкненому контуру від повної похідної і тому щезає:

$$\text{div } \mathbf{V} \sim \oint \frac{d}{ds'} \left\{ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right\}^{-1/2} ds' = 0.$$

Рівняння (27) є інтегро-диференціальне, тому досліджувати його розв'язки досить важко. Основна ідея, запропонована в роботах [20, 21] полягає в отриманні наближеного диференціального рівняння контурної динаміки.

Геометрична динаміка замкнених контурів на площині. Розглянемо в площині замкнений контур, який міняє свою конфігурацію з плином часу. Нехай $\mathbf{r}(s, t)$ – точка на контурі в природній параметризації (s – довжина дуги, яка відраховується від деякої фіксованої точки на контурі). Нехай: $\mathbf{t}(s, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(s, t)}{\partial s}$ – нормований дотичний вектор, $\mathbf{n}(s, t) = [\mathbf{t}(s, t), \mathbf{e}_3]$ – вектор нормалі. Вектори $\mathbf{t}(s, t)$ і $\mathbf{n}(s, t)$ утворюють рухомий репер на контурі. Між ними існують певні кінематичні співвідношення, які задаються формулами Френе [23]:

$$\frac{\partial \mathbf{t}(s, t)}{\partial s} = -k(s, t) \mathbf{n}(s, t), \quad \frac{\partial \mathbf{n}(s, t)}{\partial s} = k(s, t) \mathbf{t}(s, t), \quad (28)$$

де величина $k(s, t) = -\left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2} \right\rangle$ – кривизна плоскої кривої в точці s у момент часу t . Надалі ця

динамічна змінна буде основним об'єктом нашого розгляду.

Нехай, як і раніше, $\mathbf{V}(s, t) = \dot{\mathbf{r}}(s, t)$ – швидкість точки на контурі. Її можна розкласти по базису рухомого репера

$$\mathbf{V}(s, t) = U(s, t) \mathbf{n} + W(s, t) \mathbf{t}. \quad (29)$$

Параметризація контуру може бути довільною. Нехай α – певний параметр вздовж кривої. Тоді зміна параметризації відіграє роль калібрувального перетворення. Якщо контур у будь-який момент задано у вигляді відображення відрізка $[0, 1]$, $0 \leq \alpha \leq 1$ у площину, то натуральний параметр s обчислюється за формулою:

$$s(\alpha, t) = \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{\partial x(\alpha', t)}{\partial \alpha'} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(\alpha', t)}{\partial \alpha'} \right)^2} d\alpha'.$$

Покладемо

$$g(\alpha, t) = \left(\frac{\partial x(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(\alpha, t)}{\partial \alpha} \right)^2.$$

Тоді $\mathbf{t}(\alpha, t) = g^{-1/2} \boldsymbol{\tau}(\alpha, t)$, $\boldsymbol{\tau}(\alpha, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(\alpha, t)}{\partial \alpha}$.

Виділимо клас параметризації (калібрувань), для яких

$$\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right\rangle = 0. \quad (30)$$

Це так звані поперечні, або ортогональні калібрування. Оскільки $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \sim \mathbf{t}$, то за виконання умови

(30) матимемо:

$$\mathbf{V}(\alpha, t) = U(\alpha, t) \mathbf{n}.$$

Розглянемо контур $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha, t)$ у комплексній площині: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{z} = x + iy$. Нехай калібрування буде поперечним. Виберемо початкову точку на контурі так, щоб у ній $\mathbf{t} = (1, 0)$. В комплексних позначеннях $\mathbf{t} = e^{i\theta(z)}$, де кут $\theta(z)$ визначає нахил вектора \mathbf{t} до осі Ox . Очевидно, що

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \alpha} = \boldsymbol{\tau} = \sqrt{g} e^{i\theta(z)}, \quad \mathbf{n} = -i e^{i\theta(z)},$$

звідки

$$k(s, t) = \frac{\partial \theta(\mathbf{z})}{\partial s}. \quad (31)$$

Як зазначалось вище, в ортогональному калібруванні $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{n}U$. Продиференціюємо праву та ліву частини цієї рівності по α . Зліва матимемо:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d}{dt} \left(g^{1/2} \mathbf{t} \right) = \frac{1}{2} g^{-1/2} \dot{g} \mathbf{t} + g^{1/2} \dot{\mathbf{t}},$$

а справа:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{n}U) = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{n}U) g^{1/2} = g^{1/2} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} U + \mathbf{n} \frac{\partial U}{\partial s} \right).$$

Перейшовши до комплексних змінних і порівнявши праву та ліву частини, отримаємо співвідношення:

$$\dot{g} = 2gkU, \quad \dot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial s}.$$

Тепер можна знайти диференціальне рівняння на кривизну, якщо продиференціювати (4.9) за змінною t . Але при цьому необхідно використати комутаційні співвідношення між похідними $\frac{d}{dt}$ та $\frac{\partial}{\partial s}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left(g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) = -\frac{1}{2} \dot{g} g^{-3/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{d}{dt}.$$

Використавши формулу $\dot{g} = 2gkU$, матимемо:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{d}{dt} = -kU \frac{\partial}{\partial s}. \quad (32)$$

Таким чином:

$$\frac{dk(s,t)}{dt} = -\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) U(k, k_s, k_{ss}, \dots).$$

Але $\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial s} \int_0^s kU ds'$, тому остаточне рівняння динаміки контуру має вигляд:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) U - \frac{\partial k}{\partial s} \int_0^s kU ds'. \quad (33)$$

Це рівняння можна трохи узагальнити, зробивши заміну $s \rightarrow s - W(0)t$. Тоді (33) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\left(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) U + \frac{\partial k}{\partial s} W - \frac{\partial k}{\partial s} \int_0^s \left[kU + \frac{\partial W}{\partial s'} \right] ds'. \quad (34)$$

Очевидно, параметр $W(0)$ має сенс тангенціальної складової швидкості у початковий момент часу.

Рівняння (34) не є замкнутим, оскільки функції U та W невідомі в загальному випадку. Воно, як і рівняння (27), інтегро-диференціальне. Але, як буде показано далі, у певному наближенні його можна звести до інтегровного рівняння з вищими похідними.

Інтегровна динаміка замкнених контурів, які зберігають площу. Позначимо через P – периметр замкненої кривої на площині, а через A – площу області, яку ця крива охоплює:

$$P = \oint_{\partial P} ds, \quad A = \int_D dx dy.$$

Зведемо другий інтеграл до інтегралу по замкненому контуру, скориставшись формулою Гріна:

$$\int_D dx dy = \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint (P dx - Q dy),$$

де $Q = \frac{1}{2} x$, $P = -\frac{1}{2} y$. Тоді

$$A = -\frac{1}{2} \oint y dx - x dy = \frac{1}{2} \oint ([r, r_s] e_s) ds.$$

Обрахуємо похідні по часу від периметра та площі:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{1/2} g^{1/2} d\alpha = \oint kU ds, \quad (35)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \oint (V_x dy - V_y dx) = \oint U ds. \quad (36)$$

Ми будемо цікавитися динамікою контурів, для яких

$$\frac{d}{dt} A = 0 \Rightarrow \oint U ds = 0. \quad (37)$$

Це умова нестисливості рідини, яка міститься всередині контуру. Обмеження (37) на функцію U відіграватимуть важливу роль для спрощення рівняння (34).

Знайдемо наближене рівняння контурної динаміки. Очевидно, що в інтеграл (27) основний вклад дають точки s' , близькі до s . Розкладемо підінтегральний вираз (27) у ряд за степенями «малого» параметра $\Delta = s' - s$, $|\Delta| \leq \Lambda$. Легко знайти, що

$$\begin{aligned} t(s') &\cong t(s) \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} k^2 - \frac{\Delta^3}{2} k k_s + \dots \right) + n(s) \times \\ &\times \left(-\Delta k - \frac{\Delta^2}{2} k_s + \frac{\Delta^3}{6} (k^3 - k_{ss}) + \frac{\Delta^4}{24} (6k^2 k_s - k_{sss}) \right), \\ r(s') - r(s) &\cong t(s) \left(\Delta - \frac{\Delta^3}{6} k^2 - \frac{\Delta^4}{8} k k_s + \dots \right) + \\ &+ n(s) \left(-\frac{\Delta^2}{2} k - \frac{\Delta^3}{6} k_s + \frac{1}{24} \Delta^4 (k^3 - k_{ss}) + \dots \right), \end{aligned}$$

$$[r(s') - r(s)]^{-1} = |\Delta|^{-1} \left\{ 1 + \frac{\Delta^2}{12} k^3 + \frac{\Delta^3}{8} k k_s \right\} \left\{ 1 + \frac{\Delta^2}{12} k^3 + \dots \right\}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (27), отримаємо наближену інтегральну форму для функції $U(k, K_s, \dots)$

$$\begin{aligned} U &= \frac{e\bar{p}}{m^* \omega_0} \left\{ \int_s^{s+1/2\Lambda} - \int_{s-1/2\Lambda}^s \left(-k - \frac{\Delta}{2} k_s + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\Delta^2}{6} (k^3 - k_{ss}) + \dots \right) ds' \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Як видно з формули (38), доданки з парними степенями Δ дають нульовий вклад у функцію U , а доданки степені Δ^{2n-1} після інтегрування стають пропорційними до Λ^{2n} . Тобто:

$$U = U^{(0)} + U^{(2)} + U^{(4)} + \dots,$$

де

$$U^{(0)} = 0, \quad U^{(2)} = -\frac{\bar{p}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^2}{8} k_s,$$

$$U^{(4)} = \frac{\bar{p}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^4}{96} (6k^2 k_s - k_{sss}). \quad (39)$$

Кожна з отриманих функцій є повною похідною і тому задовольняє умові нестисливості. Підставляючи ці вирази у рівняння (34), отримаємо замкнені рівняння для кривизни. В нульовому порядку ми отримаємо лінійне рівняння:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = W(0) k_s, \quad (40)$$

у другому порядку – модифіковане рівняння КдВ:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\bar{\rho}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^2}{8} \left(\frac{3}{2} k^2 k_s + k_{sss} \right). \quad (41)$$

У четвертому порядку – рівняння з похідними 5-го порядку:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{\bar{\rho}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^4}{96} \left(k_{sssss} + \frac{15}{8} k^4 k_s + \frac{5}{2} k_s^3 + \frac{5}{2} k^2 k_{sss} \right). \quad (42)$$

Як було зауважено вище, непарні порядки відсутні.

Очевидно, що лінеаризоване рівняння (41) в сумі з рівнянням (40) дає закон дисперсії

$$\omega(q) = W(0)q - \frac{\bar{\rho}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^2}{8} q^3. \quad (43)$$

Періодичні однофазні розв'язки рівняння МКДВ. У цьому пункті ми отримаємо явні розв'язки рівняння (41) в термінах еліптичних функцій Якобі.

Змінивши масштаб часу $t \rightarrow \tau = t \frac{\bar{\rho}e^2}{m^* \omega_0} \frac{\Lambda^2}{8}$,

приведемо рівняння (41) до стандартного вигляду:

$$k_t = \frac{3}{2} k^2 k_s + k_{sss}. \quad (44)$$

Будемо шукати однофазні розв'язки рівняння (44), тобто розв'язки вигляду

$$k(s, t) = k(s - vt).$$

Покладемо $s - vt = z$. Тоді рівняння (44) можна переписати у вигляді звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$k_{zz} = -vk - \frac{1}{2} k^3 + a. \quad (45)$$

Це рівняння коливань нелінійного осцилятора. Для рівняння (45) виконується закон збереження енергії

$$\frac{1}{2} (k_z)^2 = -\frac{k^4}{8} - \frac{vk^2}{2} + ak + E. \quad (46)$$

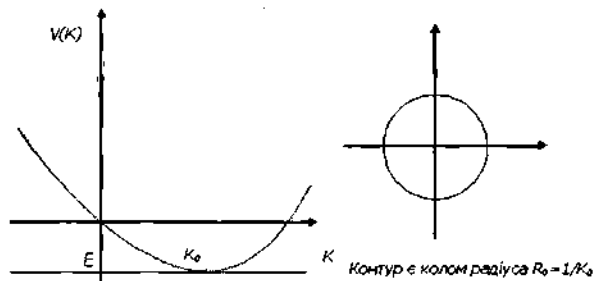
Тому загальний розв'язок дається інтегралом обернення

$$z - z_0 = \pm \int_{k(z_0)}^{k(z)} \frac{dk'}{\sqrt{2(E - V(k'))}}, \quad (47)$$

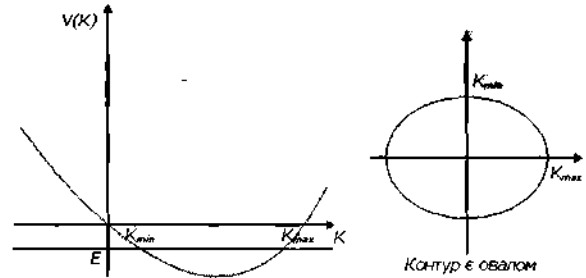
де $V(k) = \frac{k^4}{8} + \frac{vk^2}{2} - ak$ – потенціальна енергія.

Обернення інтеграла (47) дається в еліптичних функціях. Залежно від значень, яких можуть набувати параметри v , a та E , можливі випадки, зображені на рисунках:

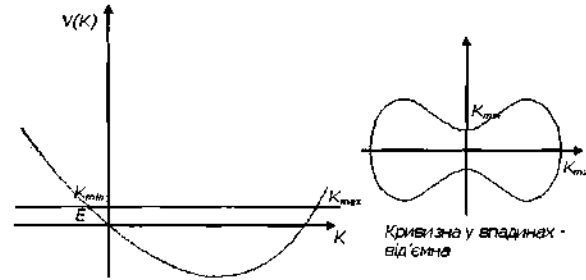
Випадок 1



Випадок 2



Випадок 3



Рівняння $-\frac{k^4}{8} - \frac{vk^2}{2} + ak + E = 0$ має два дійс-

них (K_{\min} та K_{\max}) та два уявних комплексно спряжених корені ($m + in, m - in$). В загальному випадку розв'язок рівняння (46) можна записати як:

$$k(z) = \frac{\alpha \operatorname{sn}(z, \lambda) + \gamma}{\beta \operatorname{cn}(z, \lambda) + \delta}, \quad (48)$$

де $\operatorname{sn}(z, \lambda)$ – еліптична функція Якобі, λ – модуль еліптичної функції, $\gamma, \delta, \beta, \alpha$ – константи, які визначаються з рівняння (46).

Згідно з формулою (31) кут між дотичними векторами в точках s_0 та s виражається через інтеграл

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(s') ds'. \quad (49)$$

Розв'язки (48) є періодичними функціями s з періодом $2\Pi(\lambda)$, де

$$\Pi(\lambda) = \int_{K_{\min}}^{K_{\max}} \frac{dk'}{\sqrt{2(E - V(k'))}}.$$

Узгодження періодичності функції $k(s)$ з умовою замкнутості контуру дає співвідношення

$$\int_{s_0}^{s_0 + 2j\Pi(\lambda)} k(s') ds' = \theta(s_0 + 2j\Pi(\lambda)) = 2\pi, \quad (50)$$

де $j = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, що результуюча крива має дискретну симетрію і є інваріантною стосовно обертань на кут $2\pi/j$. Таким чином, форма кривої визначається симетрією деформацій контуру C_j і значеннями K_{\min} та K_{\max} .

Складніші деформації контуру описуються багатофазними розв'язками рівнянь (41, 42).

4. Висновки

У статті зроблено огляд основних підходів до вивчення сильно скорельованої двовимірної електронної системи, яка перебуває у магнітному полі, - квантово-механічного, квантово-польового та гідродинамічного.

Квантово-механічний підхід дає уявлення про основний стан електронної системи та про квантування відстаней між електронами, наслідком чого є нестисливість електронної рідини при її гідродинамічному описі.

Квантово-польовий підхід дає можливість описати розподіл середньої густини електронів, флуктуа-

ції густини та струму, дає правильну статистику крайових збуджень.

Основну увагу в роботі приділено динаміці крайових збуджень нестисливої рідини Лафліна в гідродинамічному наближенні. Подано розклади за параметром нелокальності виразів для нормальної складової швидкості на контурі, який охоплює нестисливу рідину. Знайдено поправку четвертого порядку до рівняння динаміки контуру й показано, що ця поправка веде до модифікованого рівняння КдВ з вищими похідними.

Відповідно до праці [23] надано якісний аналіз однофазних розв'язків рівняння МКдВ і їхнього застосування до динаміки контурів.

1. *Klitzing K. фон, Dorda G., Pepper M.* Новый метод очень точного измерения постоянной тонкой структуры, основанный на измерении квантового холловского сопротивления // Сб. НФТТ, вып. 12 «Квантовый эффект Холла». - М., 1986. - С. 10-17. Пер. статьи: *Klitzing K. v., Dorda G., Pepper M.* - Phys. Rev. Lett., v. 45, № 6 (1980), p. 494.
2. *Tsui D., Stormer H. L., Gossard A. C.* Двумерная магнитопроводимость в ультраквантовом пределе // Сб. НФТТ, вып. 12 «Квантовой эффект Холла». - М., 1986. Пер. статьи: *Tsui D. C., Stormer H. L., Gossard A. C.* - Phys. Rev. Lett., v. 48, № 22 (1982), p. 1559.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. - М.: Наука, 1989.
4. *Лафлин Р.* Квантовое движение трех двумерных электронов в сильном магнитном поле // Сб. НФТТ, вып. 12 «Квантовой эффект Холла». - М., 1986. - С. 185-197. Пер. статьи: *Laughlin R. B.* - Phys. Rev. B, v. 27, № 6 (1983), p. 3383.
5. *Лафлин Р.* Аномальный квантовый эффект Холла; несжимаемая квантовая жидкость с дробным зарядом возбуждений // Сб. НФТТ, вып. 12 «Квантовой эффект Холла». - М., 1986. - С. 198-206. Пер. статьи: *R. B. Laughlin* - Phys. Rev. Lett., v. 50, № 10 (1983), p. 1395.
6. *Гальперин Б.* Теория квантовой холловской проводимости // Сб. НФТТ, вып. 12 «Квантовой эффект Холла». - М., 1986. - С. 207-231. Пер. статьи: *Halperin B. I.* - Helvetica Physica Acta, v. 56 (1983), p. 75.
7. *Ландау Л. Д.* Теория ферми-жидкости. - ЖЭТФ 30 (1956), с. 1058. (*Ландау Л. Д.* Собрание трудов. Т. 2, с. 328-336.)
8. *Ландау Л. Д.* Колебания ферми-жидкости. - ЖЭТФ 32 (1957), с. 59. (*Ландау Л. Д.* Собрание трудов. Т. 2, с. 337-348).
9. *Halperin B. I.* Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential. - Phys. Rev. B, v. 25, № 4 (1982), p. 2185-2190.
10. *Laughlin R. B.* Quantized Hall conductivity in two dimension. - Phys. Rev. B, v. 23, № 10 (1981), p. 5632-5634.
11. *Wen X. G.* Gapless boundary excitations in the quantum Hall states and in the chiral spin states. - Phys. Rev. B, v. 43, № 13 (1991), p. 11025-11036.
12. *Wen X. G.* Theory of the edge states in fractional quantum Hall effects. - Int. J. Mod. Phys. B, v. 6, № 10 (1992), p. 1711-1762.
13. *Girvin M., MacDonald A. H.* - Phys. Rev. Lett., v. 58, № 12 (1987), p. 1252.
14. *Zhad S. C., Hanson T. H. and Kivelson S.* Effective-Field-Theory model for the fractional quantum Hall effect. - Phys. Rev. Lett., v. 62, № 1 (1989), p. 82-85.
15. *Волков В. А., Михайлов С. А.* Краевые магнитоплазмоны - низкочастотные слабозатухающие возбуждения в неоднородных двумерных электронных системах. - ЖЭТФ, т. 94, вып. 8 (1988), с. 217-241.
16. *Aleiner I. L., Glazman L. I.* Novel edge excitations of two-dimensional electron liquid in a magnetic field. - Phys. Rev. Lett., v. 72, № 18 (1994), p. 2935-2938.
17. *Giovanazzi S., Pitaevskii L., Stringari S.* Dispersion law of edge waves in the quantum Hall effect. - Phys. Rev. Lett., v. 72, № 20 (1994), p. 3230-3233.
18. *Cappelli A., Trugenberger C. A., Zemba G. R.* Infinite symmetry in the quantum Hall effect. - Nucl. Phys. B396 (1993), p. 465-490.
19. *Cappelli A., Trugenberger C. A., Zemba G. R.* Conformal symmetry and universal properties of quantum Hall states. - Nucl. Phys. B398 (1993), p. 531-567.
20. *Cappelli A., Trugenberger C. A., Zemba G. R.* $W_{1+\infty}$ dynamics of edge excitations in the quantum Hall effect. - Ann. Phys., v. 246, № 1 (1996), p. 86-120.
21. *Goldstein E., Petrich D. M.* The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane. - Phys. Rev. Lett., v. 67, № 23 (1991), p. 3203-3206.
22. *Brower R. C., Kessler D. A., Koplik J. and Levine H.* Geometrical models of interface evolution. - Phys. Rev. A, v. 29, № 3 (1984), p. 1335-1342.
23. *Wexler C., Dorsey A.* Physics on the edge: contour dynamics, waves and solitons in the quantum Hall effect. - (arXiv: cond-mat/9905042, v. 2, 1999). - Phys. Rev. B, v. 60, (1999), p. 10971.
24. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. - М.: Наука, 1989.

P. I. Holod, T. P. Holod, R. M. Lutchyn

LARGE-SCALE EDGE EXCITATION IN INCOMPRESSIBLE CHARGED FLUID IN MAGNETIC FIELD

Review of main approaches towards studying of incompressible strongly correlated electronic systems in strong magnetic fields is presented in the paper. Special attention is paid to the dynamics of edge excitations of incompressible liquid and its quantum properties are displayed on the macroscopic level in fractional quantum Hall effect. Expansion of non-local property parameter of Coulomb interaction in integral equations for normal component of velocity at the edge are studied. Finally, integral equations with higher order derivatives for the local curvature of the contour are derived.