

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Києво-Могилянська академія»  
Факультет інформатики  
Кафедра математики

## Магістерська робота

освітній ступінь – магістр

на тему: **«ЦІНОУТВОРЕННЯ ОПЦІОНІВ НА ДРОБОВОМУ ФІНАНСОВОМУ  
РИНКУ»**

Виконала: студентка 2-го року  
навчання,  
освітньо-наукової програми  
113 Прикладна математика

Гуцало Анастасія Вікторівна  
Керівник Щестюк Н.Ю.,  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент

Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена  
з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

Київ – 2024

**ГРАФІК ПІДГОТОВКИ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ/МАГІСТЕРСЬКОЇ РОБОТИ ДО ЗАХИСТУ**

№ з/п	<b>ПЕРЕЛІК РОБІТ</b>	<b>Термін</b> виконання	Дата ознайомлення наукового керівника	Підпис наукового керівника	Примітки
1.	Вибір теми, затвердження її на засіданні кафедри та закріплення наукового керівника Узгодження календарного графіка підготовки кваліфікаційної роботи. Ознайомлення студента з критеріями оцінювання кваліфікаційної роботи (п. 8.5).	жовтень	09.10.2023		
2.	Вивчення джерел літератури, матеріалів архівів, періодичних видань, збір та узагальнення фактів, даних	жовтень – листопад	25.10.2023		
3.	Складання плану каліф. роботи та узгодження з науковим керівником	листопад	05.11.2023		
4.	Написання розділів роботи	листопад – березень	03.04.2024		
5.	Проміжний контроль виконання роботи	лютий	09.02.2024		
6.	Написання кваліфікаційної роботи в цілому, ознайомлення з її першим варіантом наукового керівника	січень – березень	17.03.2024		
	<b>Розділ 1</b> (постановка проблеми, теоретичні основи, огляд літературних джерел)	квітень	21.03.2024		
	<b>Розділ 2</b> (аналітично-дослідницька частина) (експериментальна частина для природничих і біологічних наук)	квітень	07.04.2024		
	<b>Розділ 3</b> (проектно-рекомендаційна частина) (аналіз результатів експерименту для природничих і біологічних наук)	квітень	25.04.2024		
7.	Повне завершення написання кваліфікаційної роботи, оформлення її згідно з вимогами й подання на відгук науковому керівнику	квітень – початок травня	10.05.2024		
8.	Подання кваліфікаційної роботи для перевірки письмових робіт студентів НаУКМА на відповідність вимогам академічної доброчесності,	середина травня	30.05.2024		
9.	Подання на зовнішню рецензію	середина травня			
10.	Підготовка до захисту кваліфікаційної роботи на засіданні кафедри: написання доповіді та виготовлення ілюстративного матеріалу	<b>до 17 травня</b>	16.05.2024		
11.	Попередній захист кваліфікаційної роботи на засіданні кафедри	<b>до 17 травня</b>	16.05.2024		
12.	Подання кваліфікаційної роботи на кафедру з усіма супроводжувальними документами	<b>до 29 травня</b>	29.05.2024		
13.	Публічний захист кваліфікаційної роботи перед екзаменаційною комісією	згідно з розкладом роботи ЕК	05.06.2024		

Графік узгоджено «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Науковий керівник \_\_\_\_\_ (ПІБ)

Виконавець магістерської роботи \_\_\_\_\_ (ПІБ)

## ЗМІСТ

	Ст.
<b>ВСТУП</b>	5
<b>Розділ 1. Дифузійна модель Блека-Шоулза</b>	7
1.1. Математична модель . . . . .	7
1.2. Припущення моделі Блека-Шоулза. . . . .	8
1.3. Висновки розділу 1 . . . . .	11
<b>Розділ 2. Субдифузійна модель</b>	12
2.1. Субдифузійні процеси для моделювання динаміки фінансових ринків . . . . .	12
2.2. Властивості IG та IIG субординатора . . . . .	13
2.3 Справедлива ціна опціону для субдифузійної моделі . . . . .	14
2.4. Справедлива ціна опціону методом Монте-Карло. .	18
2.5. Симуляція субординатора та зворотного субординатора. . . . .	19
2.6. Висновки розділу 2. .	20
<b>Розділ 3. Застосування до реальних даних</b>	22
3.1. Збір даних і обчислення параметрів моделі. . . . .	22
3.2. Обчислення справедливої ціни. . . . .	24
3.3. Висновки розділу 3 . . . . .	25
<b>Висновки</b> . . . . .	26
<b>Список літератури</b> . . . . .	27

Додаток А. Код програми . . . . .	28
-----------------------------------	----

## ВСТУП

У фінансовій математиці розробка моделей, що використовують субдифузійні процеси, є важливою для точного моделювання динаміки ринкових цін активів. Субдифузійні процеси, такі як дробовий броунівський рух (FBM), моделюють складні фінансові процеси, які не можуть бути адекватно описані традиційними методами. Одним із важливих інструментів для розширення таких моделей є використання інверсних гаусових процесів та їх субординаторів.

Застосування процесів субдифузії для моделювання цін на опціони та інші цінні папери є актуальним та популярним напрямком дослідження у сучасній фінансовій математиці. Одним із основних завдань на фінансових ринках є якомога точніше спрогнозувати рух цін на активи із врахування великої кількості факторів, які на неї впливають. Оскільки динаміка руху цін неможлива без опису стохастичних процесів, до

Застосування процесів субдифузії для моделювання цін на опціони та інші цінні папери є актуальним та популярним напрямком дослідження у сучасній фінансовій математиці. Одним із основних завдань на фінансових ринках є якомога точніше спрогнозувати рух цін на активи із врахування великої кількості факторів, які на неї впливають. Оскільки динаміка руху цін неможлива без опису стохастичних процесів, до сих пір важко точно спрогнозувати ціни деривативів.

**Метою** роботи є застосування субдифузійної моделі із зворотним Гаусівським субординатором до реальних фінансових даних.

**Науковим завданням** було:

1. Симулювати процеси hitting time та waiting time, та геометричний Броунівський рух із hitting time.
2. Застосувати мартигальний метод для знаходження справедливої ціни опціону в субдифузійній моделі з IG субординаторами.

3. Використати фрактальне рівняння Дюпіре для знаходження справедливої ціни опціону в субдифузійній моделі з IG субординаторами.
4. Застосувати метод Монте-Карло для реальних фінансових даних. Порівняти точність.

Робота складається з трьох розділів.

Перший розділ присвячено дифузійній моделі Блека-Шоулза, її перевагам та недолікам.

Другий розділ присвячено аналізу та моделюванню процесу субдифузії з IG субординаторами, а також його застосуванню в моделі Блека-Шоулза для прогнозування ціни на опціон.

Третій розділ присвячено застосування дифузійної та субдифузійної моделі для прогнозування ціни на опціон на реальних даних.

У результаті створено програмний продукт на мові Python, який може застосовуватись для моделювання прогнозу ціни на опціони.

## РОЗДІЛ 1. ДИФУЗІЙНА МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА

Модель Блека-Шоулза є фундаментальною моделлю у фінансовій математиці, яка використовується для оцінки опціонів. Розроблена Фішером Блеком і Майроном Шоулзом у 1973 році, ця модель дозволила значно просунути у розумінні та аналізі фінансових деривативів. Вона базується на ряді припущень і використовує стохастичні процеси для моделювання динаміки цін активів.

### 1.1. Математична модель

Європейські опціони описують фінансовий контракт між покупцем та продавцем. Колл описує контракт за яким покупець має право, але не є зобов'язаним, придбати опціон  $Z(t)$  за вказаною страйковою ціною  $K$  за певний час виконання  $T$ . Покупець сплачує невеликий зalog, який і надає йому описане вище право. Опціон пут у свою чергу працює протилежно, він надає тримачу акцій можливість продавати їх.

Математична модель для динаміки ринку складається з 3 компонентів: ризикованого активу (ціна акції), безризикового активу (ціна облігації) та справедливої ціни опціону.

Справедливу ціну для Європейського опціону колл можна розрахувати за наступною формулою [1]:

$$C_{BS}(S_0, K, T, \sigma, r) = S_0 N(d_+) - Ke^{-rT} N(d_-), \quad (1)$$

$$d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma \sqrt{T}},$$

Де  $N(x)$  – кумулятивна функція розподілу нормального стандартного розподілу,

$r$  – безризикова процентна ставка,  $\sigma$  – волатильність,  $S_0$  – початкова ціна акції,  $T$  – термін дії опціону.

Ціна облігації в момент часу  $t$  визначається як:

$$B_t = B_0 e^{rT} \quad (2)$$

$B_0$  – початкова ціна безризикового активу.

Ціна ризикованого активу  $S_t$  в момент часу  $t$  змінюється за стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3)$$

Це рівняння показує, що зміна ціни активу складається з двох частин: детермінованої частини, яка залежить від дрейфу ( $\mu$ ), і випадкової частини, яка залежить від волатильності та броунівського руху  $W_t$ , які визначають середній темп зростання ціни активу та розмах випадкових коливань відповідно.

Броунівський рух  $W_t$  є основним прикладом неперервного стохастичного процесу, і має такі властивості [2]:

1.  $W_0 = 0$  (початкове значення дорівнює нулю).
2.  $W_t$  має незалежні прирости: прирости  $W_{t_2} - W_{t_1}$  та  $W_{t_3} - W_{t_2}$  є незалежними для будь-яких  $t_1 < t_2 < t_3$ .
3. Прирости  $W_t$  мають нормальний розподіл із середнім значенням нуль та дисперсією, що пропорційна різниці в часі:  $(W_{t+s} - W_t) \sim N(0, s)$ .

Відносини між цінами опціону пут  $P$  та опціону колл  $C$ , коли обидва мають однакові страйкову ціну та час виконання задається наступною формулою:

$$C - P = Z_0 - Ke^{-rT}.$$

## 1.2. Припущення моделі Блека-Шоулза

Модель Блека-Шоулза (B-S) є основоположною моделлю ціноутворення опціонів, яка широко використовується в фінансовій галузі. Вона має ряд припущень:

1. Норма прибутку на безризиковий актив є постійною протягом всього терміну дії опціону.
2. Логарифм прибутковості ціни акції є нескінченно малим випадковим блуканням із дрейфом. Ціна акцій слідує Геометричному Броунівському руху при безперервній торгівлі.
3. Протягом терміну дії опціону актив не виплачує дивіденди.
4. Немає можливості отримати безризиковий прибуток.



5. Витрати, пов'язані з купівлею або продажем акцій та опціонів, відсутні.

6. Існує можливість купувати і продавати будь-яку кількість активів, включаючи їх часткові частини.

Однак вона має ряд обмежень, які є предметом критики [4]::

- Нормальний розподіл прибутків: передбачається, що прибутки від акцій розподіляються за нормальним законом. Це означає, що модель не може враховувати екстремальні події, такі як великі падіння або зростання цін на акції.
- Позитивна кореляція квадратичних прибутків: великі прибутки від акцій, як правило, слідує за великими прибутками, а великі втрати за великими втратами. Однак ця передумова може не дотримуватися в реальному світі.
- Постійна волатильність: модель передбачає, що волатильність прибутку від акцій є постійною. Однак волатильність фактично може змінюватися в часі, що може призвести до помилок у розрахунках.
- Відсутність періодів без руху: дифузійна модель не підходить для моделювання періодів без руху, коли ціни на акції залишаються відносно незмінними. Це тому, що B-S передбачає, що ціни на акції постійно змінюються.

Незважаючи на свої обмеження, модель Блека-Шоулза залишається цінним інструментом для оцінки опціонів. Вона проста у використанні та надає точні оцінки в умовах, коли її припущення дотримуються. Однак, щоб усунути обмеження B-S, можуть використовуватися більш складні моделі, такі як субдифузійні моделі.

Для визначення справедливої ціни опціону за моделю Блека-Шоулза, може використовуватись бібліотека `mibian`. `Mibian` — це бібліотека Python, спеціально розроблена для роботи з опціонами і фінансовими похідними. Вона надає зручні інструменти для обчислення різних параметрів опціонів, таких як ціна опціону, греки,

та реалізована волатильність. Бібліотека підтримує як європейські, так і американські опціони.

Функція визначення справедливої ціни опціону:

```
c = BS([S, K, r, T], volatility= $\sigma$ )
```

S: поточна ціна базового активу.

K: страйк ціна.

r: безризикова процентна ставка.

T: термін дії опціону (у днях).

$\sigma$ : волатильність у відсотках.

Було вирішено написати власну функцію, що визначає справедливу ціни опціону в моделі Блека-Шоулза:

```
def black_scholes_call_price(S, K, T, r, sigma):
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    call_price = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return call_price
```

Ілюстративний приклад розрахунку за допомогою бібліотеки та функції:

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm

S0 = 300
K = 290
r = 0.02
sigma = 0.45
T = 1/6

def black_scholes_call_price(S, K, T, r, sigma):
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
    call_price = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return call_price

import mibian
c = mibian.BS([S0, K, r, 60], volatility=45)
print(c.callPrice)
print(black_scholes_call_price(S0, K, T, r, sigma))
```

27.505236398881976  
27.47743173989838

Рис. 1.1 – результати справедливої ціни опціону обома методами.

### 1.3. Висновки розділу 1

Модель Блека-Шоулза є фундаментальною моделлю у фінансовій математиці, яка здійснила революцію в оцінці опціонів та інших фінансових деривативів. Вона базується на стохастичних процесах і припущеннях, які дозволяють моделювати динаміку цін активів. Основні елементи моделі включають дрейф, волатильність і броунівський рух, що описують детерміновану та випадкову складові зміни цін.

Однак, модель Блека-Шоулза має свої обмеження. Вона передбачає нормальний розподіл прибутків, постійну волатильність і позитивну кореляцію квадратичних прибутків, що не завжди відповідає реальним умовам ринку. Крім того, модель не враховує періоди без руху, коли ціни залишаються відносно стабільними.

У роботі була використана бібліотека Mibian для оцінки справедливої ціни опціонів, що є зручним інструментом для фінансових аналітиків і трейдерів. Бібліотека дозволяє легко та швидко розрахувати ціну опціонів, греки та реалізовану волатильність, підтримуючи як європейські, так і американські опціони.

Окрім того, була розроблена власна функція для розрахунку ціни опціону колл за моделлю Блека-Шоулза, яка надає можливість перевірити результати, отримані за допомогою бібліотеки. Це дозволяє впевнитися в точності обчислень та адаптувати модель до специфічних вимог користувача.

Порівняння результатів, отриманих за допомогою бібліотеки Mibian та власної функції, показало їх відповідність, що підтверджує правильність реалізації алгоритмів та їх ефективність для використання у фінансовій практиці.

## РОЗДІЛ 2. СУБДИФУЗІЙНА МОДЕЛЬ

Субдифузійні процеси є важливими для моделювання динаміки складних систем, таких як фінансові ринки, де класичні моделі не завжди адекватно враховують нерівномірності і затримки в процесах.

Субдифузія є типом аномальної дифузії, яка характеризується повільнішим розсіюванням частинок у порівнянні зі стандартною (нормальною) дифузією. Це явище часто спостерігається в складних системах, таких як пористі середовища, біологічні тканини та фінансові ринки. У фінансовій математиці субдифузія використовується для моделювання динаміки цін активів, враховуючи затримки та інтервали без руху, які не можуть бути адекватно описані класичними моделями.

Субдифузійні моделі можуть бути використані для опису періодів застою на неліквідних ринках. Ці моделі використовують концепцію стохастичного годинника, який представляє час як стохастичний процес. Це дозволяє моделювати періоди, коли ціни на акції залишаються відносно незмінними.

### 2.1. Субдифузійні процеси для моделювання динаміки фінансових ринків

В субдифузійному процесі, календарний час замінюється на hitting time. Hitting time визначається за допомогою субординатора та оберненого субординатора.

Субординатор  $G(t)$  - це зростаючий процес Леві [3], який використовується для моделювання часу в інших стохастичних процесах. Він вводить випадкові зміни часу, що дозволяє моделювати нерівномірності та затримки у фінансових ринках та інших складних системах.

Обернений субординатор  $H(t)$  визначається як перший момент, коли певний стохастичний процес (у даному випадку субординатор) досягає заданої підмножини простору станів. У фінансовій математиці обернений субординатор можна

інтерпретувати як перший момент, коли ціна активу досягає певного рівня. Після цього ціна може залишатися на цьому рівні протягом тривалого часу.

В субдифузійному процесі, формули (2) та (3) відповідно набувають вигляду:

$$B_t = B_0 e^{rH(t)}$$

$$dS_{H(t)} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_{H(t)} dH(t) + \sigma S_{H(t)} dW_{H(t)}$$

Таким чином, субдифузійна модель базується на використанні hitting time, і дозволяє моделювати ситуації, де звичайний календарний час не є адекватним для опису динаміки процесу. Це особливо корисно у фінансових моделях, де ціни активів можуть не змінюватися постійно, а залишатися стабільними протягом певних періодів. В даній роботі було використано обернений Гаусівський (IG) субординатор.

## 2.2 Властивості IG та ПГ субординатора

Щільність  $G(t)$  має вигляд:

$$g(x, t) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\delta \gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2x} - \frac{\gamma^2 x}{2}}, \quad x > 0.$$

Моменти  $q$ -го порядку визначаються як:

$$E[G^q(t)] \sim \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^q t^q, \quad t \rightarrow \infty.$$

Обернений субординатор визначається як:

$$H(t) = \inf(\tau > 0: G(\tau) > t).$$

Щільність  $H(t)$  має вигляд:

$$h(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta \gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} * [\gamma \sin(\delta x \sqrt{2y}) + \sqrt{2y} \cos(\delta x \sqrt{2y})] dy \quad (4).$$

Моменти  $q$ -го порядку визначаються як:

$$E[H^q(t)] \sim \begin{cases} \left(\frac{1}{\delta\sqrt{2}}\right)^q t^{q/2} & \text{при } \gamma = 0 \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^q t^q & \text{при } \gamma > 0 \end{cases}, \quad t \rightarrow \infty.$$

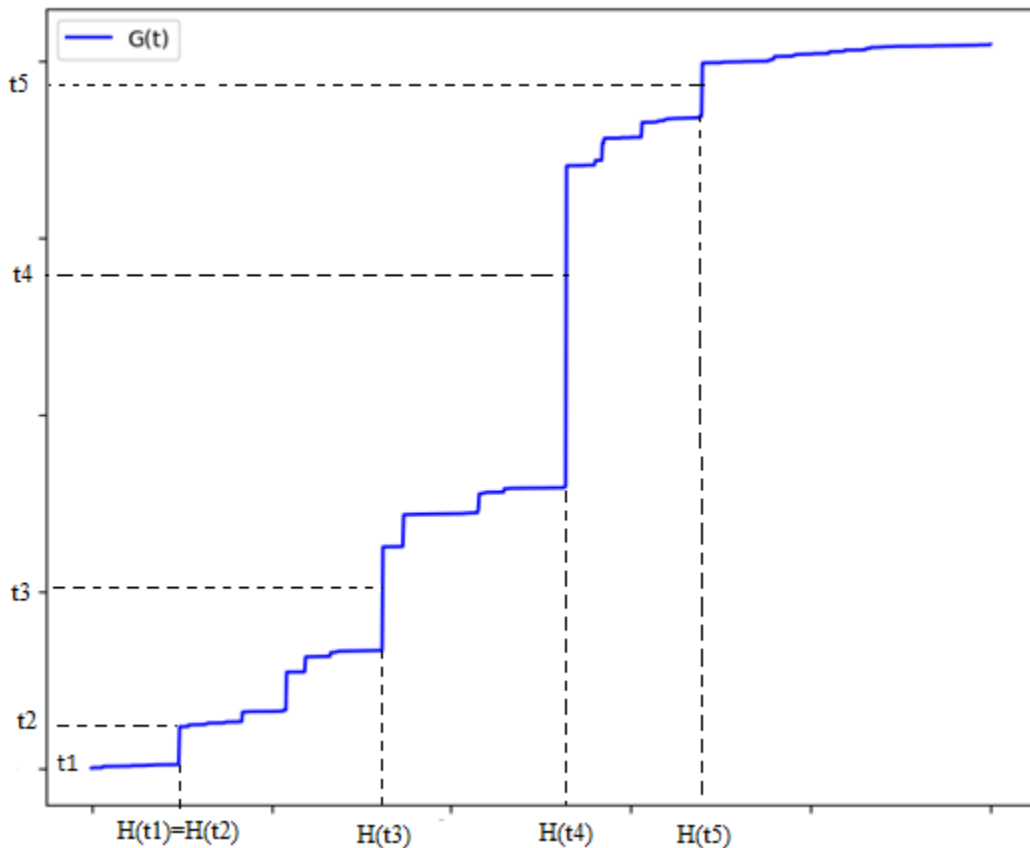


Рисунок 1.2 – Схематичний вигляд визначення  $H(t)$  через  $G(t)$ .

### 2.3. Справедлива ціна опціону для субдифузійної моделі

Визначимо  $h(x, t)$  для IG випадку по формулі (4).

1. Для часткового випадку:  $\gamma = 0$  та  $\delta = 1$ .

$$h(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-ty} \cos(x\sqrt{2y}) dy.$$

Перейдемо до нового інтегралу, використовуючи заміну змінної  $u = \sqrt{y}$ :

$y = u^2, dy = 2udu$ . Перепишемо інтеграл:

$$h(x, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tu^2} \cos(x\sqrt{2}u) du.$$

Використаємо формулу інтегрування:

$$\int_0^{\infty} e^{-au^2} \cos(bu) du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}},$$

Де  $a = t$  та  $b = \sqrt{2}x$ .

Підставимо ці значення і спростимо:

$$h(x, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\sqrt{2}x)^2}{4t}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t > 0.$$

2. Для загального випадку. Враховуючи розкладання за рядом Тейлора для таких функцій [6]:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

Отримаємо:

$$\sin(\delta x \sqrt{2y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\delta x \sqrt{2y})^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\delta x \sqrt{2y})^{2n}}{(2n)!}.$$

Підставляємо ці розклади в початковий інтеграл (4):

$$h(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} \left[ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x \sqrt{2y})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sqrt{2y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x \sqrt{2y})^{2n}}{(2n)!} \right] dy$$

Розподілимо суму на два інтеграли:

$$h(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} \left[ \gamma \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x \sqrt{2y})^{2n+1}}{(2n+1)!} dy + \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} \sqrt{2y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x \sqrt{2y})^{2n}}{(2n)!} dy \right]$$

Обміняємо порядок сумування та інтегрування:

$$h(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} \left[ \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^\infty \frac{e^{-ty} (2y)^{n+\frac{1}{2}}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} dy + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty \frac{e^{-ty} (2y)^{n+\frac{1}{2}}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} dy \right]$$

Позначимо:

$$I_{n+\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-ty} (2y)^{n+\frac{1}{2}}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} dy$$



Розглянемо простішу ситуацію для випадку, коли  $\gamma = 0$ . Це значно спростить обчислення:

$$I_{n+\frac{1}{2}} = 2^{n+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-ty} y^{n-\frac{1}{2}} dy$$

Це відомий інтеграл Ейлера для гама-функцій:

$$\int_0^{\infty} e^{-ty} y^{v-1} dy = \frac{\Gamma(v)}{t^v},$$

Де  $v = n + \frac{1}{2}$ . Тому:

$$I_{n+\frac{1}{2}} = 2^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{t^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Таким чином, при  $\gamma = 0$  щільність  $h(x, t)$  набуває вигляду:

$$(x, t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}}$$

$$* \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x)^{2n+1} 2^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{t^{n+\frac{1}{2}}}}{(2n+1)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * (\delta x)^{2n} 2^{n+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{t^{n+\frac{1}{2}}}}{(2n)!} \right].$$

Цей результат демонструє, що щільність  $h(x, t)$  може бути виражена через ряд Тейлора, але інтеграл неможливо обчислити аналітично в закритій формі. Проте отриманий розклад дозволяє використовувати чисельні методи для наближеного обчислення цієї щільності.

Твердження. Справедлива ціна опціону у субдифузійній моделі може бути обчислена за формулою:

$$C_{sub}(S_0, K, T, r, \sigma) = C(S_0, K, H(t), r, \delta) = \int_0^{\infty} C(S_0, K, x, r, \sigma) h(x, t) dx.$$

$C(S_0, K, H(t), r, \delta)$  – ціна опціону в дифузійній моделі, яку можна розписати як:

$$C(S_0, K, x, r, \delta) = S_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rx + \frac{1}{2}\delta^2 x}{\delta\sqrt{x}}\right) - Ke^{-rx} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rx - \frac{1}{2}\delta^2 x}{\delta\sqrt{x}}\right).$$

Зауваження. Кумулятивну функцію можна представити за допомогою чисельних методів:

$$N(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a_1}{1+yx} - \frac{a_2}{(1+yx)^2} + \frac{a_3}{(1+yx)^3} - \frac{a_4}{(1+yx)^4} + \frac{a_5}{(1+yx)^5} \right) & \text{при } x \geq 0 \\ \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a_1}{1-yx} - \frac{a_2}{(1-yx)^2} + \frac{a_3}{(1-yx)^3} - \frac{a_4}{(1-yx)^4} + \frac{a_5}{(1-yx)^5} \right) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Де  $y = 0.2316419$ ,  $a_1 = 0.3198153$ ,  $a_2 = 0.356563782$ ,  $a_3 = 1.781477937$ ,  $a_4 = 1.821255978$ ,  $a_5 = 1.330274429$ .

В даній роботі буде використовуватися метод Монте-Карло для наближеного обчислення.

## 2.4. Справедлива ціна опціону методом Монте-Карло

За методом Монте-Карло, справедлива ціна опціону може бути визначена як:

$$C_{sub}(S_0, K, T, r, \sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(S_0, K, T, H_i(T), \sigma)$$

Тобто це середнє значення з визначних справедливих цін опціонів, де замість календарного часу застосовується обернений субординатор.

Детальний опис алгоритму:

1. Генеруємо  $n$  випадкових траєкторій для оберненого субординатора  $H(T)$ , який моделює затримки або періоди застою в ціні активу.
2. Використовуємо класичну формулу Блека-Шоулза для обчислення ціни опціону для кожної симульованої траєкторії з урахуванням зворотного субординатора. Використовуємо значення  $H(T)$  як час до експірації.
3. Обчислюємо середнє значення цін опціонів для всіх траєкторій, що буде справедливою ціною опціону в субдифузійній моделі.

Таким чином, метод Монте-Карло дозволяє обчислити справедливу ціну опціону в субдифузійній моделі Блека-Шоулза з урахуванням складних динамічних процесів на фінансових ринках.

### 2.5. Симуляція субординатора та зворотного субординатора

Для ІГ, при  $\gamma = \Delta = 1$   $E(H(t))=t$ . Це дозволяє визначити субординатор  $H(t)$  за допомогою симуляції субординатора.

Алгоритм симуляції  $G(T)$ :

Маємо  $n$  моментів часу:  $t_1 = \frac{1}{n}, t_2 = \frac{2}{n}, \dots, t_n = 1, dt = \frac{1}{n}$ .

Для  $i = 1, 2, \dots, n$  ми генеруємо  $n$  незалежних тотожним чином розподілені обернені гаусові змінні  $F_i$ :

1.1 Генеруємо стандартну нормальну випадкову змінну  $N$ .

1.2 Призначаємо  $X = N^2$ .

1.3 Визначаємо  $Y = dt + \frac{X}{2} + \sqrt{dt}$ .

1.4 Генеруємо рівномірну  $[0, 1]$  випадкову змінну  $U$ .

1.5 Якщо  $U \leq \frac{dt}{dt+Y}$ , повертаємо  $Y$ ; інакше повернуємо  $\frac{(dt)^2}{Y}$ .

2. Знаходимо:  $G(t_i) = \sum_{j=1}^i F_j$ .

$G(t_1), G(t_2), \dots, G(t_n)$  є  $n$  змодельованих значень процесу зворотного Гауса в моменти часу  $t_1, t_2, \dots, t_n$  відповідно.

При  $n$  субординаторах, ми можемо визначити зворотний субординатор  $H(t)$ :

$$H_{\Delta}(t) = [\min(n \in N: G(\Delta n) > t) - 1]\Delta, n = 1, 2, \dots$$

Де  $\Delta$  — довжина кроку,  $t$  — час.

Тобто на початку задаємо значення  $n=1$ . Якщо  $G(\Delta n) \leq t$ , збільшуємо  $n$  на 1, і повторюємо перевірку. Коли знайдено мінімальне  $n$ , для якого  $G(\Delta n) > t$ , обчислюємо  $H_{\Delta}(t)$  за заданою формулою.

## 2.6. Висновки розділу 2

У цьому розділі було розглянуто субдифузійні моделі та їх застосування у фінансовій математиці для моделювання динаміки фінансових ринків. Вивчення субдифузійних процесів дозволило зрозуміти, як можна моделювати нерівномірності та затримки у процесах, що є характерними для складних систем, таких як фінансові ринки.

Пояснено концепцію субдифузії, яка відрізняється від стандартної дифузії повільнішим розсіюванням частинок. Виявлено, що субдифузійні процеси є корисними для моделювання динаміки фінансових ринків, де класичні моделі не завжди адекватно враховують періоди застою та інтервали без руху.

Запропоновано використання hitting time та обернених субординаторів для моделювання динаміки цін активів. Цей підхід дозволяє враховувати нерівномірності та затримки у часі, що є важливим для точного опису поведінки фінансових ринків.

Запропоновано формулу для обчислення справедливої ціни опціону у субдифузійній моделі. Визначено, що використання hitting time замість календарного часу дозволяє адекватніше описувати динаміку цін активів у фінансових моделях.

Використано метод Монте-Карло для наближеного обчислення справедливої ціни опціону у субдифузійній моделі. Детально описано алгоритм симуляції субординаторів та обернених субординаторів для оцінки ціни опціону.

Субдифузійні моделі є потужним інструментом для моделювання складних динамічних процесів на фінансових ринках. Використання цих моделей дозволяє враховувати нерівномірності та затримки, що робить їх більш точними та ефективними у порівнянні з класичними моделями. Це сприяє більш точному прогнозуванню динаміки цін активів та підвищенню ефективності фінансового аналізу

## РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО РЕАЛЬНИХ ДАНИХ

### 3.1. Збір даних і обчислення параметрів моделі

В якості реальних даних було обрано ціни акцій компанії NVIDIA Corporation Common Stock (NVDA). Часовий проміжок даних: 24.05.2023 - 23.05.2024. Дані були взяті з сайту Nasdaq.com. Спостерігаючи за змінами на ціни в даному часовому проміжку (Рис. 3.1), можемо зробити висновок, що ринок є доволі активним, хоча періоду застою.

Вхідні параметри: файл типу `xlsx` із цінами акцій за вказаний проміжок часу. Варто зазначити, що дата початкової ціни на опціон `S0` – 23.05.2024. За страйову ціну `K` було обрано 1000, безризикова процентна ставка  $r=2\%$ , волатильність  $\sigma = 45\%$ .

Розрахунки будуть проводитися за допомогою Python та його статистичних та математичних бібліотек. У даному проєкті буде використано наступні бібліотеки: `matplotlib` для виведення графіків, `math` стандартна математична бібліотека, `sympy` більш складна математична бібліотека, що дозволить виконувати інтегральні обчислення, `numpy` та `statistics` статистичні бібліотеки, які будуть використані для статистичних обрахунків та `pandas` для роботи із таблицями даних.

Першим кроком буде внесення даних до програми, їх зчитування та обробка. Наступний уривок із коду демонструє імплементацію читання таблиць з файлів розширення `.csv` за допомогою бібліотеки `pandas`. Дана бібліотека дозволяє зручно працювати із таблицями, пропонуючи для використання методи та функції, що дозволяють не витрачати час на розрахунки базових показників та обробку кожної клітинки, що містить дані.

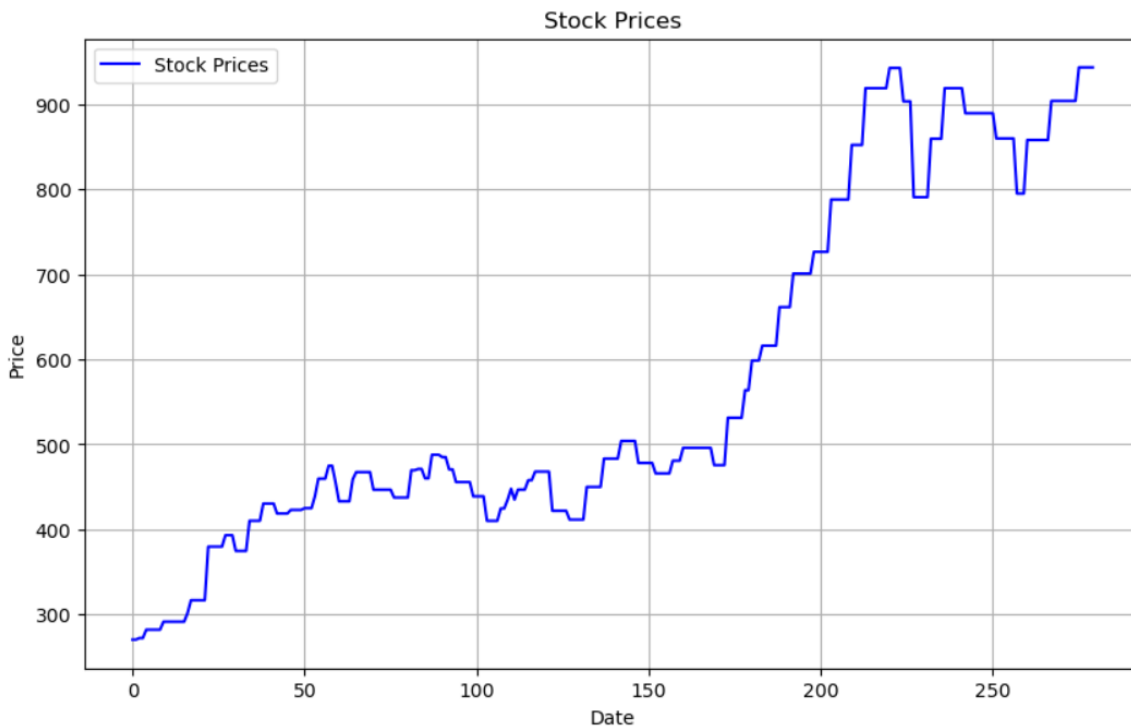


Рисунок 3.1 – Ціни акцій компанії NVIDIA

Визначаємо її за формулою та будуємо її графік:

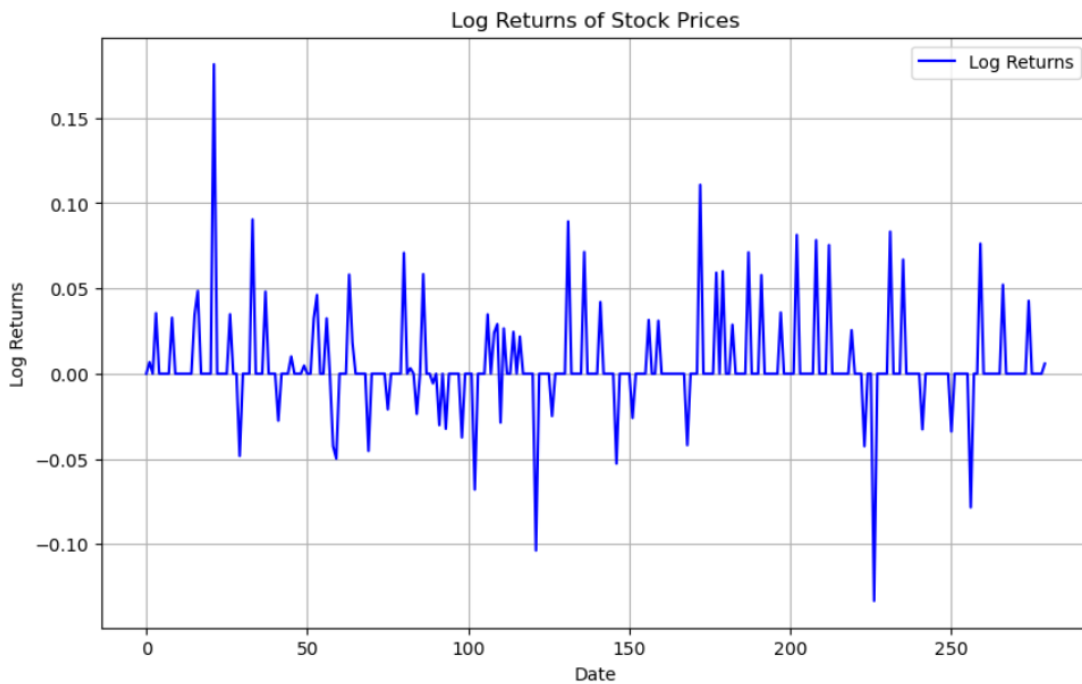


Рис. 3.2 – Графік log-return для цін акцій

Значення  $h_i = 0$  виникають при  $S_i = S_{i-1}$ , тобто коли ціна акції не змінюється.

Для порівняльного аналізу було взято реальні дані цін на опціони в певні дати.

Expiration Dates	Option	Strategy	Moneyness				Type						
June 2024	Composite	Calls & Puts	Near the Money				All (Types)						
Calls							Puts						
Exp. Date	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	Strike	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.
<b>June 7, 2024</b>													
Jun 7	96.83	+43.10 ▲	108.00	109.20	225	342	935.00	3.75	-37.48 ▼	3.55	3.85	450	314
Jun 7	92.00	-33.70 ▼	105.50	106.90	8	5	937.50	4.20	-1.45 ▼	3.80	4.05	97	76
Jun 7	102.96	+49.36 ▲	103.50	104.65	324	579	940.00	4.25	-39.60 ▼	4.05	4.35	754	916
Jun 7	103.55	+8.15 ▲	101.00	102.40	17	5	942.50	4.09	-1.16 ▼	4.30	4.65	97	82
Jun 7	99.40	+48.10 ▲	98.65	100.55	652	444	945.00	4.45	-41.78 ▼	4.55	4.95	565	608
Jun 7	100.80	+1.80 ▲	96.60	98.10	12	9	947.50	5.10	-4.50 ▼	4.85	5.15	278	227
Jun 7	96.00	+46.70 ▲	94.40	95.70	1514	2306	950.00	5.42	-43.58 ▼	5.15	5.50	1771	877
Jun 7	82.80	-6.83 ▼	92.25	93.60	11	10	952.50	5.35	-3.91 ▼	5.50	5.90	102	61
Jun 7	82.36	+35.79 ▲	90.10	91.45	292	342	955.00	6.00	-45.60 ▼	5.75	6.15	293	268
Jun 7	86.00	+41.10 ▲	85.85	87.35	213	555	960.00	6.79	-51.11 ▼	6.55	7.00	941	724
Jun 7	85.80	+44.55 ▲	81.75	83.05	275	444	965.00	7.45	-50.45 ▼	7.35	7.85	651	311
Jun 7	77.65	+36.88 ▲	77.65	78.95	257	453	970.00	8.50	-53.80 ▼	8.25	8.80	870	529
Jun 7	76.35	+38.20 ▲	73.70	75.00	167	206	975.00	9.70	-52.40 ▼	9.30	9.85	651	399

### 3.2. Обчислення справедливої ціни

Для розрахунку було обрано наступні дати: 7 червня 2024, 20 вересня 2024 та 17 січня 2025. Відповідно,  $T$  дорівнював  $1/24$ ,  $1/3$  та  $2/3$ .

Data	Дифузійна B-S	Субдифузійна за M-C	Реальні дані
7.06.24	26.67	33.27	39.75
20.09.24	151.79	125.72	131.25
17.01.25	226.38	165.03	184

Визначаємо похибки за формулою середньоквадратичної похибки [5]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2},$$



Де  $d_i$  – похибка між реальними та визначеними даними.

Для дифузійної моделі B-S:

$$RMSE(BS) = \sqrt{\frac{1}{3}((26.67 - 39.75)^2 + (151.79 - 131.25)^2 + (226.38 - 184)^2)}$$

$$\approx 28.219$$

Для судифузійної моделі, розрахованої методом Монте-Карло:

$$RMSE(MC) = \sqrt{\frac{1}{3}((33.27 - 39.75)^2 + (125.72 - 131.25)^2 + (165.03 - 184)^2)}$$

$$\approx 12.006$$

### 3.3. Висновки розділу 3

У даному розділі було проведено аналіз цін акцій компанії NVIDIA Corporation за період з 24.05.2023 по 23.05.2024. На основі цих даних було виконано розрахунки справедливої ціни опціонів з використанням дифузійної моделі Блека-Шоулза та субдифузійної моделі, розрахованої методом Монте-Карло.

Аналіз показав, що субдифузійна модель методом Монте-Карло має меншу похибку у порівнянні з дифузійною моделлю Блека-Шоулза, що свідчить про її більшу точність та відповідність реальним ринковим даним.

Таким чином, можна зробити висновок, що використання субдифузійної моделі для оцінки справедливої ціни опціонів може бути більш ефективним підходом, особливо для ринків із застоями в цінах акцій.

## ВИСНОВКИ

Субдифузійна модель допомагає визначити більш точно справедливу ціну опціону, коли у фінансовій моделі є періоди застоїв. У даній роботі:

- Було проведено симуляцію hitting time та waiting time. Ці процеси є критичними для субдифузійних моделей, оскільки вони дозволяють моделювати часові інтервали між змінами цін активів, що особливо важливо для фінансових ринків з нерівномірною активністю.
- Запроваджено твердження для справедливої ціни опціону. Було запропоновано формулу для обчислення справедливої ціни опціону в субдифузійній моделі з використанням hitting time замість календарного часу. Це дозволяє точніше моделювати динаміку цін активів у періоди застою.
- Застосовано метод Монте-Карло для реальних даних. Метод Монте-Карло був використаний для наближеного обчислення справедливої ціни опціону в субдифузійній моделі. Було написано програмний код на мові Python, який дозволив провести симуляції та порівняти точність отриманих результатів з дифузійною моделлю Блека-Шоулза.

Ці кроки підтвердили ефективність субдифузійних моделей для фінансових ринків, де класичні моделі не завжди адекватно враховують періоди застою та інтервали без руху. Результати показали, що субдифузійні моделі можуть бути більш точними у прогнозуванні цін опціонів на таких ринках, що сприяє підвищенню ефективності фінансового аналізу та управління ризиками.

## Список літератури:

1. Black-Scholes formula. *Encyclopedia of finance*. URL: [http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Black-Scholes\\_formula&oldid=50024](http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Black-Scholes_formula&oldid=50024) (date of access: 01.02.2024).
2. Feynman, Richard (1964). "The Brownian Movement". *The Feynman Lectures of Physics*, Volume I. p. 41.
3. Wylomanska, A., Kumar, A., Połoczński, R., Vellaisamy, P., Inverse Gaussian and its inverse process as the subordinators of fractional Brownian motion. *Physical Review*. 96 (2016) 042128
4. Parikh, V. (2022, March 11). Black Scholes Model Advantages and Disadvantages. LetsLearnFinance. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.letslearnfinance.com/black-scholes-model-advantages-anddisadvantages.html>
5. Mean square displacement. Wikipedia. [Електронний ресурс] – Режим доступу: [https://en.wikipedia.org/wiki/Mean\\_squared\\_displacement](https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_squared_displacement)
6. Neither Newton nor Leibniz – The Pre-History of Calculus and Celestial Mechanics in Medieval Kerala. MAT 314. Canisius College.
7. Халл Д. Опціони, ф'ючерси та інші похідні фінансові інструменти / Джон Халл. – Київ: Вільямс, 2008.
8. Степанов С. С. Стохастичний світ / Сергій С. Степанов., 2009. – 376 с. – (Електронне видання). – (v. 0.1).
9. M. Magdziarz, Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model, *Appl.* 145 (2009) 188-203
10. M. Magdziarz, Black–Scholes formula in subdiffusive regime, *J. Stat. Phys.* 136 (2009) 553–564.
11. D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
12. M. T. Wasan (1968) On an inverse Gaussian process, *Scandinavian Actuarial Journal*, 1968:1-2, 69-96, DOI: 10.1080/03461238.1968.10413264
13. Mijena, J. B. Correlation structure of time-changed fractional Brownian motion. Cornell University, 2014. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.4502>

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

def load_file(filepath):
    return pd.read_excel(filepath)

filepath = r'C:\Users\Анастасия\Desktop\option\NV.xlsx'

df = load_file(filepath)

df.columns = ['Close/Last']

df['Log>Returns'] = np.log(df['Close/Last'].shift(-1)) - np.log(df['Close/Last'])

df.dropna(inplace=True)

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(df.index, df['Close/Last'], color='blue', linestyle='-', label='Stock
Prices')
plt.title('Stock Prices')
plt.xlabel('Date')
plt.ylabel('Price')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(df.index, df['Log>Returns'], color='blue', linestyle='-', label='Log
Returns')
plt.title('Log>Returns of Stock Prices')
plt.xlabel('Date')
plt.ylabel('Log>Returns')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

sample_mean = df['Log>Returns'].mean()
sample_variance = df['Log>Returns'].var()
```

```

delta_t = 1 / 252
annual_volatility = np.sqrt(sample_variance / delta_t)

print(f'Annual Average Volatility ( $\sigma$ ): {annual_volatility}')

S0 = df['Close/Last'].iloc[-1]
K = 1000
r = 0.02
sigma = 0.45
print(f'Risk-free rate (r): {r}')

# G(t)
def inverse_gaussian_subordinator(delta, gamma, T, N_steps):
    increments = np.zeros(N_steps)
    for i in range(N_steps):
        dt = 1 / N_steps
        N = np.random.normal(0, 1)
        X = N**2
        Y = dt + X / 2 + (1 / 2) * np.sqrt(4 * dt * X + X**2)
        U = np.random.uniform(0, 1)
        if U <= dt / (dt + Y):
            increments[i] = Y
        else:
            increments[i] = (dt**2) / Y
    return np.cumsum(increments)

def find_min_index(G_t, t):
    for i, value in enumerate(G_t):
        if value > t:
            return i
    return None

# time H(t)
def hitting_time(G_t, t, delta_t):
    H_t = abs((find_min_index(G_t, t) - 1) * delta_t)
    return H_t

def monte_carlo_option_price(S, K, T, r, sigma, n_simulations):
    option_prices = []
    for _ in range(n_simulations):
        G_t = inverse_gaussian_subordinator(delta, gamma, T, N_steps)
        while G_t[-1] < 1:

```

```

        G_t = inverse_gaussian_subordinator(delta, gamma, T, N_steps)
        H_t = hitting_time(G_t, T, delta_t)
        call_price = black_scholes_call_price(S0, K, H_t, r, sigma)
        option_prices.append(call_price)
    return np.mean(option_prices)

def black_scholes_call_price(S, K, T, r, sigma):
    with np.errstate(divide='ignore', invalid='ignore'):
        d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
        call_price = S * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return call_price

T = 1
n_simulations = 3000 # Кількість симуляцій
N_steps = 200 # Число кроків для симуляції
t_value = 1/24

BS = black_scholes_call_price(S0, K, t_value, r, sigma)
MC = monte_carlo_option_price(S0, K, t_value, r, sigma, n_simulations)
C = 33.9
print(f'Fair price of the diffusive call option: {BS:.2f}')
print(f'Fair price of the subdiffusive call option: {MC:.2f}')
print(f'Real call option: {C:.2f}')

import mibian
c = mibian.BS([S0, K, 0.02, 14], volatility = 33.8)
print(c.callPrice)

```