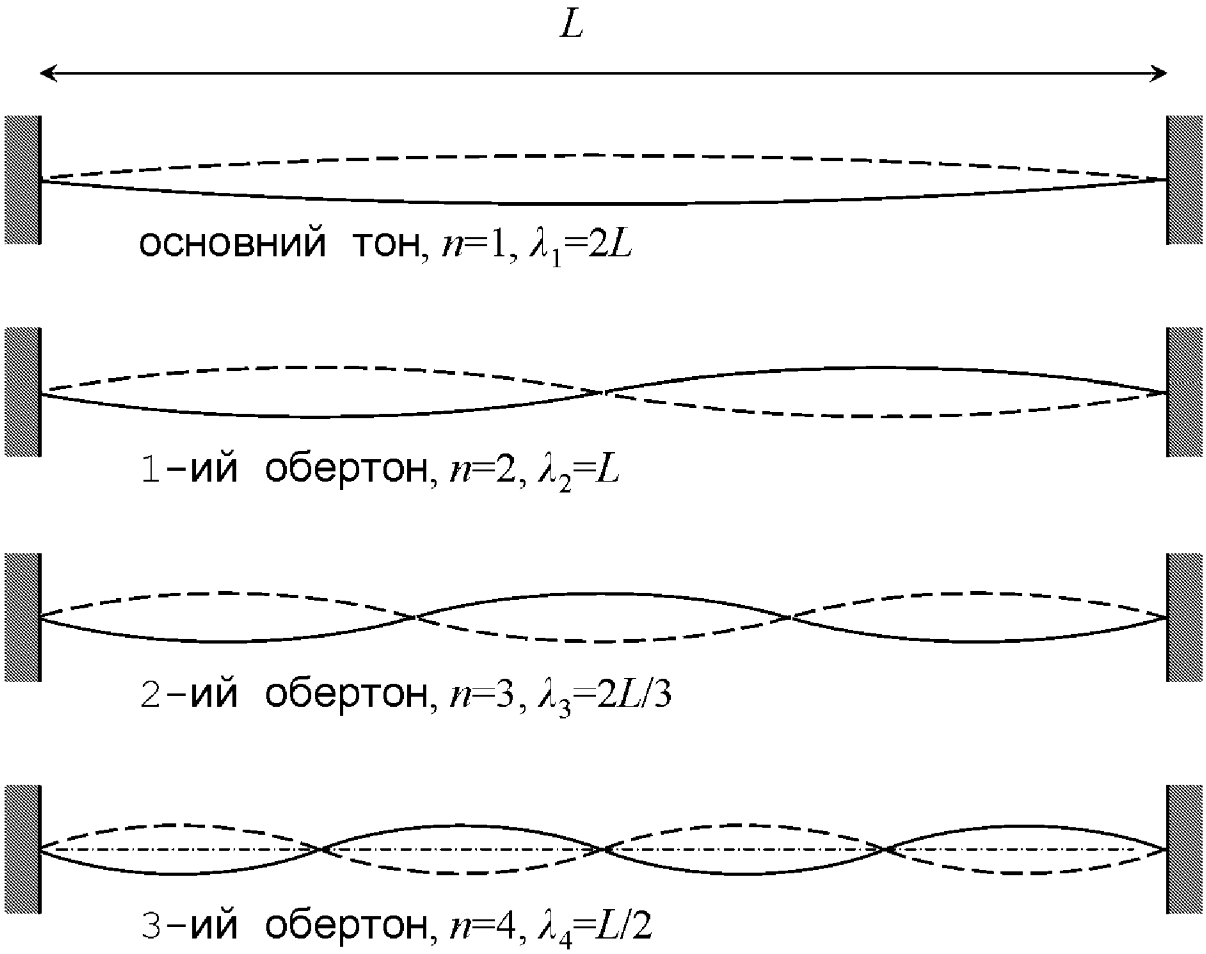
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
ФАКУЛЬТЕТ ПРИРОДНИЧИХ НАУК
КАФЕДРА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ НАУК

А.К.Дорош, Р.М.Мельник

ХВИЛІ У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ. СТРУНА

- біжуча хвиля у струні, рівняння хвильового руху
- стояча хвиля, резонансні моди
- дослідження власних коливань струни
- визначення фізичних параметрів струни за параметрами стоячої хвилі



Стояча хвиля у струні

Струна – це тонка, туго напнута, міцна линва. В давнину для виготовлення музичних інструментів, тятиви лука, прядок тощо використовували спеціально підготовлені жили тварин, кінський волос, волокна рослин. Зараз струни – це синтетичні волокна або металічні нитки (хорди).

Біжуча хвиля

Гармонійну хвилю у струні змоделюємо на системі точкових мас з'єднаних тонкими натягнутими пружинками, Рис. 1, а. Позначимо амплітуду відхилення довільної точкової маси від рівноважного положення натягу ξ, A – максимальна амплітуда відхилення від прямої Ox. У точці з координатою x_0 прикладемо вимушуюче гармонійне (по закону синуса чи косинуса) відхилятися точкової маси від положення рівноваги

$$\xi(t, x_0) = A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{1}$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – циклічна частота, ν – частота, T – період, φ_0 – початкова фаза коливань.

Збурення з точки x_0 буде передаватися по зв'язках з швидкістю c, залежною від пружних властивостей з'єднуючих пружинок. За один період гармонійного коливання T фаза коливань φ_0 переміститься на відстань $\lambda = \mathrm{c}\,T$,

$$\mathrm{c} = \lambda\,\nu. \tag{2}$$

Відстань λ між двома частинками, що коливаються у однаковій фазі має назву *довжини хвилі.* У нескінченній гармонійній хвилі однакову фазу коливань мають довільні дві частинки, що знаходяться на відстані 2λ, 3λ і т.д.

Швидкість поширення хвилі c не залежить від частоти коливань ν, не залежить від способу збурення, від амплітуди у

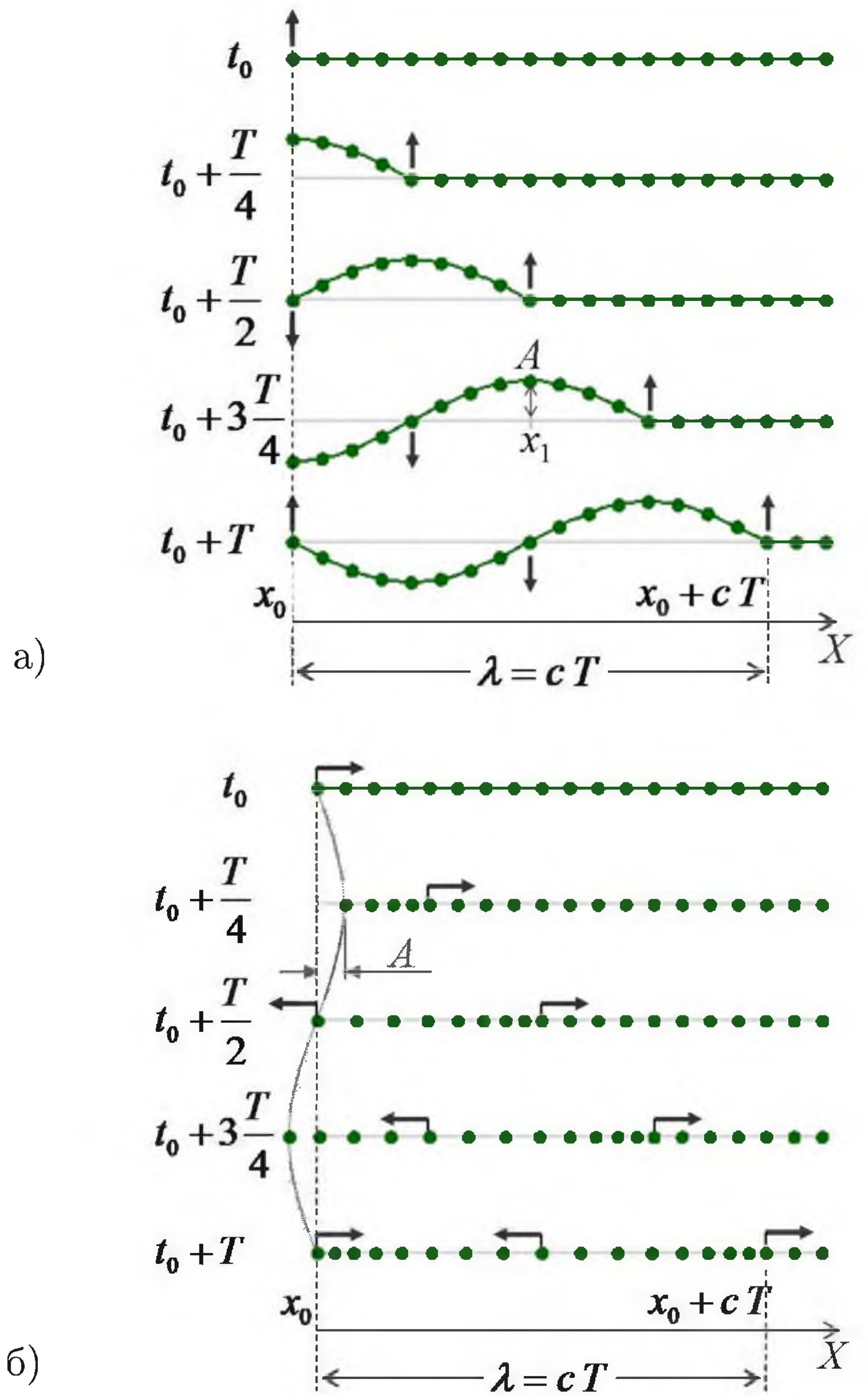


Рис. 1. Серія зображень точкових мас із пружними зв'язками через певні інтервали часу $\frac{T}{4}$, $\frac{2T}{4}$, $\frac{3T}{4}$, T від початку t_0 збудження гармонійних коливань, T – період коливань: а) поперечна хвиля, б) поздовжна хвиля. Зовнішня сила примушує частинку координати x_0 коливатися грамонійно, з максимальною амплітудою A. Енергія коливання наступних частинок передається по пружних зв'язках. Стрілками на рисунку вказані напрямки швидкості вимушеного зміщення частинок від положення рівноваги.

випадку малих ξ [1], залежить від пружних властивостей струни ("пружинок" моделі). Довжина хвилі оберненопропорційна частоті $\lambda = c/\nu$ і пропорційна періоду гармонійних коливань $\lambda = c\,T$. При більшій частоті нав'язаних коливань ν буде меншим період T, утворюються хвилі з меншою довжиною λ.

З часом амплітуда збурення у пружному середовищі не змінюється, змінюється її положення. Такі результати дають експериментальне спостереження і теоретичне обгрунтування пружних процесів у струні і в пружних середовищах.

За час $t - t_0$ амплітуда збурення із координати x_0 переміститься у координату x з швидкістю $c = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$. Збурення в координатах (t, x) таке саме, як і в координатах (t_0, x_0),

$$\xi(t,x) = \xi(t_0,x_0) = A\,\cos(\omega\,t_0 + \varphi_0) =$$
$$= A\,\cos(\omega\,(t - \frac{x - x_0}{c}) + \varphi_0) = A\,\cos(\omega\,t - k\,x + \psi_0),$$

хвильове число $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, фаза гармонійної хвилі $\varphi(t,x) = \omega\,t - k\,x + \psi_0$, $\psi_0 = \varphi_0 + k\,x_0$. Формула *біжучої гармонійної хвилі*

$$\xi(t,x) = A\cos(\omega\,t - k\,x + \psi_0). \tag{3}$$

Надалі, без особливої потреби, опустимо доданок ψ_0.

У формулі (3) час і координата знаходження збурення взаємозв'язані. Для прикладу розглянемо координату x_1, Рис. 1, а після того, як до неї дійшло збурення. Коливання в ній повторюють коливання в коорд. x_0 з запізненням по часу на $T/2$.

$$\xi(t_0,x_0) = \xi(t_0 + T/2, x_1) = 0,$$
$$\xi(t_0 + T/4, x_0) = \xi(t_0 + 3T/4, x_1) = A,$$
$$\xi(t, x_0) = \xi(t + T/2, x_1).$$

Підстановкою $x = x_1$ у (3) отримаємо $\xi(t, x_1) = A\cos(\omega\,t - k\,x_1 + \psi_0)$, такий самий коливний рух (1), тільки з поправкою в значенні початкової фази $\varphi_1 = -k\,x_1 + \psi_0$. Будь яка точка струни,

[1] Велика потужність (амплітуда) збурення супроводжується складними ефектами, розривами самого середовища (струни).

до якої дійшло гармонійне збурення, здійснює гармонійні коливання з частотою збудника коливань.

Гармонійна хвиля у струні – це поширення фази гармонійних коливань поперечних зміщень струни вздовж прямої її натягу. Якщо зміщення частинок відбуваються поперек напрямку руху хвилі, то таку хвилю називають *поперечною*, Рис. 1,а. При зміщенні часток середовища у напрямку руху біжучої хвилі, її називають *поздовжною*, Рис. 1,б. Поздовжною є звукова хвиля. Поздовжні хвилі властиві для суцільних середовищ. Вираз біжучої поздовжньої гармонійної хвилі такий самий, як і для поперечної хвилі (3).

Біжуча хвиля не обов'язково гармонійна. Амплітуда $\xi(x)$ може мати довільну іншу форму відхилення струни від положення рівноваги. Рівноважне положення струни – пряма, вздовж якої прикладена сила натягу F (Рис. 2). Якщо створити локальне збурення, вдарити по струні в окремій малій ділянці, то виникне деформація (лат. deformatio – зміна форми тіла). Деформована ділянка буде повертатися до положення натягу. Завдяки пружним властивостям, зумовленим тим самим натягом, збурення буде передаватися по струні в обидва боки (Рис. 2, б). *Механічними пружними хвилями* називаються процеси поширення деформації в пружних суцільних середовищах, у струні.

Якщо амплітуда збурення ξ у момент часу $t = 0$ має координату x_0 (Рис.3), то за час t відбудеться переміщення на відстань $\mathrm{c}t$ у положення з координатою $x = x_0 + \mathrm{c}t$. Відповідно $\xi(0, x_0) = \xi(0, x - \mathrm{c}t) = \xi(t, x)$. При русі хвилі в протилежну сторону $\xi(0, x_0) = \xi(t, x + \mathrm{c}t)$. Хвилю

$$\xi = \xi(x \pm \mathrm{c}t), \quad \text{або у вигляді} \quad \xi = \xi(t \pm \frac{x}{\mathrm{c}}), \tag{4}$$

називають *біжучою*. Зв'язок $t \pm \frac{x}{\mathrm{c}}$ вказує на зміну координати x збурення ξ у часі t з швидкістю c. Знак "$-$" буде при русі у напрямку зростання координати x, "+" – при русі у сторону від'ємних значень x. Біжуча хвиля може бути гармонійною (3) при гармонійному збуренні, або мати довільну іншу форму нав'язаної зовні деформації.

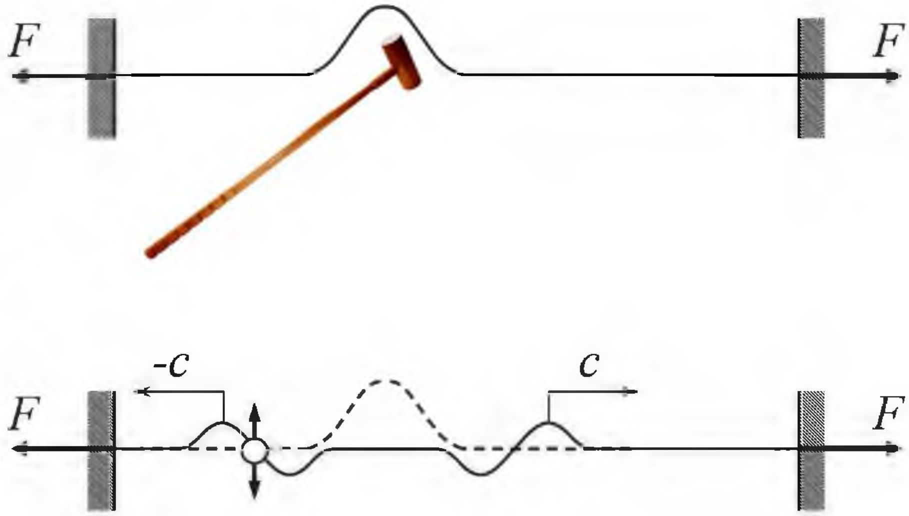


Рис. 2. а) Рівноважне положення струни – це пряма, вздовж якої діє сила натягу F. Зовнішній, направлений поперек струни імпульс, деформує струну. б) Після збурення у струні, локальне відхилення від прямої натягу зображене пунктирною лінією, буде поширюватися деформація збурення в обидва боки від області збудження. Швидкість поширення – це швидкість хвилі c. Білий кружок – збільшена частка струни, стрілки біля кружка – можливі напрямки зміщення від положення рівноваги.

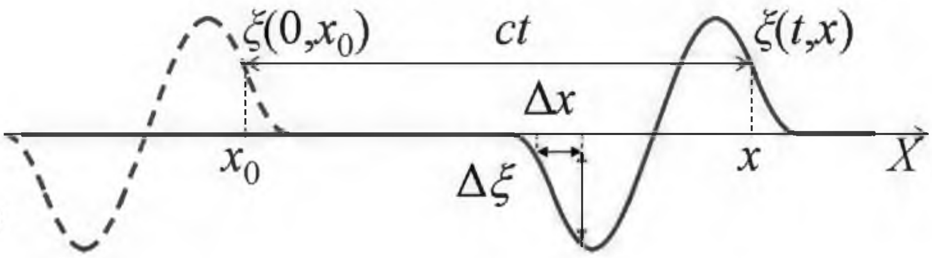


Рис. 3. Пунктирною лінією показано збурення струни в певний момент часу $t_0 = 0$. Відхилення $\xi(0, x_0)$ за час t переміститься вздовж струни на відстань $x - x_0 = \mathrm{c}t$. Величина деформації $\varepsilon = \dfrac{\Delta\xi}{\Delta x}$ є відношенням приросту амплітуди перепаду збурення до приросту координати вздовж осі натягу струни.

Крім амплітуди ξ і швидкості хвилі c існують інші параметри, якими доводится оперувати при розгляді хвильових процесів. Швидкість коливання часток струни $u = \dfrac{d\xi}{dt}$ – швидкість їх поперечного відхилення від прямої натягу. Локальна деформація струни $\varepsilon = \dfrac{d\xi}{dx}$ – безрозмірна величина відношення приросту амплітуди до приросту координати вздовж осі натягу линви.

При поширенні гармонійної хвилі (3) у струні гармонійними будуть і деформація $\varepsilon = \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = k\,A\sin(\omega\,t - k\,x)$ з максимальною амплітудою деформації $k\,A$, і швидкість зміщення частинок $u = \dfrac{\partial\xi}{\partial t} = -A\,\omega\sin(\omega\,t - k\,x)$ від прямої натягу струни з максимальним значеннями швидкості $\omega\,A$.

У наступному параграфі "Диференційне рівняння хвильового руху" показано, що за умови $\varepsilon \ll 1$, квадратична швидкість хвилі у струні

$$\mathrm{c}^2 = \frac{\sigma}{\rho} \tag{5}$$

визначається напругою поздовжнього розтягу

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{6}$$

і густиною матеріалу ρ, з якого виготовлена струна поперечного перерізу S.

При малих амплітудах пружних збурень швидкість хвилі залежить від пружних характеристик матеріалу, фізичних параметрів речовини, у якій рухається хвиля. Визначення швидкості хвилі використовують для знаходження параметрів пружності, фізичних, хімічних, біологічних параметрів середовища. По перепадах швидкості чи розсіянню хвилі у матеріалах визначають зміни у будові тіл, їх гетерофазного складу, проводиться діагностика матеріалів на наявність дефектів, неоднорідностей речовини.

Диференційне рівняння хвильового руху

Струна натягнута вздовж осі Ox при локальному збуренні має зміщення частин струни перпендикулярно прямій натягу. Мала частина довжиною Δl має масу $\Delta m = \rho S \Delta l$, S – поперечний перетин, ρ – густина матеріалу струни. Згідно другого закону Ньютона, маса Δm рухається з прискоренням $a = \partial^2\xi/\partial t^2$, під дією рівнодіючої прикладених до неї проекцій сил

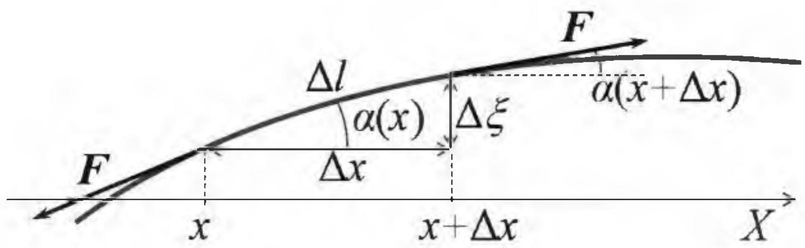


Рис. 4. Мала частина струни довжини Δl, з деформацією $\varepsilon = \dfrac{\Delta\xi}{\Delta x}$. На неї діє повертаюча в положення рівноваги сила $F\sin\alpha(x+\Delta x) - F\sin\alpha(x)$, перпендикулярна до напрямку натягу струни Ox.

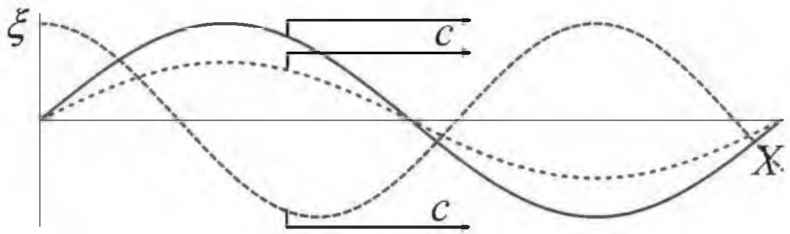


Рис. 5. Швидкість хвилі c однакова для різних випадків деформації струни при умові малих значень деформації.

вздовж $O\xi$ (Рис. 4) $F\sin\alpha(x+\Delta x) - F\sin\alpha(x) = \rho S \Delta l \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. З умови малих амплітуд $\Delta\xi \ll \Delta x$, $\Delta\xi = \Delta x \operatorname{tg}\alpha \approx \Delta x\, \alpha$, $\Delta x \approx \Delta l$. За означеннями похідних $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\partial\xi}{\partial x}$, $F\dfrac{1}{\Delta x}\left(\left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x}\right) \approx \rho S \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho S}{F}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \text{ позначимо } \mathrm{c}^2 = \frac{F}{\rho S}. \tag{7}$$

Розв'язку такого диференціального рівняння задовільняє біжуча хвиля (4). Справді, підставимо (4) у (7), означивши $\varphi = t \pm \dfrac{x}{\mathrm{c}}$, отримаємо

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\frac{1}{\mathrm{c}^2}; \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}.$$

З рівняння (7) випливає, що при умові $\varepsilon \ll 1$, швидкість хвилі залежить від сили натягу струни, параметрів густини, площі поперечного перерізу і не залежить від значень деформації ε, амплітуди відхилення ξ (Рис. 5).

Позначимо $\varphi = t \pm \dfrac{x}{\mathrm{c}}$, тоді

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \pm\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{1}{\mathrm{c}}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} = \pm\frac{1}{\mathrm{c}}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right),$$

значення деформації і швидкість коливань взаємозв'язані

$$\varepsilon = \pm\frac{u}{c}. \tag{8}$$

Деформації ε у струні малі, великі деформації можуть привести до розриву струни. З умови $\varepsilon \ll 1$ і з (8) випливає, що швидкість перенесення енергії збурення c набагато більша за швидкість поперечних зміщень u, $u \ll c$.

Максимальна амплітуда коливань хвилі A зумовлена потужністю джерела їх збудження. Як відомо з курсу механіки енергія стискання (розтягу) Δx пружини з коефіцієнтом пружності μ передається пружині і становить $U = \mu\,\Delta x^2/2$. Енергія гармонійних відхилень від прямої натягу струни також зумовлена пружними зміщеннями часток, пропорційна квадрату амплітуди зміщень $U \sim A^2$. По пружних зв'язках передається енергія коливань часток струни. Енергія збурення могла б довго зберігатися в струні, якби не було сил дисипації (розсіяння) енергії руху в повітрі через в'язке тертя повітря і можливих не пружних чинників у самій струні.

Рівняння (7) має окремий роз'язок у розділених змінних. Допустимо, що положення координати збурення x не залежить від часу t і функцію $\xi(t,x)$ можна подати у вигляді добутку функцій по цих змінних $\xi(t,x) = \tau(t)\,\chi(x)$. Підстановкою у (7) і діленням на $\tau(t)\,\chi(x)$ отримаємо:

$$\frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x^2}\frac{1}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tau(t)}{\partial t^2}\frac{1}{\tau(t)}.$$

У довільній точці x і в довільний момент часу t рівність можлива тільки у випадку незалежності від часу та координати виразів з обох боків від знаку рівності. Тобто обидві частини рівні константі. Якщо константа додатна, то розв'язком буде експонентне затухання. Такий випадок відповідає малим пружним силам і в оточенні середовища великої в'язкості. В них збурення швидко затухають. При від'ємній константі:

$$\frac{\partial^2\chi(x)}{\partial x^2}\frac{1}{\chi(x)} = -k^2, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tau(t)}{\partial t^2}\frac{1}{\tau(t)} = -k^2,$$

– це диференціальні рівняння коливного руху з розв'язками $\chi(x) = \chi_0\cos(k\,x)$, $\tau(t) = \tau_0\cos(k\,c\,t)$. Такі розв'язки відповідають випадку стоячої хвилі.

Стояча хвиля

Швидкість хвилі у пружних середовищах доволі велика, сотні і тисячі метрів за секунду. Складно спостерігати чи вимірювати швидкість хвилі прямими методами. Застосовуються інтерференційні методи, швидкість хвилі знаходять за параметрами інтерференції. Таким є випадок застосування стоячих хвиль.

Дві біжучі хвилі однакової амплітуди і частоти, що рухаються в протилежні сторони вздовж осі Ox, накладаються

$$\xi_S = \xi_1 + \xi_2 = A\cos(\omega\, t - k\, x) + A\cos(\omega\, t + k\, x) = 2A\cos(\omega\, t)\cos(k\, x).$$

Сумарна (обвідна) хвиля

$$\xi_S(t,x) = 2\,A\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)\,\cos(\frac{2\,\pi}{\lambda}\,x) \tag{9}$$

"стоїть" – нема з'язку між часом і координатою. Коливання часток середовища відбуваються без переміщення фази коливань. Таку хвилю називають *стоячою*. Амплітуда стоячої хвилі $\xi_S(t,x) = \tau(t)\,\chi(x)$ розділяється на дві, незалежні у аргументах, гармонійні функції $\tau(t) = \sqrt{A}\cos(\omega\,t)$ і $\chi(x) = \sqrt{A}\cos(k\,x)$.

На Рис.6 представлена серія "знімків" стоячої хвилі утвореної накладання двох гармонійних хвиль, що рухаються в протилежні сторони. Спостерігаються *вузлові точки* з відсутнім коливання у них і *пучності* з максимальною амплітудою коливань. Останній "знімок" Рис.6 – момент часу з максимальною амплітудою у пучностях. Є такі моменти часу, коли у всіх точках стоячої хвилі амплітуда рівна нулю – третій зверху "знімок".

У *пучностях*, синфазне накладання хвиль ξ_1 і ξ_2, максимальна можлива амплітуда $2A$. Це такі координати $x_\text{п}$, що $\cos(2\,\pi\,\frac{x_\text{п}}{\lambda}) = \cos(m\,\pi) = \pm 1$, m – ціле,

$$x_\text{п} = m\,\frac{\lambda}{2}, \quad m\text{– ціле.} \tag{10}$$

"Сусідні" пучності $m-1$ і $m+1$ знаходяться на відстані $\frac{\lambda}{2}$, в них коливання протилежного напрямку до коливань в точці m. Якщо в заданий момент часу у одній пучності $\cos(m\pi) = 1$ з парним m, то амплітуда додатна, рівна $2A$. У наступній пучності $\cos((m+1)\pi) = -1$ – від'ємна амплітуда, $-2A$. У стоячій хвилі дві довільні точки на відстані півдовжини $\lambda/2$ коливаються у протилежних фазах.

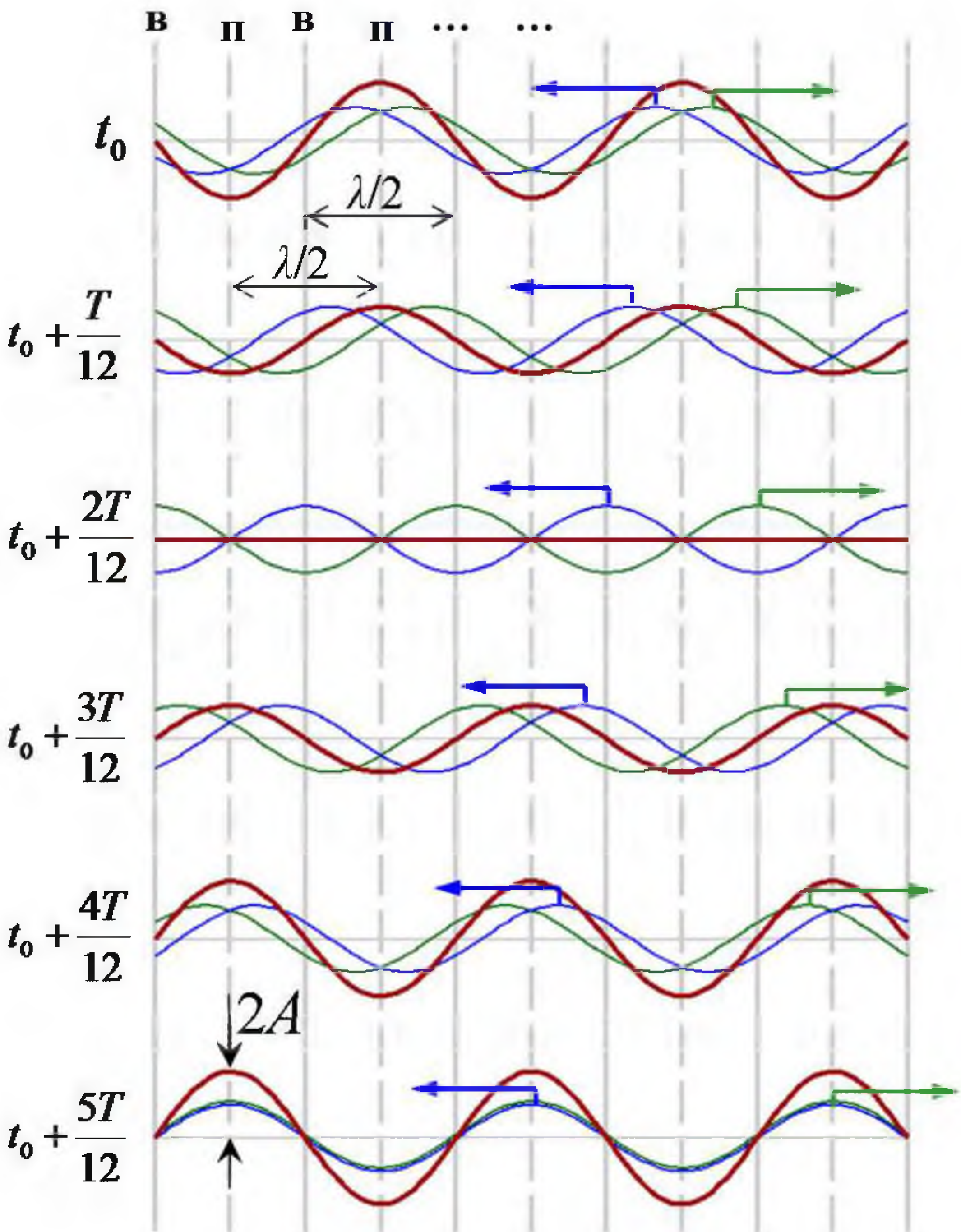


Рис. 6. Серія зображень накладання двох протилежно направлених біжучих хвиль однакової частоти та амплітуди у різні моменти часу. Біжучі хвилі зображені тонкими лініями (зелена і синя), амплітуди їх коливання додаються і утворюють стоячу хвилю – жирна (червона) лінія. Стояча хвиля має координати максимальної амплітуди коливань, названі пучностями, знаходяться над допоміжними сірими вертикальними суцільними лініями (”**п**”). Вузлові координати відсутніх коливань – над пунктирними сірими вертикалями (”**в**”). Пучності, як і вузли рівновіддалені на полудовжину хвилі $\frac{\lambda}{2}$.

Координати *вузлових* точок $x_{\text{в}}$ знаходяться з умови $\xi_S(t, x_{\text{в}}) = 0$ в довільний момент часу. Має виконуватися рівність $\cos(2\pi\,\frac{x_{\text{в}}}{\lambda}) = \cos(m\pi + \frac{\pi}{2}) = 0, \;\; m$ – ціле :

$$x_{\text{в}} = (m + \frac{1}{2})\,\frac{\lambda}{2}, \quad m\text{– ціле.} \tag{11}$$

У пучностях однакова фаза коливань, енергія коливання хвиль взаємно підсилюється. У вузлах коливання протифазні – енергія коливань гаситься. Спостерігається *інтерференція* (лат. inter – між, взаємний; ferens (ferentis) – несучий, переносимий) — посилення або послаблення інтенсивності між носіями енергії. В даному випадку носії енергії дві хвилі, що рухаються одна на зустріч другій. Кожна хвиля переносить енергію у протилежному напрямку. Виходить так, що сумарна енергія не переноситься, є енергією коливань стоячої хвилі, ніби ”консервується” в ній.

Лабораторна робота
Дослідження власних коливань струни

Мета роботи:

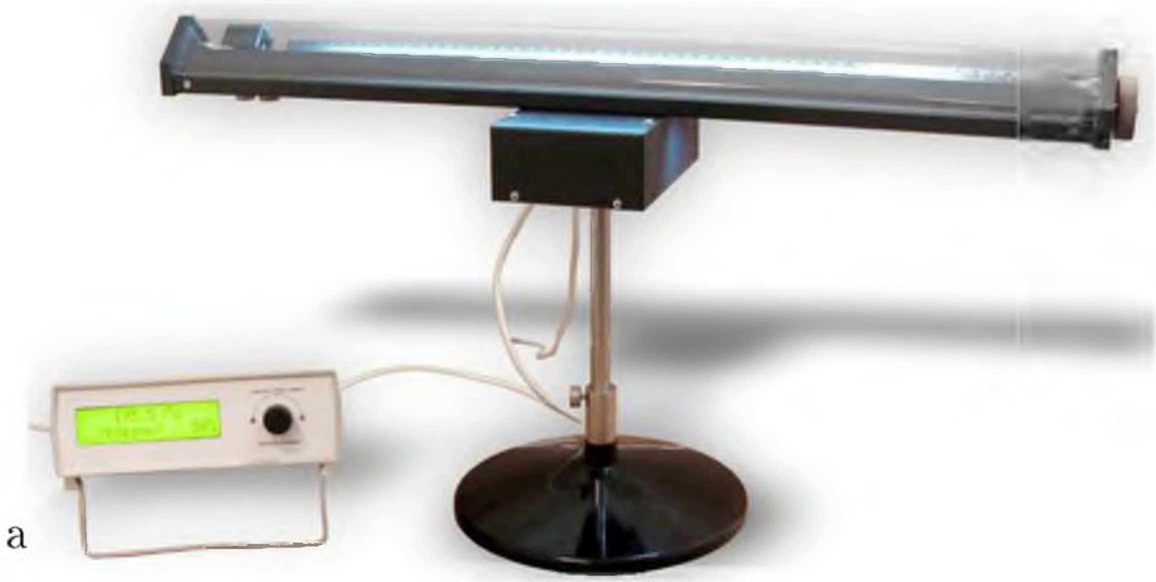
- знаходження частот власних коливань струни, перевірка відбору частот довжиною резонатора;
- знаходження швидкості біжучої хвилі у струні за параметрами стоячої хвилі при різних значеннях напруги розтягу струни, знаходження залежності швидкості хвилі від напруги розтягу; перевірка залежності швидкості хвилі у струні від частоти коливань;
- знаходження густини матеріалу струни.

Опис установки ФПВ-04

Для дослідження стоячих хвиль струни використовується установка ФПВ-04, Рис. 7. Установка складається з генератора частот і закріпленого на штативі корпусу із захисним покривним прозорим пластиком. Під прозорим пластиком знаходиться струна, на пластику міліметрова шкала для вимірювання довжини струни L чи довжини хвилі λ.

Струна - натягнутий металічний провід. Робоча довжина L задається двома підпираючими повзунками `П`. Провід перекинутий через блок `Б`, кріпиться до динамометра `Д`. Зліва, за відсутності повзунка, точкою підпирання буде сам блок в точці дотику струни до блока. Сила натягу провідника така ж, як і натяг пружини динамометра. Значення сили розтягу F на шкалі динамометра вказує стрілка прикріплена до пружини. Показання шкали в межах від $0\,\text{Н}$ до $0,6\,\text{Н}$. Для вищої точності вимірювань потрібно користуватися діапазоном $0,2 \div 0,5\,\text{Н}$. Ціна поділки шкали динамометра $0,01\,\text{Н}$. Зміна натягу струни задається поворотом ручки `Р` у правому торці туби приладу.

Увага! Не можна задавати силу натягу більше $0,6\,\text{Н}$.



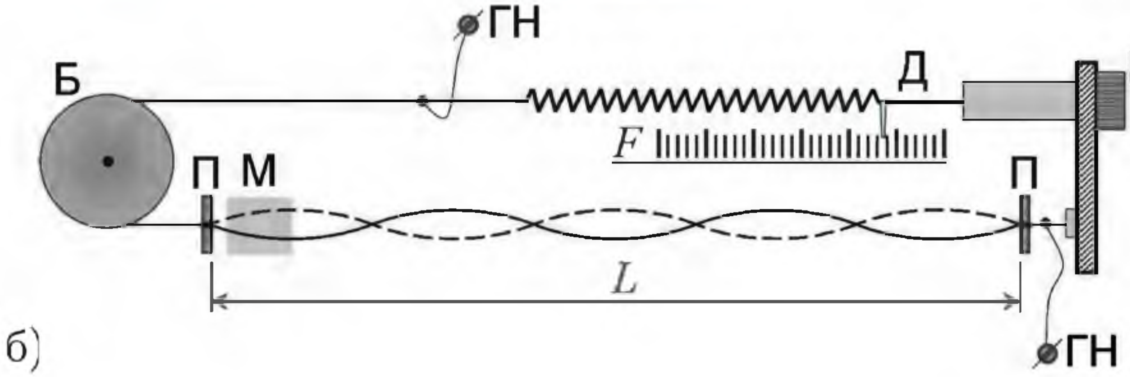


Рис. 7. а) Установка ФПВ-04. б) Схематичне зображення приладу з струною.

Прилад з струною під'єднується до мережі живлення і до генератора низької частоти. При вмиканні засвічується лампа підсвітки для кращого спостереження коливань струни. До струни підпаяні провідники з'єднання із генератором низьких частот `ГН`. Генератор дозволяє задавати у струні змінний гармонійний струм в діапазоні $16 \div 400$ Гц поворотом ручки на передній панелі. На дисплеї висвічуються значення частоти. Кожного разу при вмиканні генератор налаштований на частоту 16 Гц.

Струна знаходиться між полюсами постійного магніту `M` перпендикулярно лініям напруженості магнітного поля. Згідно закону Ампера, на елемент провідника з струмом у магнітному полі діє сила перпендикулярно до ліній напруженості поля і до напрямку струму. При проходженні змінного гармонійного струму діє змінного напрямку сила, яка заставляє коливатися ту частину струни, що знаходиться у магнітному полі. Струна деформується, від зони збурення хвилі $\xi_1 = A\,\cos(2\,\pi\,\nu\,(t - x/\mathrm{c}))$ і $\xi_2 = A\,\cos(2\,\pi\,\nu\,(t + x/\mathrm{c}))$ поширюються у обидва боки. На кінцях струни хвиля відбивається і продовжує рух в протилежному напрямку. Хвилі, збуджувані безперестанку генератором, багатократно накладаються. Відбувається взаємне гашення невпорядкованого накладання багатократно відбитої хвилі. Важливо також те, що хвиля після відбивання від краю не буде співпадати по фазі із збуджуючими коливаннями заданими генератором. І тільки у випаду окремих частот названих власними частотами струни утворюється стояча хвиля.

Власні частоти струни

У точках кріплення струни (П на Рис. 7) коливання відсутні $\xi(t, 0) = 0$, $\xi(t, L) = 0$, крайні закріплені точки будуть вузловими, без коливань.

Хвиля особливої частоти, названої власною, відіб'ється від одного краю, далі від другого, і прийде у точку збудження навпроти магніту у тій самій фазі, у якій збуджує хвилю магніт у даний момент часу. Тобто час τ проходження подвійної довжини струни $2\,L = c\,\tau$ рівний періодові $\tau = T_1$ гармонійного збудника. Тобто подвійна довжина струни рівна довжині хвилі $2\,L = cT_1 = \lambda_1$.

Випадки інших значень n власних частот $2\,L = c\,T_n\,n = \lambda_n\,n$ – у подвійній довжині струни укладається кратне число довжин хвиль. Час $\tau = T_n\,n$, де n – ціле додатне число, може бути рівним $1, 2, 3, \ldots$ Відповідна частота $\nu_n = T_n^{-1}$. Власні довжини хвиль і відповідні їм власні частоти

$$\lambda_n = \frac{2\,L}{n}, \quad \nu_n = \frac{\mathrm{c}}{\lambda_n}, \quad n = 1,\,2,\,3\,\ldots \tag{12}$$

Для частот ν_n не буде хаотичного накладання відбитих частин хвилі. І збуджувана хвиля, і хвиля, що рухається вже по струні, будуть синфазними. Те саме для довільно вибраної точки струни, хвилі які проходять через цю точку, незалежно від кількості разів відбивання від країв і проходження через неї, будуть синфазними. Очевидно така ж взаємно синфазна поведінка хвиль, що рухаються в протилежну сторону.

Рис. 8

На Рис.8 зображені суцільною і пунктирною лінією крайні положення коливань струни при власних частотах та з врахуванням відбивання з протилежною фазою хвилі на закріпленому краю. Через відбивання від обох країв набіг фази рівний 2π, рівний періоду функцій синус і косинус, тому не відіграє ролі у розгляді синфазності коливань накладання хвиль на власних частотах.

Якщо у струні утворюється одна пучність ($\lambda_1 = 2L$), то відповідну частоту ν_1 називають *основним тоном* або *першою гармонікою.* Дві пучності ($\lambda_2 = L$) утворюються при частоті ν_2 названої *першим обертоном* або *другою гармонікою*; три пучності ($\lambda_3 = 2L/3$), при частоті ν_3 – *другий обертон* або *третя гармоніка* і т.д. (Рис. 8). Терміни тону і обертону мають використання в музиці, в теорії роботи музичних інструментів.

Для виникнення власних коливань струни повинна частота генератора збудника хвилі співпадати із власною частотою коливань струни ν_n – тоді буде виконуватися явище резонансу (від *резонанс*, фр. resonance, лат. resono — відкликаюсь, відгукуюсь). Енергія резонансного розхитування струни буде переходити у все зростаючу амплітуду її власних коливань. Аналогічно синфазному розхитуванню гойдалки: якщо частота підштовхування гойдалки співпадає з її власною частотою коливань, то гойдалці можна надати великої амплітуди.

Амплітуда резонансної частоти не може досягати як завгодно великих значень. Збільшення амплітуди відбувається проти натягу струни, також відбувається дисипація (розсіяння) енергії проти сил в'язкого тертя струни у повітрі і в матеріалі струни.

Перебіг роботи

Заземлення приладу із струною, під'єднання генератора до приладу, під'єднання приладу і генератора до мережі живлення перевіряє (виконує) лаборант, викладач або інженер. Установка ФПВ-04 готова до роботи через 2-3 хв після вмикання.

Довжина струни L вказана на корпусі приладу або знаходиться за міліметровою шкалою на пластиковому прозорому захисному екрані над струною. Силу натягу струни показує динамометр.

Швидкість біжучої хвилі (2) $c = \lambda_n \nu_n$ знаходиться вибором резонансної частоти генератора ν_n з утворення стоячої хвилі у струні. Довжина хвилі λ_n знаходиться за параметрами стоячої хвилі по відстані між вузловими точками (11,12).

Завдання 1. Знаходження швидкості хвилі у резонаторі з струною за параметрами стоячої хвилі.

1. Ознайомтеся з експериментальною установкою. Ручкою натягу струни встановіть невелику силу натягу, наприклад $F = 0,2\,\text{Н}$. Збільшуючи частоту генератора коливань ручкою регулювання на передній панелі, встановіть резонансну частоту першої гармоніки виникненням стоячої хвилі основного тону $n = 1$. З'явиться стійке коливання струни з однією пучністю.
2. Показання частоти зніміть із дисплея генератора, за параметрами стоячої хвилі знайдіть її довжину λ_n (12), обчисліть швидкість біжучої хвилі (2). Оцініть похибку непрямого вимірювання швидкості. Похибка визначення довжини хвилі випливає із формули (12), $\Delta\lambda_n = 2\Delta L/n$. То-

Табл. 1. Знаходження швидкості хвилі у струні

F(Н) =			0,2				0,25				...
n	λ_n, м	$\Delta\lambda_n$, м	ν_n, Гц	$\Delta\nu_n$, Гц	c_n, м/с	Δc_n, м/с	ν_n, Гц	$\Delta\nu_n$, Гц	c_n, м/с	Δc_n, м/с	...
1											
2											
...											
$\langle c\rangle$ м/с											...
Δc_s, м/с											
Δc_{max}, м/с											
Δc, м/с											
E, %											

чність встановлення частоти генератором становить 2%. Дані занесіть у Табл. 1.

3. Збільшуйте частоту, отримуючи стоячі хвилі наступних гармонік $n = 2, 3, \ldots$, кожного разу заносячи необхідні дані для обчислення швидкості біжучої хвилі у Табл. 1. Виконайте досліди для гармонік від першої, і не менше як до 5-ої. Перевірте чи в межах похибки співпадають знадені швидкості при заданому натягу струни. Зробіть висновки.
4. Обчисліть значення швидкості біжучої хвилі $\langle c\rangle$ усереднене по всіх c_n, використайте похибку прямого вимірювання для оцінки точності Δc_s. Повна похибка Δc повинна враховувати також неточність окремих вимірювань Δc_n : виберіть у Табл. 1 з колонки значень Δc_n максимальне значення Δc_{max}, $\Delta c = (\Delta c_s^2 + \Delta c_{max}^2)^{0,5}$. Обчисліть відносну похибку знаходження швидкості хвилі $E = \dfrac{\Delta c}{\langle c\rangle} 100\%$.
5. Повторіть пункти 1-4 для різних значень прикладеної сили натягу струни F. Використайте не менше 5 різних значень F. Стрілка показань динамометра не повинна виходити за межі $F = 0,6$ Н.

Завдання 2. Знаходження густини матеріалу струни.

Табл. 2. Залежність швидкості хвилі від натягу струни

r, м	
Δr, м	
S, м^2	
ΔS, м^2	
ΔF, Н	

F, Н	0,2	0,25	...
σ, Па			
$\Delta\sigma$, Па			
$\langle c^2\rangle$, м^2/с^2			
$\Delta\langle c^2\rangle$, м^2/с^2			

1. Напругу розтягу σ, рівна відношенню сили розтягу F струни до площі її перерізу S. У роботі використовується дротина круглого перерізу, $S = \pi r^2$, r – радіус, вказаний на корпусі приладу або потрібно виміряти мікрометром. Дані занесіть у Табл. 2.
2. Для кожного випадку заданої сили розтягу F із Табл. 1 дані вставте у Табл. 2. Похибка ΔF рівна половині ціни поділки динамометра. Обчисліть величину напруги σ і похибку непрямого виміру $\Delta\sigma$. Занесіть в Табл.2 квадрат швидкості $c^2 = \langle c\rangle^2$ і точність Δc^2 за похибкою непрямого вимірювання, скористайтесь даними з Табл. 1. Побудуйте графік залежності $\sigma(c^2)$, виконайте лінійну апроксимацію (скористайтеся пакетом MSExcell, LibreOffice чи довільним іншим пакетом). Оцініть точність визначення густини матеріалу струни.
3. Порівняйте густину знайдену з апроксимаційної функції із табличними даними. Вкажіть із якого металу може бути виготовлена струна.

Завдання 3. Знаходження параметрів біжучої хвилі.

1. Ручкою натягу струни встановіть силу натягу в межах $F = 0,2 \div 0,5$ Н. Встановіть резонансну частоту, з утворенням стоячої хвилі, наприклад, третьої гармоніки $n = 3$.
2. Прикладіть міліметрову лінійку до пластикового екрану поперек струни навпроти пучності. Оцініть амплітуду коливань стоячої хвилі A. З генератора зніміть показання частоти ν_n. Знайдіть довжину хвилі λ_n. Обчисліть швидкість біжучої хвилі c у струні (2).

3. Обчисліть амплітуду швидкості поперечних коливань струни $u_{max} = A\omega$ і амплітуду деформації $\varepsilon_{max} = Ak$. Перевірте виконання співвідношення між знайденими параметрами за формулою (8). Дайте оцінку виконання умов малих деформацій $\varepsilon \ll 1$ і $u \ll c$.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення пружної хвилі, гармонійної пружної хвилі, поперечної і поздовжньої хвиль.
2. Дайте визначення параметрів гармонійної хвилі: частоти, довжини хвилі, періоду, амплітуди, хвильового числа.
3. Що розуміють під біжучою хвилею? Який вираз для біжучої хвилі?
4. Дайте визначення стоячої хвилі. Як співвідносяться амплітуди інтерферуючих хвиль і стоячої хвилі?
5. Яка головна відмінність між стоячою і біжучою хвилями?
6. Що необхідно для створення стоячої хвилі? Що розуміють під інтерференцією?
7. Що розуміють під пучностями і вузлами стоячої хвилі?
8. Що розуміють під резонатором, власною частотою резонатора? Чим зумовлений відбір власних частот у резонаторі?
9. Від чого залежить швидкість звуку у струні? Чи залежить швидкість хвилі від амплітуди, від потужності збудника хвилі у струні?
10. Як впливає величина сили натягу струни на частоту власних гармонік?