

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА  
АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра інформатики

**Побудова фрактальних зображень та їх застосування у  
комп'ютерній графіці**

**Текстова частина до курсової роботи**

**за спеціальністю 121 «Інженерія програмного забезпечення»**

Керівник курсової роботи

Бучко О. А.

*(прізвище та ініціали)*

---

*(підпис)*

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Виконав студент

Смовженко А.О.

*(прізвище та ініціали)*

---

*(підпис)*

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Київ-2022

**Тема:** Побудова фрактальних зображень та їх застосування у комп'ютерній графіці.

**Календарний план виконання роботи:**

<b>№</b>	<b>Назва етапу курсової роботи</b>	<b>Термін виконання</b>	<b>Примітка</b>
1.	Отримання завдання на курсову роботу	вересень	
2.	Огляд літератури за темою роботи <sup>1</sup>	жовтень-грудень	
3.	Створення практичної частини роботи	січень-квітень	
4.	Написання текстової частини роботи	березень-квітень	
6.	Надання роботи керівнику для перевірки	кінець квітня	
8.	Коригування роботи за результатами перевірки	кінець квітня-початок травня	
9	Подання роботи на кафедру для перевірки на плагіат	тиждень до захисту	
10.	Захист курсової роботи	кінець травня	

Студент Смовженко А. О.

Керівник Бучко О. А.

“        ”  
\_\_\_\_\_

## Зміст

Вступ .....	4
Трикутник Серпінського .....	6
Килим Серпінського .....	8
Квадрат .....	9
П'ятикутник .....	10
Шестикутник.....	11
Папороть Барнслі.....	12
Група фракталів за логікою побудови фракталу килима Серпінського .....	14
Група фракталів із “сердцевиною” .....	16
Розподіл ймовірості як фактор побудови .....	17
Висновок .....	18
Джерела: .....	20

## Вступ

Фрактал - це структура, яка є нерегулярною і самоподібною. У широкому розумінні, фрактал означає фігуру, дрібні складові частини якої в будь-якому збільшенні подібні до всієї структури. Термін "фрактал" був введений в 1975 році Бенуа Мандельбротом.<sup>ii</sup>

Фрактали можна поділити на 3 типи залежно від рівня самоподібності:

1. Точна самоподібність - найсильніший тип самоподібності, при якому фрактал має однаковий вигляд при будь-якому збільшенні масштабу. Фрактали, створені ітераційними функціями (СІФ), часто мають точну самоподібність.
2. Майже самоподібність - менш сильна форма самоподібності, при якій фрактал виглядає приблизно, але не ідентичним при різних масштабах. Майже самоподібні фрактали мають малі копії фрактала у вигляді перекручених та вироджених форм. Фрактали, створені рекурентними відношеннями, зазвичай є майже самоподібними.
3. Статистична самоподібність - найслабший тип самоподібності, при якому фрактал має чисельні або статистичні характеристики, що залишаються сталими при збільшенні масштабу. Деякі визначення "фракталів" включають тільки статистичну самоподібність, наприклад, розмірність фрактала, яка залишається числом, що не змінюється при збільшенні. Ймовірнісні фрактали - це приклади фракталів, які мають статистичну, але не майже і не точну самоподібність.

В математиці існує метод побудови фракталів, що називається системою ітераційних функцій (СІФ).<sup>iii</sup>

Отримані фрактали по цьому методу є самоподібними та можуть бути різних розмірностей. Фрактал складається з об'єднання декількох копій самого себе, кожна з яких перетворюється за допомогою функції.

Один з найбільш відомих прикладів цього - трикутник Серпінського. Функції, які використовуються, зазвичай є стискальними, тобто вони зменшують розмір фігури, об'єднуючи ближчі точки. Це призводить до того, що форма фрактала складається з менших копій самого себе, які можуть накладатися одна на одну.

Кожна з цих копій також складається зі своїх власних копій, що створює безкінечний процес самоподібності фракталів.

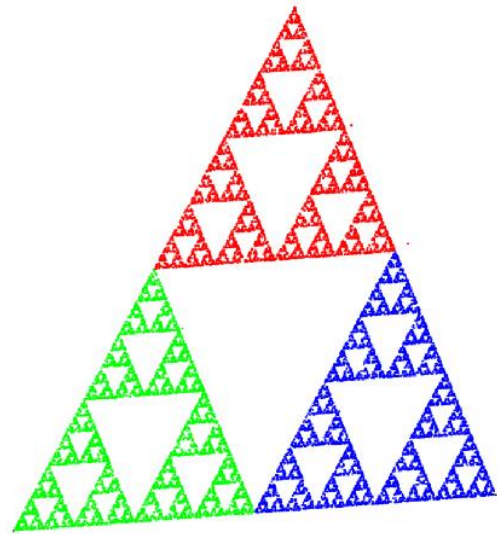
Теорія Хаосу в розрізі фракталів – це знаходження умов та правил випадкової генерації об'єктів за яких набувається фрактальна структура вихідного зображення, тобто маючи мінімальні правила випадкової генерації ми можемо отримувати одне й те саме за виглядом об'єкт. Дана робота має ціль дослідити природу початкових простих правил генерації фракталів, виявити логіку їх побудови аби маючи мінімальний набір значень набути змогу відтворювати бажане для нас зображення.<sup>iv</sup>

Надалі розглянемо відомі фрактали СІФ, похідні від них фрактали та правила їх генерації.

# Трикутник Серпінського

Рисунок 1

Правило: У нас є 3 вершини, 1-а точка обирається навмання (розташування початкової точки не має впливу на результат). Далі випадковим чином обирається 1-а з 3-ох вершин й наступною точкою стає середина відрізка між попередньою точкою та вершиною яку ми випадково обрали.



Для більшої наглядності що менші частини фракталу ідентичні решті частинам: точки мають забарвлення в залежності яка з 3-ох вершин є найблищою.

Можемо описати правила побудови як:

$$\text{Next dot} = \text{Length}(\text{Random}(3); \text{Previous dot}) / 2$$

Якщо замінити коефіцієнт 2 наприклад на 2.1 вийде фрактал на рис.2.

Рисунок 2

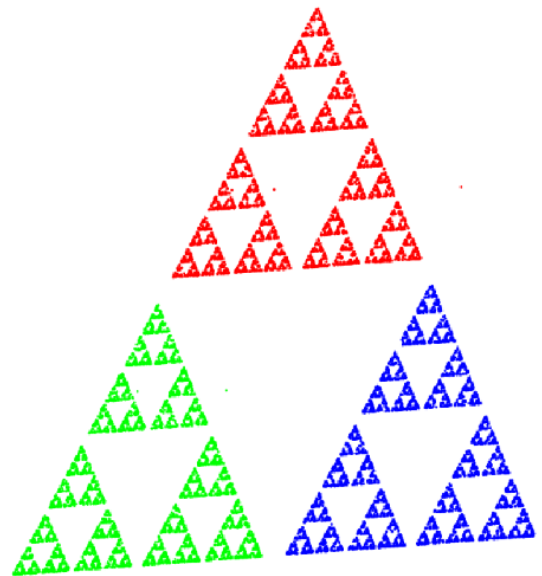
Теорія: змінюючи коефіцієнти в правилах побудови фракталів – ми все рівно отримуємо фрактал, але вже інший (видозмінений)

Рис.3: koef = 2.5

Узагальнена формула для серії цих фракталів:

$$\text{Next dot} = \text{Length}(\text{Random}(3); \text{Previous dot}) / \text{koef}$$

Рис.4: koef = 1.8 – Починається обернений процес, тобто частини фрактала накладаються один на одного, а не віддаляються.



Висновок: при  $\text{koef} > 2$  – віддалення від стандартної форми ( $\text{koef}=2$ ); при  $1 < \text{koef} < 2$  – зближення що утворює накладання частин фракталу; при  $\text{koef} \leq 1$  фрактал не утворюється.

Рисунок 4

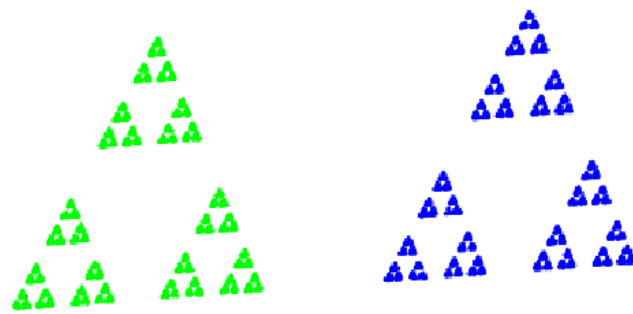
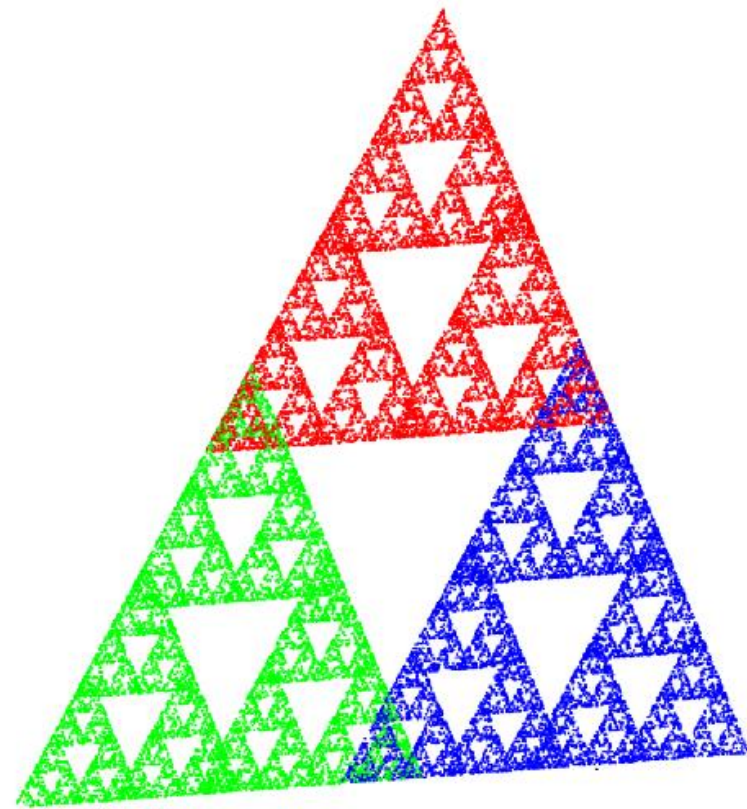


Рисунок 3



# Килим Серпінського

Next dot = Length(Random(8); Previous dot) /  
koef

У цьому випадку у нас не 3 вершини як у трикутника, а 8 точок розташованих на початковому квадраті.

Рис.5: Норма, koef = 3

Рис.6: koef = 3.3

Рис.7: koef = 2.7

Як бачимо частини фракталів віддаляються один від одного при збільшенні коефіцієнта, а при зменшенні – накладаються.

Тоді можна ввести термін “норма” для koef – це таке значення koef, при котрому самоподібні фрактали не накладаються та не віддаляються один від одного.

Рисунок 7

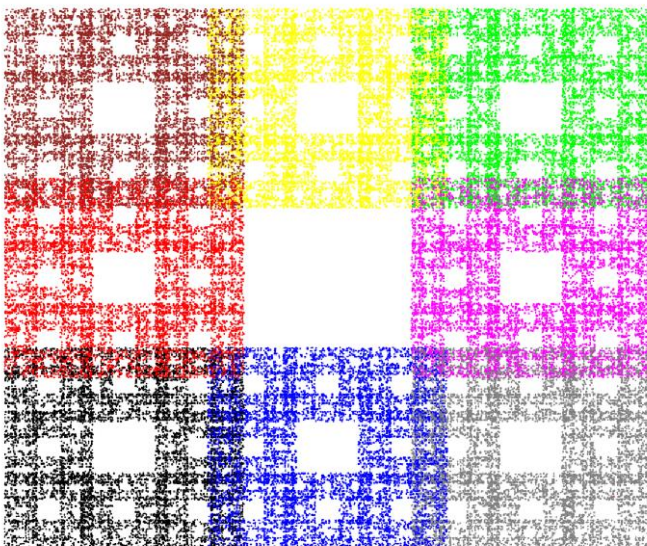


Рисунок 5

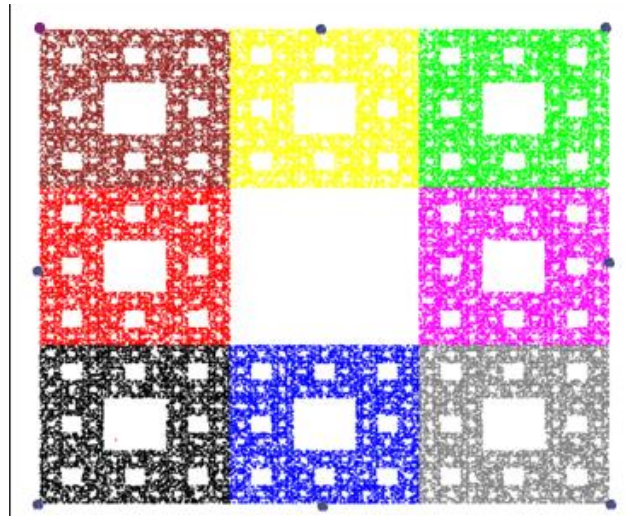
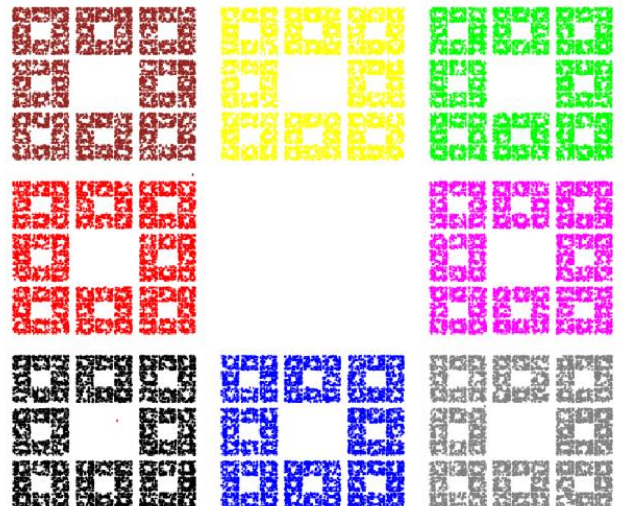


Рисунок 6



Надалі на основі поведінки побудови трикутника Серпінського розглянемо інші фрактали й спробуємо знайти закономірності.

# Квадрат

У цьому випадку у нас 4 початкові вершини квадрата.

```
Next dot = Length(Random(4);  
Previous dot) / koef
```

Правило побудови співпадає з трикутником Серпінського, але замість 3 вершин, у нас 4.

Рис.8: Норма, koef = 2

Рис.9: koef = 2.1

Рис.10: koef = 1.9

При варіації коефіцієнта теорія про віддалення й наближення фракталів один до одного підтверджується.

Рисунок 8

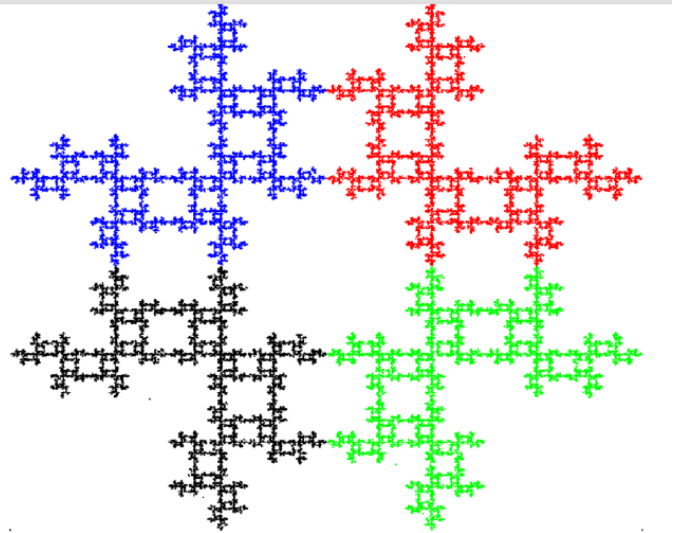


Рисунок 9

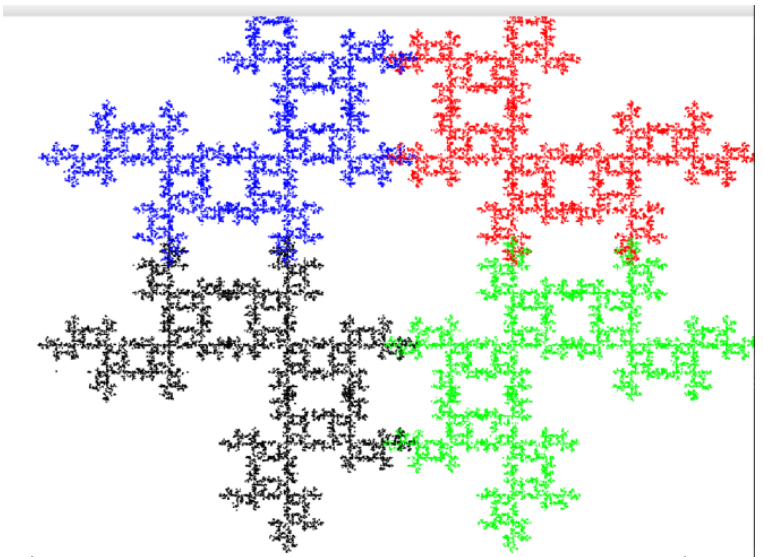
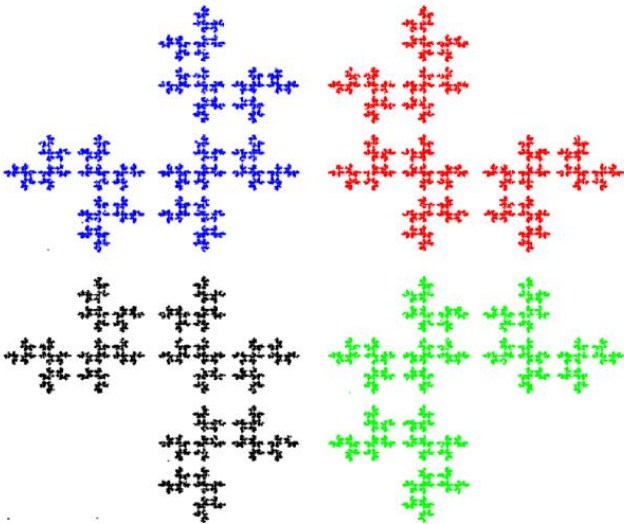


Рисунок 10



## П'ятикутник

Побудуємо фрактал п'ятикутник:

```
Next dot = Length(Random(5);  
Previous dot) / koef
```

Рис.11: Норма, koef = 2.45

Рис.12: koef = 2

Рис.13: koef = 1.9

В даному випадку фрактал не накладається й не віддаляється призначенні koef = 2.45, тобто koef = 2 більше не є нормою.

Можна помітити що зберігається форма п'ятикутника в прогалинах фракталу так само як у всіх попередніх фракталах на основі логіки побудови трикутника Серпінського збурігалися їх початкові форми розташування базових точок.

Рисунок 11

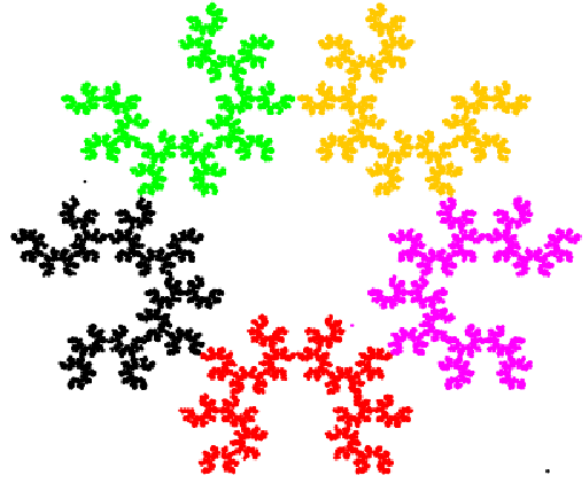


Рисунок 13

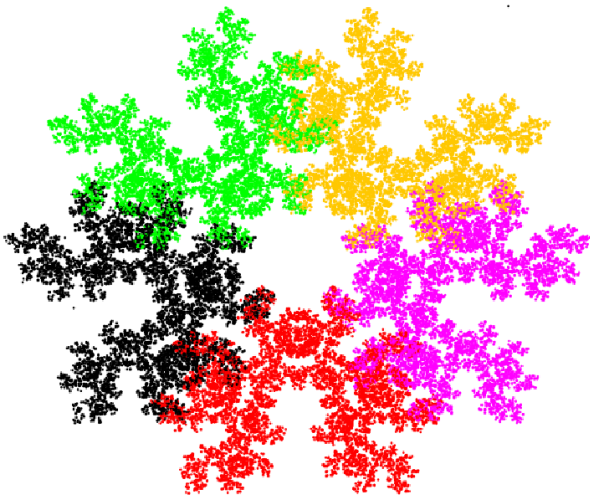
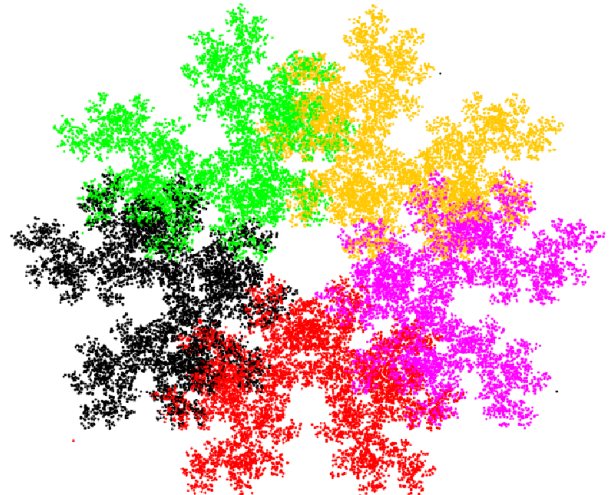


Рисунок 12



## Шестикутник

Побудуємо фрактал шестикутник:

Next dot = Length(Random(6); Previous dot) / koef

Рис.14: koef = 2.5

Рис.15: koef = 3

Рис.16: koef = 2

Шестикутник за структурою подібний до п'ятикутника, але в прогалинах тепер саме шестикутник. Якщо задати koef = 2 й наблизити побудований фрактал, то на Рис.16 можна помітити що всі прогалини фракталу є шестикутниками, навіть не дивлячись на те, що початкові великі шматки фракталу перетинаються.

Коef, при якому фрактали не віддалені й не накладені став більший (>2.5), тобто чим більше початкових вершин фракталу, тим koef для “норми” буде більшим.

Таким чином можна зазначити, що логіка вимальовування цього типу фракталів є розкритою. Надалі фрактали з більшою кількістю початкових вершин у вигляді багатокутників будуть схожими на фрактали з 5-ма й 6-ма вершинами, закономірності форм прогалін й koef норми будуть зберігатися.

Рисунок 14

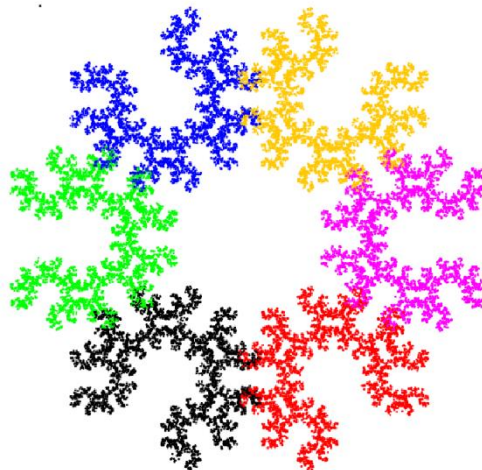


Рисунок 15

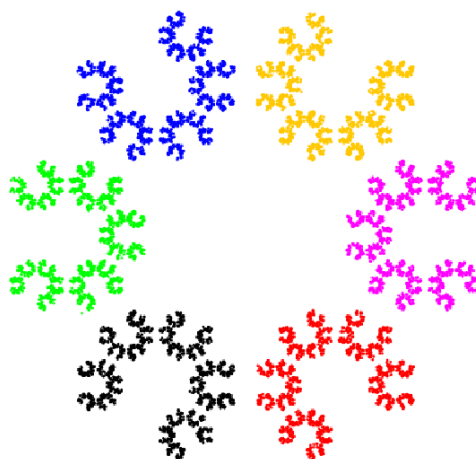
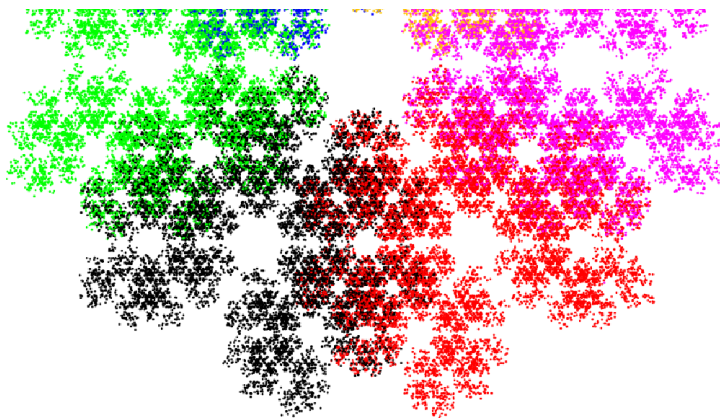


Рисунок 16



## Папороть Барнслі

Рисунок 17

Алгоритм малювання базується на виборі випадкового числа з діапазону  $[0, 1)$  та виконання певних математичних формул для кожного випадку. В залежності від згенерованого числа, виконується одна з чотирьох формул, які визначають де ставиться наступна точка на екрані.

Логіка побудови:

З початку:  $x=0, y=0$ ;

```
if (r < 0.01) {  
    nextX = 0.0;  
    nextY = 0.16 * y;  
} else if (r < 0.86) {  
    nextX = 0.85 * x + 0.04 * y;  
    nextY = -0.04 * x + 0.85 * y + 1.6;  
} else if (r < 0.93) {  
    nextX = 0.20 * x - 0.26 * y;  
    nextY = 0.23 * x + 0.22 * y + 1.6;  
} else {  
    nextX = -0.15 * x + 0.28 * y;  
    nextY = 0.26 * x + 0.24 * y + 0.44;  
}
```

Рис.17: стандартні значення

Папороть Барнслі має складніші правила побудови, аби дослідити логіку його побудови перевіримо за що відповідає кожний з інтервалів  $r$ :

Рис.18: без  $r < 0.01$

Перша частина правила відповідає за структуру стебла, тому на рисунку 18 ми бачимо папороть без стеблів.



Рисунок 18



Рисунок 19

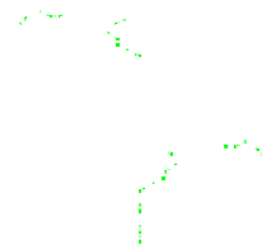


Рис.19: без  $r < 0.86$

На рисунку 19 фрактал взагалі не відмалювався, тобто можна припустити що дана частина рівняння відіграє основну роль у побудові.

Рис.20: без  $r < 0.93$

Ми отримали фрактал, котрий має елементи папороті лише по праву сторону, тобто цей проміжок відповідає за побудову лівої частини “листіків”.

Рис.21: без else

На рис. 21 бачимо обернений вигляд до рис. 20 й робимо висновок що цей проміжок відповідає за побудову правої частини “листіків”.

Рис.22: Можемо перефарбувати точки з кожного проміжку  $r$  аби підтвердити наші теорії щодо заледностей в побудові папороті.

Як результат ми можемо побачити що первинний фрактал це зелений, чорний та синій колір на рисунку 22. Проміжок  $r < 0.86$  був пофарбований у червоний колір й як бачимо він відповідає за повторення елементів нашого первинного фракталу.

Можна зробити припущення що якщо будь-який предмет, котрий має фрактальну структуру, може бути відтворений поточною за допомогою набору спеціальних правил побудови фрактальних зображень.

Такий спосіб відмалювання може спростити створення унікальних зображень у комп'ютерній графіці дизайнерам та розробникам ігор зі складним інтерфейсом.

Рисунок 20

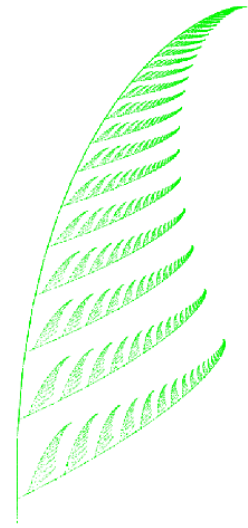


Рисунок 21

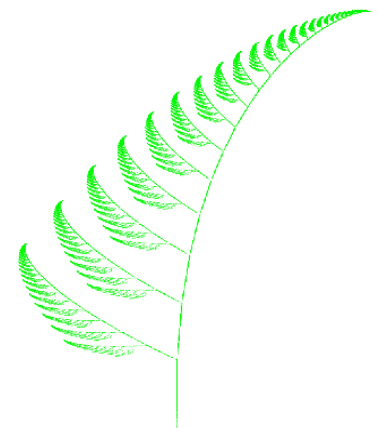


Рисунок 22



## Група фракталів за логікою побудови фракталу килима Серпінського

Надалі поглибимося в логіку килима Серпінського аби зрозуміти яка група фракталів існує за  $\text{coef} = 3$ .

Рис.23: Розтаavimo 6 початкових точок у вигляді трикутника та середини його граней, так само як початкові точки розташовуються на серединах граней квадрата килима Серпінського, запустимо побудову при  $\text{coef} = 3$ .

Якщо змінювати  $\text{coef}$ , то даний фрактал буде вести себе аналогічно до решти, але його “норма” саме  $\text{coef} = 3$ ;

З цього результату можна припустити, що при додаванні початкових точок на середину граней початкових многокутників, при  $\text{coef} = 3$  утворюються фрактали з підгрупи килима Серпінського.

Рис.24: Візьмемо набір початкових точок як на рис.23 й додамо ще початкових точок на серединах відрізків що є на гранях нашого трикутника. Фрактал набуває “норми” при  $\text{coef} = 5$ , котрий був визначений методом підбору.

Тепер можна нарешті побачити залежність між цілими коефіцієнтами:

в звичайному трикутнику Серпінського (рис.1), ми маємо 2 повтора первинного фракталу на 1 грані – тож  $\text{coef}$  у нас й є 2;

на рис.23 у нас є 3 повтора – тож  $\text{coef} = 3$ ;

відповідно на рис.24 у нас 5 елементів на 1 грані – тому  $\text{coef} = 5$ .

Рисунок 23

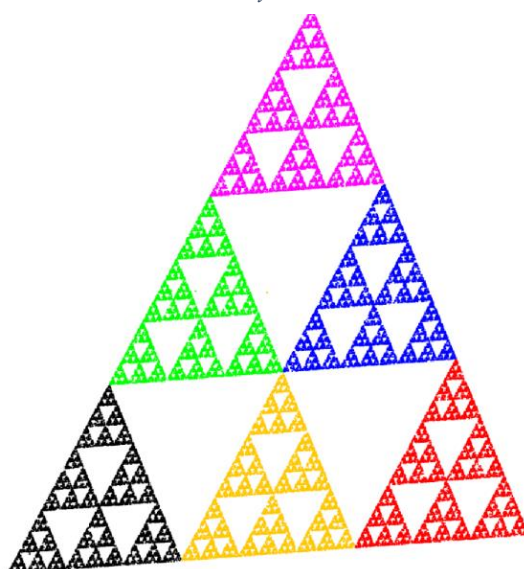
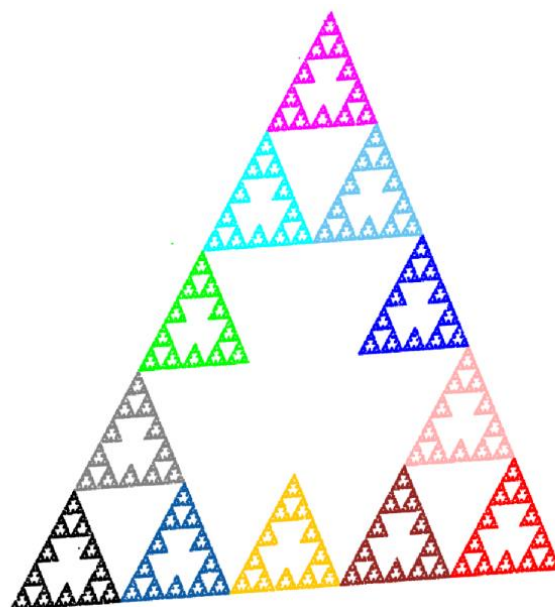


Рисунок 24



Тоді можна припустити що поставивши на грані трикутника по 2 рівновіддалені від початкових вершин точки, то утвориться фрактал з 4 повторами прилеглими до кожної з граней й саме при  $\text{coef} = 4$  буде “норма”.

Рис.25: Як бачимо, наше припущення вірне, фрактал утворився при  $\text{coef} = 4$ .

Тоді можна вважати що “норма” досягається коли  $\text{coef}$  відповідає кількості повторів фракталу на 1 грані.

Використовуючи нашу закономірність  $\text{coef}$  до кількості повторів на грані, проведемо тест на килимі Серпінського: додамо ще початкових точок між тими що вже є на гранях.

Рис.26: Ми отримали даний фрактал при  $\text{coef} = 5$ , що й підтверджує нашу закономірність.

Рисунок 25

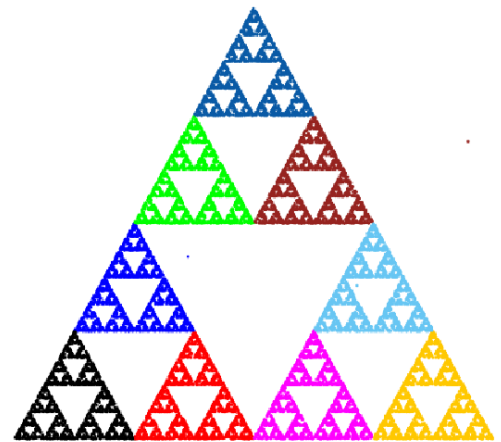
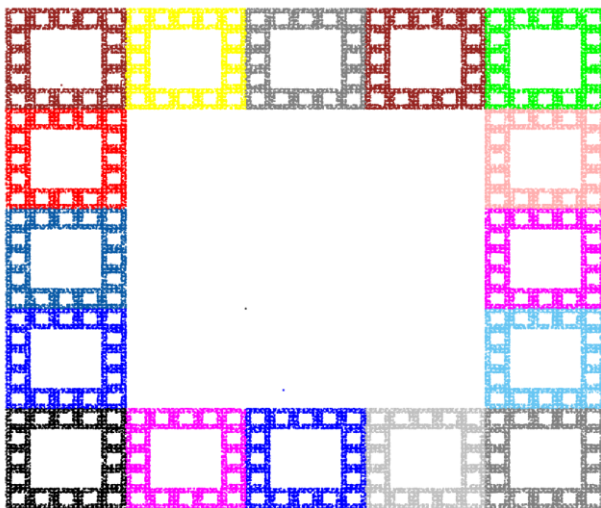


Рисунок 26



## Група фракталів із “сердцевиною”

Проведемо експеримент: додамо ще 1 початкову точку в середині фракталу.

Рис.27: Ми отримали фрактал, котрий самовідтворюється з ще 1 квадратом в середині решти квадратів.

Рис.28: Ми додали у випадок рис.24 початкову точку в середину початкового трикутника й отримали очікуваний результат. Даний фрактал володіє усіма властивостями фракталів й не випадає з дослідженими нами правил їх побудови.

Рис.29: Якщо додати початкову точку в звичайний трикутник Серпінського, то вийде накладання самоподібних фракталів при  $\text{coef} = 2$ , але в нашому випадку дана структура утворюється при  $\text{coef} = 2.5$ .

Рисунок 27

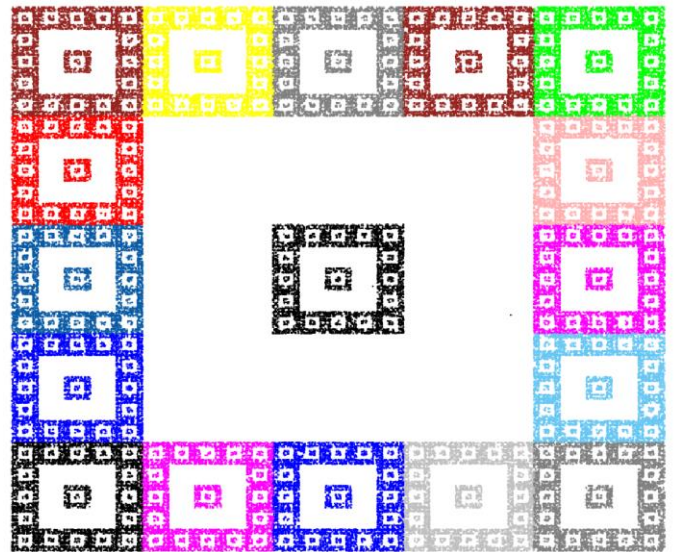
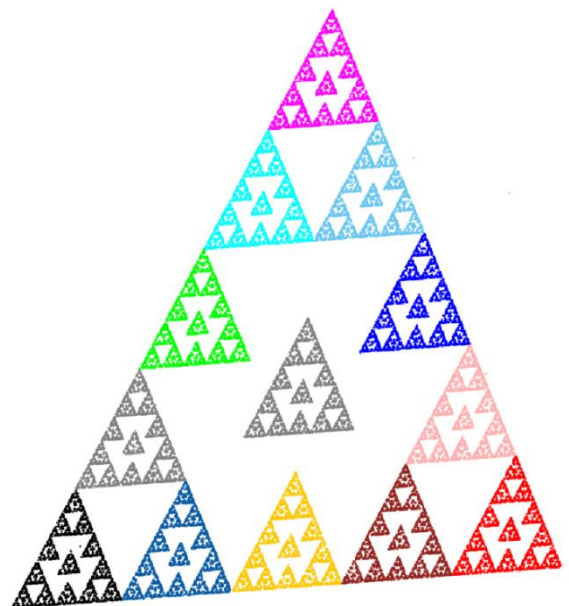
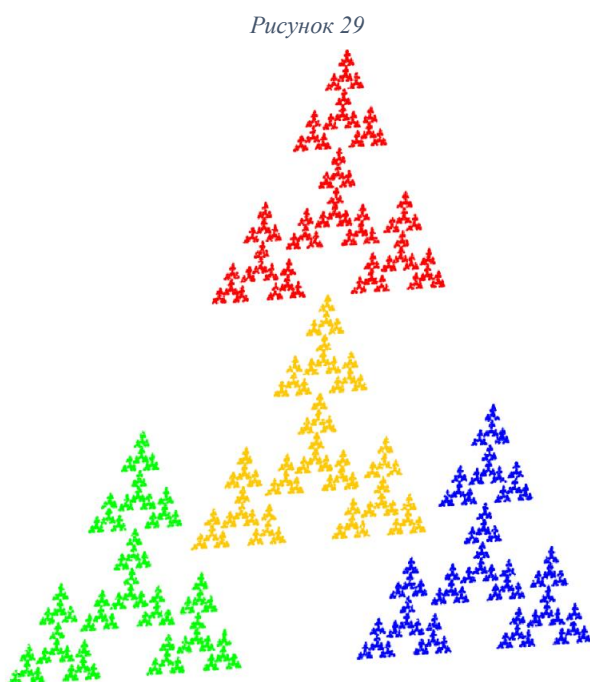


Рисунок 28

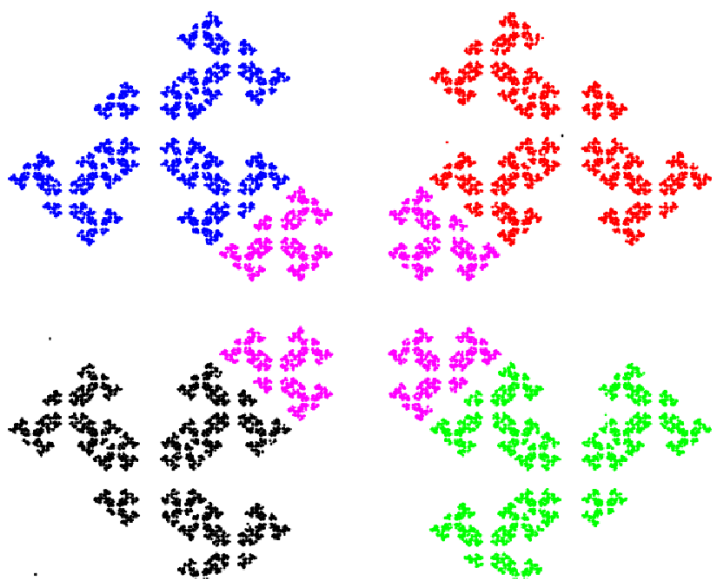


## Розподіл ймовірості як фактор побудови

Рис.30: Ми додали початкову точку в середину початкового квадрата фрактала з рис.8. та встановили  $\text{coef} = 2.5$ .

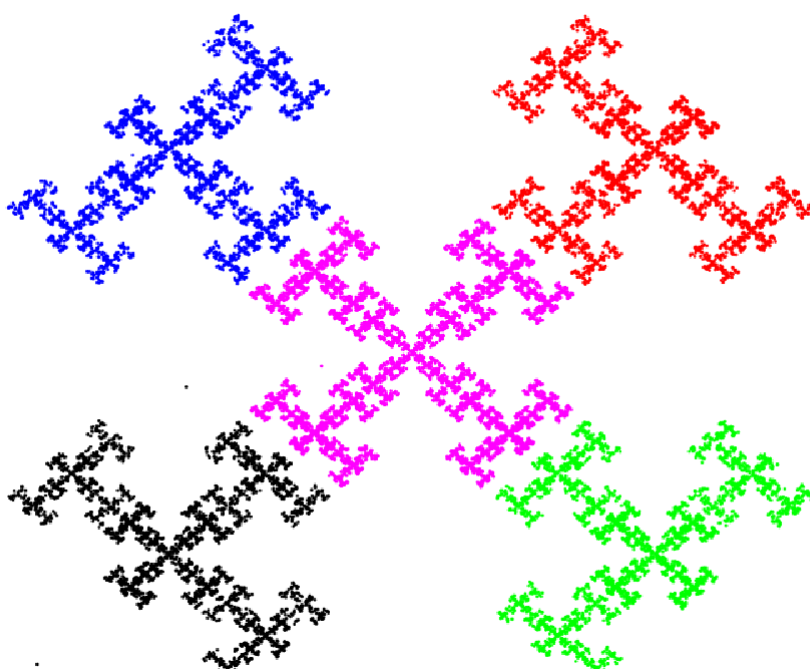
Рис.31: Згадавши папороть барнслі, можна зауважити ще про 1 фактор побудови фракталів – це різноманітність ймовірності утворення фракталів. В даному фракталі ми маємо за основу те саме що й на рис.30, але ми збільшили вдвічі ймовірність випадання центральної точки. Як бачимо цей фактор є суттєвим, так як зображення відрізняються.

Рисунок 30



Як бачимо, експериментуючи з розподілом ймовірності, можна отримати безліч неочевидних фракталів по методу побудови СІФ.

Рисунок 31



## Висновок

У роботі було досліджено фрактали, їх методи побудови та залежності від початкових правил побудов.

Робота несе інформацію про фундаментальні фактори генерації такі як:

1. Розташування початкових точок генерації фракталу.
2. Коефіцієнт (коєf) – інструмент наближення й віддалення самоподібних фракталів одне від одного, його “норма” напряду залежить й дорівнює кількості самоподібних фракталів на грані основного фракталу.
3. Розподіл ймовірності вибору початкових точок фракталу.

При побудові зображення фракталів, на котрих базуються аналіз й висновки даної роботи, було практично реалізовано програми мовою Java з використанням бібліотеки princeton, а точніше класи StdDraw, StdOut, StdIn.<sup>v</sup>

Практична частина роботи включає себе алгоритми побудови кожного з фракталів, котрі рознесені в класи на кожний фрактал окремо.<sup>vi</sup>

Кожен клас, котрий відмальовує свій фрактал включає в себе: визначення координат початкових точок, налаштування полотна, рандомайзер, цикл for з розподіленими ймовірностями та кольорами самоподібних фракталів.

Фрактали можуть бути використані на практиці для створення деталей природних ландшафтів, генерації текстур, анімації та моделювання складних структур.<sup>vii</sup>

Результати дослідження показали, що використання фракталів у комп'ютерній графіці відкриває широкі можливості для створення вражаючих зображень.

Фрактали дозволяють створювати складні структури зі збереженням деталей на різних масштабах, що дозволяє отримати візуально привабливі результати.<sup>viii</sup>

В дослідженні було взято саме фрактали з групи методу побудови СІФ, бо їх побудова є поточною, що є наближено до піксельній комп'ютерній графіці.

Дослідження первинних аспектів побудови наближає до загального питання: чи можна задати будь-який фрактальний об'єкт лише правилом генерації, якщо так, як визначати такий набір правил?

Кінцеве вирішення даного питання зробить доступним й потрібним даний метод побудови фрактальних зображень на практиці.<sup>ix</sup>

## Джерела:

---

<sup>i</sup> Книга: "The Fractal Geometry of Nature" by Benoit B. Mandelbrot

Книга: "Chaos and Fractals: New Frontiers of Science" by Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe

Атестаційна робота:

<https://openarchive.nure.ua/bitstreams/c38c18c6-0526-47d4-a276-c5a920f6ce5e/download>

<sup>ii</sup> Сайт за темою:

<https://sites.google.com/site/fraktali777/>

<sup>iii</sup> Дисертація:

[https://ab.uu.edu.ua/upload/Abiturientam/vstup\\_do\\_aspiranturi/Zahist\\_disertaciy/disertacija\\_zubko.pdf](https://ab.uu.edu.ua/upload/Abiturientam/vstup_do_aspiranturi/Zahist_disertaciy/disertacija_zubko.pdf)

<sup>iv</sup> Книга: "Introduction to Fractals and Chaos" by Nigel Lesmoir-Gordon, Will Rood, and Ralph

Науковий ютуб канал Numberphile:

<https://www.youtube.com/watch?v=kbKtFN71Lfs>

<sup>v</sup> Бібліотека java

<https://introcs.cs.princeton.edu/java/stdlib/javadoc/StdDraw.html>

<sup>vi</sup> Посилання на практичну частину

[https://github.com/AntonSmovzhenko/Course\\_SmovzhenkoIPZ.git](https://github.com/AntonSmovzhenko/Course_SmovzhenkoIPZ.git)

<sup>vii</sup> Дипломна робота з теми «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛІВ У ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ»:

<https://repository.sspu.edu.ua/bitstream/123456789/9634/1/%D0%94%D0%B8%D0%BF%D0%BB%D0%BE%D0%BC%20%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB%D1%8B,%20%D0%91%D1%83%D0%BB%D1%8C%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE.pdf>

---

<sup>viii</sup> Сайт за темою:

<https://jak.koshachek.com/articles/fraktalni-zobrazhennja-ce-nejmovirno-krasivo-i.html>

<sup>ix</sup> Сайт з науковими дослідженнями за участю фракталів:

<https://www.worldscientific.com/worldscinet/fractals>