УДК 519.11+519.173

Олійник Б. В.

ГРАФ СУСІДСТВА ВІНЦЕВОГО ДОБУТКУ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Розглянуто деякі властивості графа сусідства метричного простору. Знайдено умови, за яких граф сусідства вінцевого добутку метричних просторів ізоморфний вінцевому добутку графів сусідства цих просторів.

Ключові слова: вінцевий добуток, граф сусідства, метричний простір.

Вступ

Одним з об'єктів, що характеризує метричний простір, є його *граф сусідства* або *основний граф* [1]. *Графом сусідства* метричного простору (X, d) називатимемо простий граф, заданий на множині X, дві вершини $x,\ y \in X$ якого з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли не існує жодної відмінної від x і y точки $z \in X$, яка лежить між ними, тобто такої, для якої виконується рівність

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y). \tag{1}$$

Основний граф метричного простору (X, d) позначатимемо GX.

У 1959 році Ф. Харарі у праці [2] ввів конструкцію вінцевого добутку графів.

Означення 1. *Вінцевим добутком двох простих графів G_1 і G_2 називається граф $G_1 \wr G_2$, визначений на множині всіх впорядкованих пар (v, w), де v — вершина графу G_1, w — вершина графу G_2. Дві пари (v, w) і (v_1, w_1) з'єднані ребром в одному з таких двох випадків:*
- *$v = v_1$ та існує ребро між w і w_1 в графі G_2*
- *існує ребро між v і v_1 в графі G_1.*

Цю конструкцію було названо вінцевим добутком графів, оскільки при певних обмеженнях на графи G_1 і G_2 група автоморфізмів вінцевого добутку графів ізоморфна вінцевому добутку груп їх автоморфізмів. Самим Ф. Харарі група автоморфізмів вінцевого добутку графів досліджувалась у випадку скінченних графів. Згодом, у працях Г. Сабідусі [3], [4] досліджувалась група автоморфізмів конструкції вінцевого добутку графів у випадках, коли G_1 — локально скінченний, G_2 — скінченний, та G_1 — довільний, G_2 — локально скінченний, відповідно. Цей результат був узагальнений Е. Томсоном і Д. Морріс [5], які сформулювали необхідні й достатні умови для довільних графів G_1 і G_2, за яких група автоморфізмів вінцевого добутку графів G_1 і G_2 ізоморфна вінцевому добутку їх груп автоморфізмів.

У дослідженні [6] нами було запропоновано нову конструкцію добутків рівномірно дискретних метричних просторів обмеженого діаметра. Група ізометрій такого простору ізоморфна вінцевому добутку груп ізометрій початкових просторів. За аналогією з конструкцією Ф. Харарі, цей добуток було названо вінцевим добутком метричних просторів.

Конструкції вінцевого добутку графів і вінцевого добутку метричних просторів різні. Якщо ми два простих зв'язних графи G_1 і G_2 розглянемо як метричні простори (G_1, d_{G_1}) і (G_2, d_{G_2}) (з природною метрикою), то вінцевий добуток метричних просторів (G_1, d_{G_1}) і (G_2, d_{G_2}) та простір, який визначається графом $G_1 \wr G_2$, завжди не ізометричні, а у випадку скінченних графів, завжди не ізоморфні.

У цій замітці ми встановлюємо зв'язок між цими конструкціями. А саме, знайдемо умови, за яких граф сусідства вінцевого добутку метричних просторів (X, d_X) і (Y, d_Y) ізоморфний вінцевому добутку графів сусідства цих просторів.

Властивості графа сусідства метричного простору

Метричний простір (X, d_X) назвемо *ланцюговим*, якщо для довільних точок x, y цього простору існує скінченна кількість точок, що лежить між ними, тобто для довільних точок $x, y \in X$, або не існує такої точки z, що справедлива рівність (1), або рівність (1) справедлива для скінченної множини точок.

Твердження 1. *Граф сусідства GX довільного ланцюгового простору (X, d_X) є зв'язним.*

Доведення. Нехай x, y — дві довільні точки простору X. Покажемо, що в графі GX існує ланцюг, який з'єднує ці точки. Якщо для точок x, y не існує такої точки z, що справедлива рівність (1), то точки x і y з'єднані ребром в GX. Якщо така точка існує, то, можливо, точки x і z, z і y з'єднані ребрами в GX. Тобто в цьому випадку існує ланцюг $x \to z \to y$. Якщо ні, то існує або точка u, або точка v, або обидві ці точки такі, що справедливі рівності:

$$d(x,z) = d(x,u) + d(u,z),$$

$$d(z,y) = d(z,v) + d(v,y),$$

і т. д. Оскільки X — ланцюговий, то процес скінченний, отже ми отримаємо ланцюг, що з'єднує точки x і y.

Оскільки довільний скінченний метричний простір ланцюговий, то безпосередньо з твердження 1 отримуємо.

Наслідок 1. *Якщо метричний простір (X, d_X) — скінченний, то його граф сусідства GX зв'язний.*

Якщо (X, d_X) нескінченний метричний простір і для довільних точок x і y цього простору існує така точка z, що виконується рівність (1), то граф сусідства (X, d_X) є цілком незв'язним. З іншого боку, можна виділити певні класи метричних просторів, графи сусідства яких є повними графами. Оскільки в ультраметричних просторах всі трикутники невироджені, то в довільному неархімедовому просторі не існує таких трьох точок x, y і z, для яких виконується рівність (1). Отже, справедливим є таке твердження

Твердження 2. *Якщо простір (X, d_X) є ультраметричним, то його граф сусідства GX ізоморфний повному графу, заданому на множині X.*

Серед інших властивостей груп автоморфізмів графів сусідства виділимо такі.

Твердження 3. *Група автоморфізмів графа сусідства $Aut(GX)$ метричного простору (X, d) містить підгрупу $IsomX$ — групу ізометрій цього простору:*

$$Aut(GX) \geq IsomX. \tag{2}$$

Доведення. Нехай φ — деяка ізометрія простору (X, d), x, y — довільні точки множини X, що з'єднані ребром в GX. Оскільки φ — бієкція, то достатньо показати, що існує ребро в GX, яке з'єднує $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$.

Якщо точки x і y з'єднано ребром в GX, то для довільної точки $z \in X$, відмінної від x і y, справедлива нерівність

$$d(x,y) \neq d(x,z) + d(z,y).$$

Оскільки φ — зберігає відстані, то це означає, що для довільної точки $z \in X$, відмінної від x і y, виконується

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \neq d(\varphi(x), \varphi(z)) + d(\varphi(z), \varphi(y)).$$

Тобто $\varphi(x)$ і $\varphi(y)$ з'єднано ребром в GX.

Включення (2) може бути строгим, а може досягатись рівність. Якщо (X, d) — n-точковий метричний простір, у якого всі ненульові відстані попарно різні, то група ізометрій такого простору тривіальна. Якщо при цьому для жодних трьох точок простору не виконується рівність (1), то граф сусідства простору (X, d) є повним графом, заданим на множині X. Отже, в цьому випадку $Aut(GX) = S(X) > IsomX = Id$. Якщо (X, d) — еквідістантний метричний простір, то граф сусідства цього простору є повним графом, заданим на множині X. Отже, для такого простору маємо: $Aut(GX) = IsomX = S(X)$.

Твердження 4. *Якщо для метрик d_1 і d_2, заданих на множині X існує додатне число λ, таке, що для довільних $x, y \in X$ справедлива рівність*

$$\lambda d_1(x,y) = d_2(x,y), \tag{3}$$

то графи сусідства метричних просторів (X, d_1) і (X, d_2) ізоморфні.

Доведення. Припустимо, що для точок $x, y \in X$ не існує такої точки z, $z \neq x$, $z \neq y$, що справедлива рівність

$$d_1(x,y) = d_1(x,z) + d_1(z,y).$$

Ця рівність не виконується тоді і тільки тоді, коли не виконується рівність

$$\lambda d_1(x,y) = \lambda d_1(x,z) + \lambda d_1(z,y),$$

що рівносильно

$$d_2(x,y) \neq d_2(x,z) + d_2(z,y).$$

Метричні простори (X, d_1) і (X, d_2) називатимемо ізоморфними в сенсі перетворення шкали [7], якщо існує монотонно зростаюча неперервна функція (шкала) $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $s(0) = 0$, така, що $d_1 = s(d_2)$. При цьому простір (X, d_1) позначається $s(X)$ і називається перетворенням простору (X, d_2) за допомогою шкали s.

В загальному випадку з ізоморфізму метричних просторів не випливає ізоморфність їх графів сусідства. Але в окремих випадках така імплікація має місце, тобто простори ізоморфні і їх графи сусідства також. Так, якщо для просторів (X, d_1) і (X, d_2) виконується рівність (3), то вони є ізоморфними і, що випливає з твердження 4, їхні графи сусідства також ізоморфні.

Зауважимо, що у неізоморфних просторів можуть бути ізоморфні основні графи. Зрозуміло, що ізоморфними еквідістантним метричним просторам є еквідістантні метричні простори. А тому з твердження 2 випливає, що граф сусідства довільного ультраметричного простіру (X, d_X), який не є еквідістантним (відповідно, не ізоморфний еквідістантному), і граф сусідства еквідістантного метричного простору, визначений на множині потужності $|X|$, ізоморфні.

Вінцеві добутки і графи сусідства метричних просторів

Нагадаємо означення вінцевого добутку метричних просторів (див. [6]). Нехай X і Y метричні простори, причому простір (Y, d_Y) — обмежений, а простір (X, d_X) — рівномірно дискретний, тобто існує таке додатне число r, що для довільних точок x_1 і x_2 простору X, $x_1 \neq x_2$, справджується нерівність $d_X(x_1, x_2) \geq r$.

Зафіксуємо деяку функцію-шкалу $s(t)$, для якої справджується нерівність

$$diam(s(Y)) < r. \tag{4}$$

На множині $X \times Y$ розглянемо метрику d_s, яку задано таким чином:

$$d_s((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \\ = \begin{cases} d_X(x_1, x_2), & \text{якщо } x_1 \neq x_2 \\ s(d_Y(y_1, y_2)), & \text{якщо } x_1 = x_2 \end{cases}.$$

Означення 2 ([6]). *Метричний простір $(X \times Y, d_s)$ називається вінцевим добутком метричних просторів X і Y, визначеним за допомогою шкали s, і позначається $X wr_s Y$.*

Теорема 1. *Нехай (X, d_X) — рівномірно дискретний, а (Y, d_Y) — обмежений метричні простори. Тоді існує континуум багато шкал s таких, що граф сусідства $G(X wr_s Y)$ вінцевого добутку метричних просторів X і Y ізоморфний вінцевому добутку $GX \wr GY$ графів сусідства цих просторів.*

Доведення. Множиною вершин графів $G(X wr_s Y)$ і $GX \wr GY$ є $X \times Y$. Покажемо, що існує континуум багато шкал s таких, що тотожне відображення $Id : X \times Y \to X \times Y$, $Id(x, y) = (x, y)$, для всіх $(x, y) \in X \times Y$, є ізоморфізмом графів $G(X wr_s Y)$ і $GX \wr GY$.

Нехай α — деяке дійсне число, $\alpha \geq 1$. Розглянемо родину лінійних функцій

$$\Omega = \{\frac{r}{diam(s(Y)) + \alpha} x \mid \alpha \in [1, 2]\}.$$

Кожна функція $s \in \Omega$ є монотонно зростаючою неперервною функцією, $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, причому $s(0) = 0$. Тому цю родину функцій можна розглядати як множину шкал. Крім того, для кожної функції s з множини Ω справедлива нерівність (4). Отже, для кожної такої шкали можна побудувати вінцевий добуток $X wr_s Y$.

Зафіксуємо деяку функцію $\widehat{s} \in \Omega$. Покажемо, що граф $G(X wr_{\widehat{s}} Y)$ ізоморфний графу $GX \wr GY$. Нехай дві вершини $u = (x_1, y_1)$ і $v = (x_2, y_2)$ графа $G(X wr_{\widehat{s}} Y)$ з'єднано ребром. Тобто не існує такої вершини $z = (x_3, y_3)$, для якої справедлива рівність

$$d_s(u, v) = d_s(u, z) + d_s(z, u).$$

За визначенням метрики d_s, це означає: або $x_1 \neq x_2$ і не існує такої точки $x_3 \in X$, що виконується рівність

$$d_X(x_1, x_2) = d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2),$$

або $x_1 = x_2$ і не існує такої точки $y_3 \in Y$, що виконується рівність

$$\widehat{s}(d_Y)(y_1, y_2) = \widehat{s}(d_Y)(y_1, y_3) + \widehat{s}(d_Y)(y_3, y_2).$$

Останнє рівносильно такому твердженню: або $x_1 \neq x_2$ і вершини x_1 і x_2 з'єднанно ребром в GX — графі сусідства простору X, або $x_1 = x_2$ і вершини y_1 і y_2 з'єднанно ребром в $G\widehat{s}(Y)$ — графі сусідства простору $\widehat{s}(Y)$. А це, за визначенням вінцевого добутку графів, означає, що вершини u і v з'єднанно ребром в графі $GX \wr G\widehat{s}(Y)$. Оскільки, за твердженням 4, графи $G\widehat{s}(Y)$ і GY ізоморфні, то останнє речення рівносильно такому: вершини u і v з'єднанно ребром в графі $GX \wr GY$.

Таким чином, графи $G(X wr_s Y)$ і $GX \wr GY$ ізоморфні. Для доведення теореми залишилось зауважити, що Ω — континуальна множина.

Приклад 1. *Нагадаємо, що кореневим деревом (T, v_0) називається дерево T з виділеною вершиною v_0, яка називається коренем. Вершина v називається вершиною l-го рівня (l — невід'ємне ціле число), якщо довжина ланцюга між вершинами v і v_0 в T дорівнює l. Однорідним $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$–деревом називається кореневе дерево, у якого кожна вершина $(i-1)$-го рівня зв'язана ребром рівно з k_i вершинами i-го рівня, $i \geq 1$. Шляхом в дереві (T, v_0) називатимемо таку послідовність вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots$, що $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(T)$ для кожного $i \geq 1$. На множині всіх шляхів ∂T кореневого дерева (T, v_0) природнім чином визначається метрика, а саме*

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = 1/(n + 1),$$

де n — довжина найбільшої спільної частини шляхів γ_1 і γ_2. Метрику ρ ще називають деревною метрикою, або метрикою шляхів в кореневому дереві.

Нехай (T_1, v_0) і (T_2, w_0) — два однорідних кореневих дерева, причому $|T_1| < \infty$. Добре відомо, що простори ∂T_1 і ∂T_2 — ультраметричні, тому графи сусідства просторів ∂T_1 і ∂T_2 є повними графами. Оскільки простір ∂T_1 — скінченний, то він рівномірно дискретний. Зауважимо також, що простір ∂T_2 є простором обмеженого діаметра, а тому можна розглянути вінцевий добуток $\partial T_1 wr_s \partial T_2$, $s \in \Omega$. Вінцевий добуток ультраметричних просторів також ультраметричний (див. [6]). А тому граф сусідства простору $\partial T_1 wr_s \partial T_2$ є повним графом, заданим на множині $|\partial T_1| \times |\partial T_2|$.

Приклад 2. *Нагадаємо, що простором Хемінга H_m називається метричний простір, заданий на множині булевих векторів довжини m; відстань між векторами $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ і $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ визначається за правилом:*

$$d_H(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|.$$

Простір Хемінга H_m можна також визначати, як метричний простір, заданий на множині вершин графа гіперкуба розмірності m з природною графовою метрикою.

Нехай H_m і H_k — простори Хемінга. Оскільки простори H_m і H_k є просторами, що визначаються на графах, то граф сусідства кожного простору ізоморфний графу, що визначає цей простір. Тобто граф сусідства H_m ізоморфний графу гіперкуба розмірності m, а H_k — розмірності k. Отже, з теореми 1 випливає, що граф сусідства $H_m wr_s H_k$, $s \in \Omega$, ізоморфний вінцевому добутку гіперкубів розмірності m і k.

1. Deza M. Dictionary of Distances / M. Deza, E. Deza. Elsevier. — 2006. — 400 p.
2. Harrary F. On the group of the composition of two graphs / F. Harrary // Duke Math Journal. — 1959. —V. 26. — P. 47–51.
3. Sabidussi G. The composition of graphs / G. Sabidussi // Duke Math Journal. — 1959. — V. 26. — P. 693–696.
4. Sabidussi G. The lexicographic product of graphs / G. Sabidussi // Duke Math Journal. — 1961. — V. 28. — P. 573–578.
5. Dobson E. Automorphism groups of wreath product digraphs / E. Dobson, J. Morris // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2009. — V. 16. — # R17.
6. Oliynyk B. Isometry groups of wreath products of metric spaces / B. Oliynyk // Algebra and Discrete Mathematics. — 2007. — N. 4. — P. 123–130.
7. Shoenberg I. J. Metric spaces and completely monotone functions / I. J. Shoenberg // The Annals of Mathematics. — 1938. — V. 39. — N. 4. — P. 811–841.

B. Oliynyk

PROXIMITY GRAPH OF WREATH PRODUCT OF METRIC SPACES

Some properties of the proximity graph of wreath product of metric spaces are considered. We establish conditions under which the proximity graph of wreath product of metric spaces is isomorphic to the wreath product of proximity graphs of these spaces.

Keywords: wreath product, proximity graph, metric space.