ФіЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 512.64

Тимошенко А. Г., Лузан К. О., Рогачова Т. В.

СТВОРЕННЯ РЯДУ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ З УНІКАЛЬНИМИ СУМАМИ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуто більш досконалий спосіб генерації абсолютно адитивних послідовностей. Пропонований ряд поліпшує головний критерій створення таких рядів - зменшення найбільшого елемента [1].

Згідно з визначенням адитивна послідовність містить цілі числа, сума будь-яких елементів має унікальне значення, тобто не збігається з сумою інших елементів. Розглянемо новий метод побудови такого ряду, де максимальний елемент менший, ніж в [1].

Візьмемо кількість елементів ряду за *n*. Для $\eta = 1$ ряд буде таким: 1. Для побудови наступних послідовностей за перший елемент візьмемо один раз перший елемент попередньої послідовності, двічі другий елемент попередньої послідовності, тричі - третій і т. д. На основі викладеного можемо отримати формулу для першого елемента ряду довжиною η через суму *k* перших елементів попередньої послідовності. На и-му кроці число *k* знаходимо з наступних систем нерівностей:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) < n \le$$
$$\le 1 + 2 + \ldots + k \Leftrightarrow k*(k-1)/2 < n \le (k+1)*k/2$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} k^2 - k - 2n < 0 \\ k^2 + k - 2n \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < (1 + \sqrt{1+8n})/2 \\ k \ge (-1 + \sqrt{1+8})/2 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$k = \begin{cases} [(1 + \sqrt{1+8n})/2], \text{ при } (1 + \sqrt{1+8n})/2 - \text{цілому} \\ [(1 + \sqrt{1+8n})/2] - 1, \text{ при } (1 + \sqrt{1+8n})/2 - \text{нецілому}. \end{cases}$$

Звідки $k = [(1 + \sqrt{1+8n})/2]$, де оператор *[x]:* «ціла частина *x*».

Таким чином, для ряду довжини η перший елемент - це $k = [(1 + \sqrt{1+8n})/2]$-й член попередньої послідовності. Для отримання наступних елементів ряду додаємо до першого елемента поступово елементи попереднього ряду.

Таблиця. **Побудова рядів**

η										
1										1
2									1	2
3								2	3	4
4							3	5	6	7
5						6	9	11	12	13
6					11	17	20	22	23	24
7				20	31	37	40	42	43	44
8			40	60	71	77	80	82	83	84
		77	117	137	148	154	157	159	160	161
10	148	225	265	285	296	302	305	307	308	309

Наприклад, збудуємо ряд довжиною 10 елементів (таблиця).

Доведемо, що отримана послідовність має властивості абсолютно адитивного ряду. Для цього використаємо метод математичної індукції:

1. Послідовність довжини 1 - абсолютно адитивна.

2. Візьмемо за основу абсолютну адитивність ряду довжини ***к*.**

3. Доведемо абсолютну адитивність ряду довжини $к + 1$.

Нехай $A_1, A_2, A_p, , A_k$ - абсолютно адитивна послідовність; $p = [(1 + \sqrt{8(k+1)})/2]$, а S_1, S_2, $S_3, \ldots, S_{2^k-1}$ - набір всіх її сум.

$A_p, A_1 + A_p, A_2 + A_p, A_3 + A_p, \ldots, A_p + A_p, A_k + A_k$ - нова послідовність

$S_1 + 2*A_p$, $S_2 + 2*A_p$, $\ldots$, $S_{b1} + 2*A_p$, $S_{b1+1} + 3*A_p$, $S_{b1+2} + 3*A_p$, $\ldots$, $S_{b1+b2} + 3*A_p$, $\ldots$, $S_{b1+b2+\ldots+bk} + k*A_p$, A_p - набір всіх її сум, причому $S_1, S_2\ldots$ - суми попереднього ряду.

Необхідно довести, що в цьому наборі всі суми різні.

Розіб'ємо цей набір на *к* наборів.

1) $S_1 + 2*A_p$, $S_2 + 2*A_p$, …, $S_{b1} + 2*A_p$ $\{S_i + 2*A_p,\ i = 1..b1\}$;

2) $S_{b1+1} + 3*A_p$, $S_{b1+2} + 3*A_p$, …, $S_{b1+b2} + 3*A_p$ $\{S_i + 2*A_p,\ i = b_1 + 1..b_2\}$

k–1) $S_{b1+b2\ldots+bk-1} + k*A_p$ $\{S_i + k*A_p,\ i = b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}$

k) A_p.

Тут $b_i = C_k^{i+1} = k! / ((i + 1)!(k - i - 1)!)$;
$b_1 = k!/(2(k-2)!) = k(k-1)/2$; $b_{k-1} = 1$.

У наборі (1), якщо $S_i + 2*A_p = S_j + 2*A_p$, то $S_i = S_j$, що суперечить припущенню 2.

Аналогічно доводимо, що суми в межах кожного з наборів не повторюються.

Тепер залишається довести, що суми одного набору не збігаються з сумами іншого набору. Спочатку доведемо, що суми набору *к)* не зустрічаються в інших. Це видно, бо $S_i + N*A_p > A_p\ (N > 1, A_p > 0)$.

Залишається довести, що для будь-яких наборів *і* та *j* жодна сума одного набору не дорівнює будь-якій сумі іншого набору.

Результати побудови рядів наведено в таблиці. Наведемо також найбільшу послідовність, для якої перевірено умови унікальності сум будь-яких наборів елементів ($n = 33$):

1036138646	1555246818	1815322453	1945621045
2010770341	2043476457	2059895799	2068138892
2072277292	2074354990	2075398088	2075919637
2076182573	2076315141	2076381985	2076415692
2076432688	2076441186	2076445509	2076447709
2076448829	2076449399	2076449684	2076449832
2076449909	2076449949	2076449969	2076449980
2076449986	2076449989	2076449991	2076449992
2076449993			

Для порівняння максимальний елемент ряду 2" (також адитивний ряд з мінімальною сумою елементів) дорівнює 4294967296, а в пропонованому ряду відповідний елемент 2076449993. Відношення максимальних чисел цих рядів дорівнює 2,068, тобто отримана послідовність має максимальний елемент більш як удвічі менший.

1. *Алоян Г. С, Тимошенко А. Г.* Способ построения ряда аддитивно отличающихся чисел // Кибернетика.- 1969 - № 6.

A. G. Timoshenko, K. O. Luzon, T. V. Rogacheva

AN ADDITIVE SEQUENCE GENERATION METHOD

More perfect absolute additive sequence generation method than well-known is proposed.