УДК 510.21

Поляков Є. М.

ПРОБЛЕМА ЦЕЗАРЯ У НЕОФРЕҐЕАНСЬКІЙ ФІЛОСОФІЇ МАТЕМАТИКИ

Статтю присвячено неофреґеанському проекту авторства Кріспіна Райта та Боба Гейла з обґрунтування арифметики і містить загальний огляд проекту та аналіз розв'язку однієї з його центральних проблем – «проблеми Цезаря».

Ключові слова: філософія математики, неофреґеанізм, Ґоттлоб Фреґе, Кріспін Райт, Боб Гейл, числа, проблема Цезаря, принцип Г'юма.

Сьогодні Ґоттлоб Фреґе відомий передусім як автор першої формальної системи логіки сучасного типу і семантичного трикутника, але історично ці інтелектуальні винаходи – лише побічні результати роботи над обґрунтуванням математичного знання, якому німецький мислитель присвятив своє академічне життя. Дві найбільші й найважливіші праці Фреґе – «Основи арифметики» і «Основні закони арифметики» – обґрунтовували тезу, що «арифметика є далі розвинутою логікою» [6, с. 11], тобто що (всупереч думці Канта) арифметичні істини є аналітичними й можуть бути виведеними з чисто логічних понять за чисто логічними законами. Формальна система «Основних законів арифметики», втім, виявилася суперечливою, і в результаті автор змушений був відмовитися від своєї ідеї.

Тривалий час після цього філософія математики Фреґе перебувала в полі зору дослідників передусім як історичний артефакт. Ситуація змінилася у 1980-х рр., коли британський філософ Кріспін Райт у форматі книги обґрунтував припущення, що проект Фреґе все-таки можна несуперечливо втілити в життя, якщо внести у нього кілька значних модифікацій. Ця ідея стала відправною точкою «неофреґеанізму» чи «неофреґеанської філософії математики», яка на сьогодні асоціюється передусім з Кріспіном Райтом і його колегою Бобом Гейлом. Наша мета у цій статті – розібрати одну з ключових проблем неофреґеанізму – проблему Цезаря. Аби полегшити розуміння проблеми для читачів, не знайомих з тематикою, почнемо з короткого резюме обґрунтування арифметики Фреґе, дамо загальний огляд програми Райта і Гейла і лише в третій частині перейдемо до заявленої теми.

Логіцистська програма Фреґе

В основах математики підхід, коли математику намагаються звести до логіки, отримав назву логіцизму. Спочатку цю ідею втілив Фреґе[1], на десятиліття пізніше і на інших засадах логіцистську програму розробили Бертран Рассел і Альфред Вайтгед у "Principia Mathematica". Тут розглядатиметься лише перший проект.

Про свої намагання «з'ясувати, як далеко можна просунутися в арифметиці, спираючись на лише найбільш загальні… закони мислення» [4, с. iv], Фреґе згадує уже в першій роботі «Поняттєпис» (1879) і уточнює, що хотів, зокрема, «звести до логічного випливання поняття впорядковування в певній послідовності, а потім від нього перейти до поняття числа» [4, с. iv].

У 1884 р. виходять «Основи арифметики», де в конструктивній частині автор подає вже цілком конкретний план того, як саме можна втілити логіцистську програму. Ідея «Основ арифметики» напрочуд проста: *математичне* поняття «число» можна означити через чисто *логічне* поняття «об'єм поняття», а отже істини, що стосуються чисел, теж можна переозначити у чисто логічних поняттях, а отже арифметика зводиться до логіки. Розглянемо означення і аргументацію детальніше.

Після аналізу різних можливих підходів до поняття числа Фреґе приходить до висновку, що воно є тісно пов'язаним з поняттям «поняття»: «…вказівка на число містить висловлювання про поняття» [5, с. 67]. Через це він формулює означення не просто числа, а "числа, що відповідає поняттю *F*"»:

«Число, що відповідає поняттю *F*, є об'ємом поняття "рівночисельний поняттю *F*"» [5, с. 79–80].

Для розуміння означення слід прояснити поняття «рівночисельність» і «об'єм поняття».

Для першого з них у Фреґе є пояснення у вигляді критерію рівності для чисел, який у

[1] Строго кажучи, Фреґе треба називати напівлогіцистом, оскільки він не вважав, що до логіки можна звести геометрію (на відміну від Рассела і Вайтгеда, які хотіли звести до логіки всю математику). Називаючи проекти Фреґе і неофреґеанців логіцистськими, маємо на увазі лише те, що вони намагаються звести до логіки арифметику.

неофреґеанській філософії математики стане відомим як **принцип Г'юма**[2]: два поняття є рівночисельними (тобто їм відповідає одне й те ж число), якщо і тільки якщо між предметами, які під них підпадають, можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Для «об'єму поняття» Фреґе уточнень не надає, оголошуючи його зрозумілим і без пояснень[3]. Зазвичай під об'ємом поняття мається на увазі множина предметів, які підпадають під поняття, і саме в такому значенні воно, видається, і вживається в «Основах арифметики».

Означивши поняття числа, Фреґе вводить число нуль як об'єм поняття «рівночисельний поняттю "не дорівнювати собі"» і поняття наступності в ряді. Цього виявляється достатньо, щоб рекурсивно означити будь-яке число, а також довести нескінченність натурального ряду[4].

В «Основних законах арифметики» (перший том – 1893 р., другий – 1903 р.) викладається формальна система, яка доповнює неформальне обґрунтування, запропоноване в «Основах арифметики». У першому томі Фреґе з допомогою нового означення числа як об'єму поняття формально виводить ряд властивостей, які традиційно приписуються числам, у другому – неформально розписує теоретичне підґрунтя можливості виведення дійсних чисел з поняття величини.

Уже на момент подачі до друку другого тому, втім, Фреґе отримує звістку, яка означатиме кінець його версії логіцизму. У листі від 16 червня 1902 р. Бертран Рассел повідомляє, що в системі, викладеній у першому томі, виводиться парадокс, який пізніше отримає назву «парадоксу Рассела». Парадокс виводиться зокрема завдяки тому, що за правилами кожному легітимно впровадженому поняттю має відповідати об'єм[5]. Оскільки Фреґе дізнався про парадокс надто пізно, то встиг лише намітити шлях для його подолання, розмістивши в кінці другого тому «Основних законів…» відповідний додаток, і не вносив коректив до наявного тексту. Заблокувати антиномію автор сподівався послабленням аксіоми 5, яка відповідала за встановлення залежностей між поняттями і їхніми об'ємами[6], і зазначав, що хотів би взагалі обійтися без об'ємів понять, але не бачить для них реальної альтернативи при логічному переозначенні поняття числа.

Як з'ясувалося пізніше, послаблення аксіоми не тільки не вирішує проблеми з парадоксом, а й породжує небажані наслідки[7]. Сам Фреґе хоча й не говорив прямо про провал своєї пропозиції з подолання парадоксу, імовірно врешті все ж виявив її вади: третій том його *opus magnum* так ніколи і не з'явиться, а у листах до Циґізмонді [7, с. 272] та Гьоніґсвальда [7, с. 85] філософ стверджуватиме, що зведення арифметики до логіки з використанням поняття «об'єм поняття» неможливе.

Отож, Фреґевий варіант логіцистської програми зазнав невдачі, оскільки ключове логічне поняття «об'єм поняття», яке використовувалося для переозначення поняття числа, виявилося причетним до виведення суперечностей.

Неофреґеанізм

Нове життя логіцизм Фреґе отримує через вісімдесят років після виходу другого тому «Основних законів…», у 1983 р., коли учень одного з найбільш успішних популяризаторів Фреґе Майкла Дамміта Кріспін Райт випускає свою монографію «Фреґева концепція чисел як предметів» [10]. У ній автор виклав і спробував обґрунтувати тезу, довкола якої й буде збудовано програму неофреґеанської філософії математики: арифметику можна вивести з логіки так, як це пропонував Фреґе, але для цього треба відмовитися від експліцитного означення «числа, що відповідає поняттю *F*» і натомість у якості «імпліцитного означення» [8, с. 4] використати принцип Г'юма. При цьому Райт вважає суттєвим зберегти платоністичну установку «Основ арифметики», тобто трактування чисел як самостійних[8] предметів, без якої логіцистський проект не можна було б вважати фреґевським.

[2] Цю назву вводить в обіг Джордж Булос, сам Фреґе цю назву не вживає.

[3] У примітці він зазначає таке: «...[я] передбачаю, що відомо, чим є об'єм поняття» [5, с. 79–80].

[4] Деталі див. «Основи арифметики», § 55, 70–83.

[5] Елегантний і простий спосіб виводу парадоксу пропонує Ґреґорі Каррі. Припустимо, що у системі Фреґе треба розглянути поняття «бути об'ємом поняття, але не підпадати під нього». Чи буде об'єм цього поняття під нього підпадати? Якщо так, то він не є «об'ємом поняття, який не підпадає під нього»; якщо ні, то він підпадає під поняття «об'єм поняття, який не підпадає під нього». В обох випадках маємо суперечність. – Див. [3, с. 129–130].

[6] П'ята аксіома, а точніше «п'ятий основний закон», формулюється так: $\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \equiv \forall x[f(x) = g(x)]$, «об'єм поняття f рівний об'єму поняття g, якщо і тільки якщо значення f(x) і g(x) збігаються для всіх аргументів». Послаблення полягало в тому, що випливання $\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \rightarrow \forall x[f(x) = g(x)]$ замінювалося на $\dot{\varepsilon}f(\varepsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \rightarrow \forall x[x \neq \dot{\varepsilon}f(\varepsilon) \wedge x \neq \dot{\alpha}g(\alpha) \rightarrow (f(x) = g(x))]$, тобто виключався той випадок, коли в якості аргументу береться об'єм якогось з розглядуваних понять. Як вже було сказано, цю модифікацію Фреґе запропонував у додатку, тож далі перед ним стояло завдання переписати відповідно до неї всі попередні доведення.

[7] Наприклад, що в універсумі існує як максимум один предмет – див.: [9].

[8] «Самостійними» ("self-subsistent", "selbständig"), за Фреґе (і неофреґеанцями), є предмети, що існують об'єктивно, тобто незалежно від наявності спостерігача і є незалежними в своєму існуванні від інших предметів.

На підтвердження того, що арифметика виводиться з логіки, Райт пропонує неформальне доведення, що аксіоми Пеано (стандартна аксіоматизація, що схоплює властивості кардинальних чисел) виводяться з логіки предикатів другого порядку з рівністю, якщо додати до неї принцип Г'юма як аксіому. Те, що числа при цьому є самостійними предметами, автор намагається показати через таке міркування: оскільки існує критерій рівності чисел – принцип Г'юма – то поняття «число» є чистим сортовим поняттям[9], а під них підпадають тільки самостійні предмети.

«Фреґеву концепцію…» активно обговорюють, з'являється чимало критичних зауважень. Райт, втім, продовжує розробляти висловлені ідеї та знаходить надійного компаньйона – Боба Гейла, разом з яким вони й сьогодні залишаються головними пропонентами «неофреґеанізму». У 2001 р. виходить збірка їхніх робіт «Дослідження самого розуму: начерки до неофреґеанської філософії математики» [8], де філософи подають більш ретельно розроблену версію своєї програми, відповідають на ряд контраргументів і окреслюють завдання, які ще потребують виконання.

У 2001 р. неофреґеанська програма виглядає більш переконливо у частині виведення арифметики з логіки: на цей момент Джордж Булос вже формально показав, що за планом з «Основ арифметики» в системі «Поняттєпису» (яка є аксіоматизацією другопорядкової логіки предикатів), до якої додано принцип Г'юма в якості аксіоми, можна вивести аксіоми Пеано[10] [2, с. 275–276]. Проте інтерпретація цього результату як успішного втілення неофреґеанської логіцистської програми стикається з рядом концептуальних заперечень. Той же Булос, наприклад, вважав, що ідея «Фреґевої концепції…» виходить з очевидно хибних засновків, наводячи такі міркування.

1) Принцип Г'юма не є аналітичною істиною, тобто законом логіки. По-перше, він не має моделі на скінченних множинах, а аксіоми логіки мають бути істинними незалежно від вибору універсуму міркування[11]. По-друге, принцип Г'юма є аналогічним до, наприклад, п'ятої аксіоми Фреґе, і складно навести підставу, чому він при цьому є законом логіки, а аналогічно сконструйовані принципи – ні.

2) Сам по собі принцип Г'юма не дає підстав трактувати числа як самостійні предмети, і тим паче як самостійні предмети з предметної сфери чистої логіки.

Перший закид неофреґеанці намагаються обійти через відмінне від фреґевського тлумачення аналітичності. Хоча принцип Г'юма, кажуть вони, справді не є скороченням якоїсь з аксіом логіки і не виводиться з цих аксіом, все ж він є аналітичним в силу того, що випливає зі значень понять, які до нього входять (аналогічно до того, як аналітичним є твердження «Будь-що жовте є протяжним»). Відсутність скінченної моделі для принципу Г'юма неофреґеанці відкидають як псевдопроблему: множина чисел є нескінченною, тому нелегітимно вимагати від означення бути істинним на множинах предметів (зокрема скінченних), пояснювати які воно не призначене. Що ж до проблематичності аналогічно сконструйованих принципів – цей аргумент отримав назву «заперечення від поганої компанії», – то Райт і Гейл просто вказують, що оскільки принцип Г'юма є несуперечливим, тоді як п'ята аксіома Фреґе такою не є, то збіг їхньої форми є другорядною обставиною [8, с. 17–18].

Проти другого закиду неофреґеанці знов вказують, що в принципі Г'юма йдеться про рівність певних чисел, а рівність може бути встановлена тільки між предметами, а отже, числа є предметами. При цьому те, що вони належать до чистої логіки, випливає з аналітичності принципу Г'юма.

Розглянуті закиди й контраргументи є лише кількома – хоча й важливими – прикладами з полеміки довкола неофреґеанської програми. У постскриптумі до «Досліджень самого розуму…» Райт і Гейл розміщують список з вісімнадцяти проблем, остаточного розв'язання яких їм ще бракує, і серед них залишаються й обидва закиди Булоса, відповіді на які, як розуміють автори, мали би бути більш переконливими.

Третьою в списку зазначено проблему Цезаря. Вона є однією з ключових для неофреґеанського логіцизму, оскільки від її вирішення залежить, чи містить принцип Г'юма інформації достатньо, аби вважати числа самостійними предметами і відрізняти їх від інших предметів. Саму проблему сформулював ще Фреґе в «Основах арифметики», коли розглядав різні кандидатури на означення числа. У § 56 він розглядає означення виду «поняттю *F* відповідає число n» і приходить до висновку, що так лише фіксується смисл поняття «число n відповідає…», але не формулюються підстави вирішувати, чи буде числом, приміром, Юлій Цезар. Так само Фреґе міркує і в § 66, коли розглядає аналогічний до принципу Г'юма приклад з паралельністю:

---

[9] Детально про це йтиметься у частині про розв'язання проблеми Цезаря.

[10] Цей результат Булос запропонував називати «теоремою Фреґе».

[11] Принцип Г'юма вимагає існування нескінченної області предметів, якщо трактувати числа як предмети, а оскільки обмеження на універсум міркування стосується саме предметів, а не понять, то для поняття, наприклад, «бути меншим або рівним числу n» при області в n буде вимагати існування числа n+1, що призводить до суперечності. Детальніше див.: [2, с. 273–274].

Пряма *a* є паралельною прямій *b*, якщо і тільки якщо напрям прямої *a* збігається з напрямом прямої *b*.

Як говорить Фреґе, з цього означення не можна сказати, чи є одним і тим самим Англія і напрям земної вісі[12], і вбачає у цьому проблему: «Зрозуміло, що ніхто не змішує Англію з напрямом осі Землі, але це – не заслуга нашого пояснення» [5, с. 45].

Отож, проблема Цезаря формулюється так: як на підставі самої лише інформації з принципу Г'юма можна відрізняти числа від предметів, що підпадають під інші поняття, зокрема людей?

Розв'язання проблеми Цезаря в сортовій онтології

Неофреґеанське вирішення проблеми Цезаря базується на так званій «сортовій онтології» і було сформульовано вже у «Фреґевій концепції…» Райта, але після критики зазнало значних змін, тож я зосереджуся на варіанті, викладеному в «Дослідженнях…».

Ідея «сортової онтології» полягає в тому, що існує клас понять, які дозволяють відрізняти предмети, що під них підпадають, не лише від предметів, що підпадають під інші поняття, а й між собою. Такі поняття називаються *«сортовими»* (sortal). Властивості, за якими визначається, чи підпадає предмет під поняття, називаються критерієм застосування (criterion of application). Властивості, за якими розрізняються два предмети, що підпадають під одне й те ж поняття, називаються критерієм ідентичності (criterion of identity). Сортові поняття містять обидва критерії, тоді як усі інші – лише перший.

Сортові поняття[13] поділяються на чотири підкласи.

1) *Чисті*, тобто визначальні для сутності речей, які під них підпадають. Сюди відносяться, наприклад, поняття «диплодок», «зірка», «людина» тощо. Предмет не може перестати підпадати під чисте сортове поняття без того, щоб перестати існувати (принаймні в якості того ж самого предмета).

2) *Перехідними* є сортові поняття, які позначають предмети в стадіях, коли вони переживають суттєві зміни. Прикладами таких понять є «лялечка», «пуголовок» тощо, і їх можна трактувати як чисті сорти.

3) *Змішані* сортові поняття утворюються через запровадження обмежень на чисті: хоробрий горобець, скажений борсук, нервова балерина.

4) *Функціональні*, тобто такі, що позначають певну роль, яку можуть виконувати предмети, що під них підпадають. Це, наприклад, поняття «пожежник», «підставка», «орієнтир». Особливістю функціональних сортових понять є те, що предмети, які під них підпадають, можна ідентифікувати тільки після того, як було з'ясовано, до якого чистого сорту вони належать.

Неофреґеанська філософія математики передбачає, що числа є самостійними розрізнюваними предметами, незалежними в своєму існуванні, тож «число» має бути чистим сортовим поняттям. Завданням Гейла і Райта, отже, є показати, як можна обґрунтувати цю інтуїцію, виходячи лише з принципу Г'юма. Спочатку вони стверджують, що «число» є *сортовим* поняттям, тому що сам принцип Г'юма є очевидним випадком критерію ідентичності – критерієм ідентичності для сорту «число». Те, що в такому варіанті поняттю числа бракує прояснення щодо критерію застосування, відкидається як несуттєве, оскільки критерій застосування існує у всіх понять. На користь того, що «число» є *чистим* сортовим поняттям, неофреґеанці вказують, що принцип Г'юма є аналітичним (а значить визначає числа з необхідністю і не може бути критерієм ідентичності для змішаного сортового поняття), не апелюючи при цьому до інших предметів (тому «число» не є функціональним сортовим поняттям).

Саме на цьому етапі неофреґеанська програма стикається з проблемою Цезаря: як відрізнити число три від, наприклад, єхидни, якщо критерію застосування не сформульовано? Райт і Гейл відповіли б, що єхидна не є числом три, оскільки критерієм ідентичності поняття «єхидна» не є принцип Г'юма, тобто для визначення того, чи є єхидна А і єхидна Б тим самим предметом, не треба перевіряти, чи є взаємно-однозначна відповідність між обсягами якихось понять.

При цьому різні поняття *можуть* мати спільні критерії ідентичності, наприклад та ж єхидна підпадає одночасно і під поняття «ссавець», і «єхидна». Це підштовхує неофреґеанців ввести «категоріальні сортові поняття», тобто такі максимально загальні взаємовиключні чисті сорти, під які підпадають інші чисті сорти. Ідея полягає в тому, що всі чисті сорти можна погрупувати за принципом спільності критерію ідентичності, тобто розбити всю множину предметів на класи еквівалентностей.

[12] Як влучно зазначає Іґнасіо Анґелеллі у рецензії на «Дослідження самого розуму…» [1, с. 90], проблему Цезаря історично коректніше було б назвати «проблемою Англії», оскільки саме її Фреґе наводить як приклад неспроможності принципів, абстрагованих аналогічно до принципу Г'юма, слугувати у якості означень.

[13] У якості абсолютного синоніма «сортового поняття» надалі вживатиметься слово «сорт».

Отож, остаточна версія сортової онтології неофреґеанців виглядає так: усі чисті сортові поняття згруповуються в категорії за ознакою спільності критерію ідентичності, і ці категорії не перетинаються. У такому разі Юлій Цезар не може бути числом, тому що він підпадає під поняття «особа», яке має очевидно відмінний від принципу Г'юма критерій ідентичності. У загальному випадку це можна сформулювати так: наявності критерію ідентичності для певного предмета достатньо, аби виключити його хибну ідентифікацію з предметом, що підпадає під іншу категорію.

Таке вирішення, втім, породжує нові питання.

По-перше, не вистачає доведення, що числа є *єдиним* поняттям у своїй категорії. Додатковою складністю для його побудови буде вимога, щоб воно давало змогу трактувати кардинальні натуральні числа як підмножину ірраціональних, тобто щоб принцип Г'юма був також критерієм ідентичності для ірраціональних чисел.

По-друге, «число» все ж можна витлумачити як функціональне поняття. Хоча принцип Г'юма не говорить прямо, що ідентичність чисел залежить від інших сутностей, але й не виключає цього: числом за цим «імпліцитним означенням» може бути що завгодно постільки, поскільки один і той же предмет буде приписуватися завжди тим поняттям, між об'ємами яких є взаємно-однозначна відповідність. Емоційно й переконливо недостатність принципу Г'юма в якості означення для числа демонструє Іґнасіо Анґелеллі [1], який вважає, що ця проблема робить неофреґеанську програму апріорі хибною.

Таким чином, проблема Цезаря розв'язана принаймні не остаточно, тож Райт і Гейл зовсім небезпідставно залишили її у списку 18 проблем, які ще стоять на порядку денному неофреґеанської філософії математики.

Список літератури

1. Angelelli I. On Neo-Fregeanism : Review on Hale B., Wright C. The Reason's Proper Study. Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics / Ignacio Angelelli // The Review of Modern Logic. – 2003, Dec. – 2004, Aug. – Vol. 9. – № 3&4, Issue 30. – P. 87–97.
2. Boolos G. The standard of equality of numbers / George Boolos // Meaning and method : Essays in honor of Hilary Putnam ; ed. by G. Boolos. – Cambridge UP : Cambridge, 1990. – P. 261–277.
3. Currie G. Frege : An Introduction to His Philosophy / Gregory Currie. – Brighton : Harvester Press, 1982. – 212 p.
4. Frege G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens / Gottlob Frege. – Halle : Verlag von L. Nebert, 1879. – 89 s.
5. Frege G. Die Grundlagen der Arithmetik : Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl / Gottlob Frege. – Breslau : Verlag von Wilhelm Koebner, 1884. – 120 s.
6. Frege G. Funktion, Begriff, Bedeutung : Fünf logische Studien / Gottlob Frege ; hg. und einl. von G. Patzig. – Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 2008. – 84 s.
7. Frege G. Wissenschaftlicher Briefwechsel / Gottlob Frege ; [Unter Mitwirkung von G. Gabriel und W. Rodding bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von H. Hermes et al.]. – Bd. 2. – Hamburg : Felix Meiner Verlag, 1976. – 310 s.
8. Hale B. The Reason's Proper Study : Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics / Bob Hale, Crispin Wright. – Oxford : Clarendon Press, 2001. – 472 p.
9. Quine W. V. On Frege's Way Out / W. V. Quine // Mind, New Series. – Apr., 1955. – Vol. 64, № 254. – P. 145–159.
10. Wright C. Frege's Conception of Numbers as Objects / Crispin Wright. – Aberdeen : Aberdeen UP, 1983. – 193 p.

Y. Poliakov

THE CEASAR PROBLEM IN THE NEO-FREGEAN PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

The paper presents a general outline of the neo-Fregean philosophy of mathematics championed by Crispin Wright and Bob Hale and contains a detailed presentation of a sortal-based ontology solution to the Caesar problem.

Keywords: philosophy of mathematics, neo-fregeanism, Gottlob Frege, Crispin Wright, Bob Hale, numbers, the Caesar problem, Hume's Principle.

Матеріал надійшов 11.01.2014