УДК 519.17

Дуденко М. А.

DOI: https://doi.org/10.18523/2617-70802201933-40

МЕТРИЧНА РОЗМІРНІСТЬ КІСТЯКОВИХ ДЕРЕВ УНІЦИКЛІЧНИХ ГРАФІВ

Найменшу за потужністю множину $M \in V$ скінченного графа $G = (V, E)$ таку, що для будь-якої пари вершин $u, v \in V$ існує принаймні одна вершина $t \in M$, для якої має місце нерівність

$$d_G(t, v) \neq d_G(t, u),$$

називають метричним базисом, а потужність множини M – метричною розмірністю. Оскільки, як відомо, пошук метричної розмірності для довільного графа є NP-важкою проблемою, то пошук метричної розмірності графів обмежують пошуком для певних родин графів.

Для уніциклічних графів, тобто графів, що містять рівно один цикл, після вилучення ребра можна отримати дерево. Метою статті є встановлення зв'язку між уніциклічним графом, що має метричну розмірність 2, та метричними розмірностями його кістякових дерев залежно від способу вилучення ребра.

Ключові слова: метрика, уніциклічний граф, метрична розмірність, метричний базис, кістякове дерево, відстань.

Вступ

Поняття метричної розмірності для метричних просторів було введене Л. Блюменталем у 1953 році в праці [1], але активні дослідження в цьому напрямку почались, коли це поняття було використане для графів незалежно один від одного в 1975 році Слатером [2] та у 1976 році Харарі та Мелтером [3]. Виявилось, що мінімальна кількість орієнтирів траекторії руху робота є метричною розмірністю в метричному просторі, що визначається графом. Крім того, Слатером також було показано, що ідею пошуку метричної розмірності можна використовувати в довготермінових засобах навігації. Метрична розмірність та метричні генератори набули також застосувань у фармацефтичній хімії [4], пошуку в мережах [5], пошуку стратегій у грі Mastermind [6] тощо.

У 1979 році Гері та Джонсон в [7] показали, що пошук метричної розмірності для довільного графа є NP-важкою проблемою. Тому пошук метричної розмірності графів обмежують пошуком для певних родин графів.

Так, у 2000 році у статті [4] було показано, що метрична розмірність графа G дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом, метричну розмірність $n-1$ має лише повний граф K_n, а $n-2$ — повний дводольний $K_{s,t}$. У праці [8] було знайдено метричну розмірність графів-коліс, а в [3] було доведено, що метрична розмірність простого циклу дорівнює двом.

С. Кулер, Б. Рагавачарі та А. Розенфельд в праці [9] описали певні властивості графів, що мають метричну розмірність 2. Вони довели, що для графа метричної розмірності 2 завжди можна вибрати метричний базис $\{a, b\}$ графа G так, щоб степені обох вершин a і b були щонайбільше 3, а також степінь довільної вершини в найкоротшому шляху між a, b має не перевищувати 5.

Л. Еро, П. Фейт, К. Канг та Уі Енджонг у статті [10] вивели оцінку метричної розмірності деякого графа $G - e$, отриманого з графа G, за допомогою видалення ребра:

$$dim(G-e) \leq dim(G) + 2,$$
$$dim(G-e) \geq dim(G) - 1. \quad (1)$$

У цій статті встановимо зв'язок між метричними розмірностями уніциклічного графа метричної розмірності 2 та його кістяковими деревами залежно від способу вилучення ребра. Оскільки кістякове дерево отримується з уніциклічного графа видаленням рівно одного ребра, то згідно з нерівностями (1) метрична розмірність довільного кістявого дерева такого уніциклічного графа задовольняє нерівність:

$$1 \leq dim(T) \leq 4.$$

Метою цієї статті є повна характеризація метричної розмірності кістякових дерев уніциклічного графа G з $dim(G) = 2$, тобто ми опишемо умови, за яких кістякове дерево має метричну розмірність k, де $1 \leq k \leq 4$.

Необхідні визначення

Нехай $G = (V, E)$ — простий скінченний зв'язний граф з множиною вершин V та множиною ребер E. На графі G однозначно визначається метричний простір (V, d_G), у якому метрика d_G між двома довільними вершинами v_1 і v_2 дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$ і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини v_1 і v_2, якщо $v_1 \neq v_2$.

Означення 1. Для трійки вершин $x, t, y \in V$ вершина t називається такою, що *розділяє* вершини x і y, якщо $x = y$ або виконується нерівність:

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

У наших дослідженнях припускатимемо, що $x \neq y$.

Означення 2. Підмножина $M \subset V$ називається *метричним генератором* графа G, якщо для будь-якої пари вершин з V існує принаймні одна вершина $t \in M$, що їх розділяє. Підмножина $M \subset V$ мінімальної потужності називається *метричним базисом,* а кількість вершин в метричному базисі — *метричною розмірністю* графа G і позначається $dim(G)$.

Нагадаємо, що кількість ребер, що є інцидентними даній вершині v, називається *степенем* вершини і позначається $deg(v)$.

Листком називається вершина графа, яка має степінь 1, а *внутрішніми* — вершини, що мають степінь не менший, ніж 3. Внутрішня вершина v є *близькою до листка* l, якщо немає інших внутрішніх вершин в найкоротшому шляху, що з'єднує v і l.

Означення 3. Внутрішню вершину графа G називатимемо *n-листковою*, якщо вона є близькою рівно до n листків.

Означення 4. Простий граф називається *уніциклічним*, якщо він містить рівно один цикл.

Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф. Позначимо символами $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ — його підграф, що є простим циклом.

Уніциклічний граф G є *парним*, якщо для деякого натурального k виконується рівність

$$|\widehat{V}| = 2k$$

і *непарним*, якщо

$$|\widehat{V}| = 2k + 1.$$

Для довільних двох вершин $u, v \in \widehat{G}$ існує два шляхи, що з'єднують ці вершини. Позначимо їх P_1 і P_2, а їх довжини — $d_G(P_1)(u, v)$ і $d_G(P_2)(u, v)$ відповідно.

Означення 5. Говоритимемо, що вершини u, v з циклу графа G є *майже симетричними*, якщо має місце одна з рівностей:

1) $d_G(u, v) = k - 1$, якщо G — парний;
2) $d_G(u, v) = k$, якщо G — непарний.

Означення 6. Вершина $v \in V \setminus \widehat{V}$ графа G *проектується* в вершину $w \in \widehat{V}$, якщо для довільної вершини $q \in \widehat{V}$ виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Означення 7. Внутрішню вершину в циклі уніциклічного графа G, в яку проектується принаймні одна вершина, що має степінь 3 і розташована поза циклом, називатимемо *основною.*

Властивості уніциклічних графів метричної розмірності 2

Спочатку нагадаємо структуру уніциклічних графів, метричної розмірності 2, що раніше було опубліковано у статтях [11–14].

Лема 1. *[11] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф. Якщо метрична розмірність G дорівнює 2, то для будь-якої вершини $v \in V \setminus \widehat{V}$ має місце нерівність:*

$$deg_G(v) \leq 3.$$

Лема 2. *[11] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф і $dim(G) = 2$. Тоді в графі G існує не більше двох основних вершин, в кожну з яких проектується рівно одна 2-листкова вершина.*

У статті [12] наведено поняття базисного графа, а також повного обплетення базисного графа.

Означення 8. Нехай G_1 — базисний граф. Позначимо через u та v основні вершини G_1. Уніциклічний граф G називається *повним обплетенням* графа G_1 ланцюгами $L_1, L_2, \ldots, L_r$, якщо G отриманий з G_1 склеюванням вершин степеня 2, що належать циклу базисного графа G_1, з кінцями ланцюгів $L_1, L_2, \ldots, L_r$ таким чином, що кожна вершина степеня 2 циклу склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для кожної 1-листкової вершини w та суміжної з нею вершини a виконується нерівність:

$$d_G(u, v) + d_G(v, w) + 1 \neq d_G(u, a).$$

Теорема 3. *[12] Непарний уніциклічний граф $G = (V, E)$ з двома основними вершинами має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*
1) G є базисним графом;
2) G є повним обплетенням деякого базисного графа G_1.
Парний уніциклічний граф $G = (V, E)$ з двома основними вершинами u і v, $|\widehat{V}| = 2k$, має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов 1) або 2) та

$$d_G(u, v) \neq k.$$

Означення повного обплетення, яке було введено для базисного графа, було узагальнено у статті [13] для більш простих конструкцій, наприклад, простого циклу та уніциклічного графа, що містить лише одну основну вершину, тобто мінорного графа.

Означення 9. Уніциклічний граф G називається *обплетенням* графа G_1, що є уніциклічним графом (або простим циклом), ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$, якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$, причому кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга.

Для таких родин графів також наведено властивості, за яких метричний базис графа складається з двох вершин.

Теорема 4. *[13] Нехай G — уніциклічний граф, що містить не більше однієї основної вершини. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*
1) G є простим циклом;
2) G є обплетенням простого циклу C_n ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$ $(r \leq n)$;
3) G є мінорним графом;
4) G є обплетенням мінорного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$ $(r \leq n-1)$, де n — кількість вершин в циклі G_1.

Для уніциклічних графів, що мають вершини степеня більшого, ніж 3, має місце наступна теорема.

Теорема 5. *[14] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф, для якого*

$$dim(G) = 2.$$

Якщо граф G є парним, то степінь будь-якої вершини в графі менший, ніж 4. Якщо G непарний, то максимальна кількість вершин зі степенем 4 дорівнює двом.

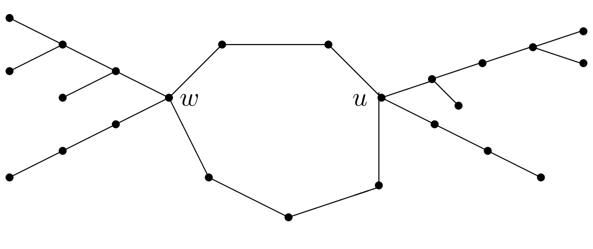

Рис. 1. Дві основні вершини мають степінь 4

Однак вершини степеня 4 можуть бути розташовані не довільним чином. Саме тому були введені родини графів типу «павучок» та «напівпавучок». Нагадаємо їх.

Означення 10. Непарний уніциклічний граф G з $|\widehat{V}| = 2k+1$ називається *графом типу «павучок»*, якщо виконуються такі умови:
(А) для будь-якої вершини v з $V \setminus \widehat{V}$

$$deg_G(v) \leq 3;$$

(Б) для будь-якої основної вершини w графа G існує рівно одна 2-листкова вершина, що проектується в w;
(В) в циклі $\widehat{G}$ графа G існує рівно дві вершини w і u степеня, більшого, ніж 2; крім того, принаймні одна з вершин w та u має степінь 4, кожна з вершин w і u є основною вершиною і (або) вершиною степеня 4 та виконується рівність:

$$d_G(w, u) = k.$$

Наприклад, граф G, зображений на рисунку 1, є графом типу «павучок» з двома вершинами, що мають степінь 4 і є основними.

Означення 11. Непарний уніциклічний граф G з $|\widehat{V}| = 2k+1$ називається *графом типу «напівпавучок»*, якщо виконуються такі умови:
(А) для будь-якої вершини v з $V \setminus \widehat{V}$

$$deg_G(v) \leq 3;$$

(Б) в циклі $\widehat{G}$ графа G існує рівно одна вершина w степеня більшого, ніж 2, крім того, $deg(w) = 4$;
(В) вершина w може бути основною, в такому випадку існує рівно одна 2-листкова вершина, що проектується в w.

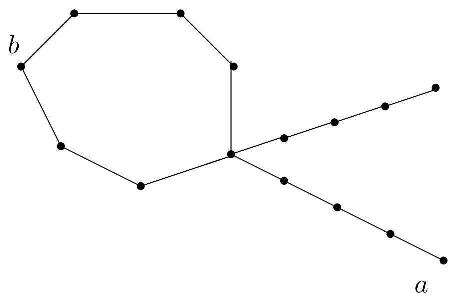

Рис. 2. «Граф-напівпавучок» без основних вершин

Граф G на рисунку 2 є графом типу «напівпавучок», у якого вершина степеня 4 не є основною.

Для графів типу «павучок» та «напівпавучок» також можна використати конструкцію обплетення, наведену в означенні 9. Таким чином, отримуємо обмеження для уніциклічних графів, що мають вершини степеня 4 та метричну розмірність 2.

Теорема 6. *[14] Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф з вершинами степеня 4. Граф має* *метричну розмірність $dim(G) = 2$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з умов:*

1) *G є графом типу «павучок»;*
2) *G є обплетенням деякого графа типу «павучок»;*
3) *G є графом типу «напівпавучок»;*
4) *G є обплетенням деякого графа типу «напівпавучок».*

А. Себо та Е. Танніер у [15] описали залежність метричної розмірності дерев від кількості листків.

Позначимо символом n_v кількість листків, для яких вершина v є внутрішньою.

Теорема 7. *[15] Якщо T — дерево (не ланцюг), то*

$$dim(T) = \sum_{v \in V, n_v \geq 1} (n_v - 1).$$

Розглянемо, як впливає на зміну метричної розмірності для графа G видалення ребра. У праці [10] Л. Еро, П. Фейтом, К. Кангом та Уі Енджонгом були наведені обмеження:

Теорема 8. *[10] Для довільного графа G та довільного ребра $e \in E(G)$ має місце нерівність:*

$$dim(G - e) \leq dim(G) + 2.$$

Теорема 9. *[10] Нехай G — довільний зв'язний граф, що не містить парних циклів, то*

$$dim(G - e) \geq dim(G) - 1.$$

Іншими словами, для довільного зв'язного графа G, що не містить парну кількість вершин в циклі (у разі наявності хоча б одного циклу), маємо

$$dim(G) - 1 \leq dim(G - e) \leq dim(G) + 2. \quad (2)$$

Зв'язок між метричною розмірністю уніциклічного графа і відповідних йому кістякових дерев

Означення 12. *Кістяковим деревом* графа G називається зв'язний граф без циклів, отриманий в результаті вилучення з графа G необхідної кількості ребер.

Згідно з означенням, після вилучення ребра з уніциклічного графа G отримаємо деяке його кістякове дерево T, тому розглянемо залежність метричної розмірності уніциклічного графа та його кістякового дерева

$$T = G - e.$$

Якщо деякий уніциклічний граф G має $dim(G) = 2$, то, за нерівністю (2), маємо

$$1 \leq dim(T) \leq 4.$$

Оскільки вилучення ребра для отримання кістякового дерева можна здійснювати різними способами, то метрична розмірність T для одного і того ж уніциклічного графа може змінюватись. Розглянемо більш детально вигляд кістякового дерева та його метричну розмірність залежно від способу задання уніциклічного графа G з $dim(G) = 2$.

Варто зазначити, що виконання умови теореми 9 справджується і для парних уніциклічних графів.

Теорема 10. *Нехай G — уніциклічний граф з $dim(G) = 2$ і T — його кістякове дерево. Тоді*

1) *$dim(T) = dim(G) - 1$, якщо G є простим циклом;*
2) *$dim(T) = dim(G) + 1$, якщо*
   а) *G є графом типу «напівпавучок», обплетенням «графа-напівпавучка», графом типу «павучок», у якого одна вершина має степінь 4, а майже симетрична з нею є основною, або обплетенням такого графа типу «павучок» і вилучено ребро в циклі G, що не є інцидентним вершині степеня 4;*
   б) *G є графом типу «павучок» або обплетенням «графа-павучка», крім випадку, зазначеного в підпункті (а), і вилучено ребро, що є інцидентним вершині степеня 4;*
3) *$dim(T) = dim(G) + 2$, якщо G є графом типу «павучок» або обплетенням «графа-павучка», крім випадку, наведеного в підпункті (а), і вилучено ребро, що не є інцидентним вершині степеня 4;*
4) *$dim(T) = dim(G)$ у всіх інших випадках.*

Доведення. Для початку зазначимо, що оскільки вилучення ребра e поза циклом уніциклічного графа G таким чином, що $G - e$ залишається зв'язним, не призводить до утворення кістякового дерева T, то розглядамимемо лише випадки вилучення ребра з $\widehat{G}$.

Описуватимемо залежність метричної розмірності дерева T від G відповідно до виду уніциклічного графа G.

Нехай G — простий цикл ($G = C_n$). Тоді незалежно від способу вилучення ребра отримаємо простий ланцюг $T = P_n$ (див. рис. 3).

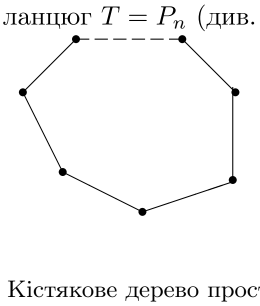

Рис. 3. Кістякове дерево простого циклу

Згідно з теоремою, наведеною в [4], $dim(P_n) = 1$, тому

$$dim(T) = dim(G) - 1.$$

У випадку обплетення простого циклу ланцюгами $L_1, L_2, \ldots, L_r$, отримаємо кістякове дерево T з рівно двома 2-листковими вершинами або з рівно однією 3-листковою. За теоремою 7 в обох випадках отримаємо $dim(T) = 2$, тобто

$$dim(T) = dim(G).$$

Зауважимо, що якщо в дереві T існують 1-листкові вершини, то згідно з теоремою 7 вони не впливатимуть на метричну розмірність такого дерева (оскільки $1 - 1 = 0$).

Припустимо, що G — граф типу «напівпавучок». Тоді він містить вершину w таку, що

$$deg(w) = 4.$$

Якщо дерево T утворене шляхом вилучення ребра e в $\widehat{G}$, то можливі такі випадки:

1) e неінцидентне w.
   Якщо w є основною в G, то за означенням «графа-напівпавучка» 11 існує рівно одна 2-листкова вершина, що проектується в w. Тому після вилучення ребра вершина w буде 3-листковою (див. рис. 4). Згідно з теоремою 7

$$dim(T) = (3 - 1) + (2 - 1) = 2 + 1 = 3.$$

   Якщо вершина w не є основною в G, то після вилучення ребра вона буде 4-листковою, тому $dim(T) = 4 - 1 = 3$. Отже,

$$dim(T) = dim(G) + 1;$$

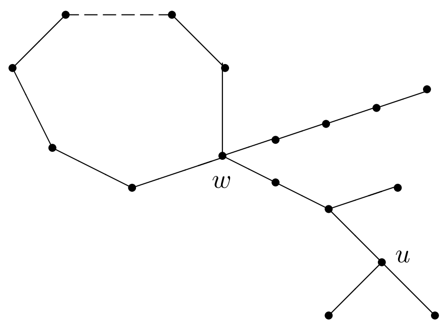

Рис. 4. В графі вилучено ребро, неінцидентне вершині степеня 4

2) ребро e інцидентне w.
   Варто зазначити, що у цьому випадку кількість листків для w стане на один менше порівняно з попереднім. Якщо w є основною в G, то існує рівно одна 2-листкова вершина, що проектується в w, і після вилучення ребра вершина w буде 2-листковою (див. рисунок 5). За теоремою 7

$$dim(T) = (2 - 1) + (2 - 1) = 1 + 1 = 2.$$

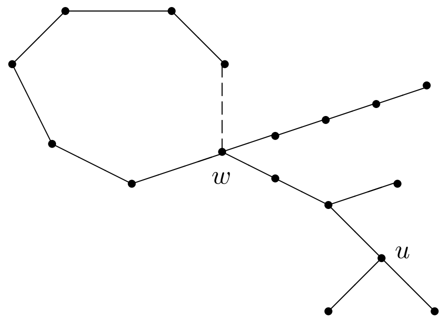

Рис. 5. У «графі-напівпавучок» вилучено ребро, інцидентне вершині степеня 4

   Якщо вершина w не є основною в G, то після вилучення ребра вона буде 3-листковою, тому $dim(T) = 3 - 1 = 2$. Отже,

$$dim(T) = dim(G).$$

Нехай G — граф типу «павучок», що містить вершини u, w, причому w є основною, а для u $deg(u) = 4$.

Розглянемо метричну розмірність дерева T залежно від способу вилучення ребра e з $\widehat{G}$:

1) e не є інцидентним u.
   Вершина w є основною, тому в неї проектуватиметься деяка 2-листкова вершина b, що розташована поза циклом графа G. Якщо вершина u буде також основною, то згідно з означенням графа типу «павучок» 10 в неї проектуватиметься рівно одна 2-листкова вершина a. Тоді в утвореному дереві T вершина w буде 1-листковою, а вершина u — 2-листковою (див. рисунок 6). За теоремою 7

$$dim(T) = (2-1)+(2-1)+(2-1) = 1+1+1 = 3.$$

   Якщо вершина u не є основною, то в утвореному дереві T вона буде 3-листковою. Матимемо рівність:

$$dim(T) = (2 - 1) + (3 - 1) = 1 + 2 = 3.$$

   Отже,

$$dim(T) = dim(G) + 1;$$

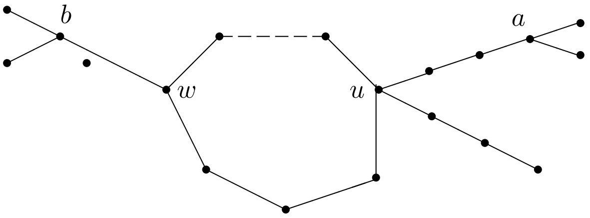

Рис. 6. Вилучено ребро, що не є інцидентним u, яка має степінь 4

2) ребро e є інцидентним u.
У цьому випадку кількість листків для u зменшиться на одиницю порівняно з попереднім, а для w залишиться незмінною. Таким чином, якщо u є основною в G, то існує рівно одна 2-листкова вершина a, що проектується в u, і після вилучення ребра вершина u буде 1-листковою (див. рисунок 7). За теоремою 7

$$dim(T) = (2-1) + (2-1) = 1 + 1 = 2.$$

Іншими словами,

$$dim(T) = dim(G).$$

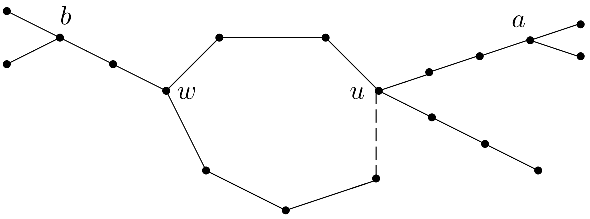

Рис. 7. Вилучено ребро, що є інцидентним u, яка має степінь 4

Нехай G — граф типу «павучок», що містить дві вершини степеня 4. Розглянемо випадок коли G має дві основні вершини u, w. Для решти видів «графів-павучків» з двома вершинами степеня 4 доведення аналогічне.

Як і в попередніх випадках, кістякове дерево T графа G може бути утворене двома способами:

1) ребро e не є інцидентним ні u, ні w.
Оскільки u, w — основні, то за означенням графа типу «павучок» 10 будуть існувати рівно одна 2-листкова вершина a та рівно одна 2-листкова вершина b, що проектуються в u і w відповідно.

Тоді в утвореному дереві T вершини u і w будуть 2-листковими (див. рисунок 8) і за теоремою 7 матимемо

$$dim(T) = (2-1) + (2-1) + (2-1) + (2-1) =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Отже,

$$dim(T) = dim(G) + 2;$$

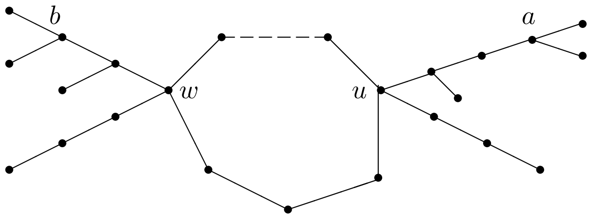

Рис. 8. Дві основні вершини степеня 4

2) ребро e є інцидентним u або w.
Оскільки u, w — основні, то існує рівно одна 2-листкова вершина a та рівно одна 2-листкова вершина b, що проектуються в u і w відповідно. Для визначеності покладемо, що e інцидентне u. Тоді кількість листків для u в утвореному дереві T зменшиться на одиницю порівняно з попереднім випадком, тому вона буде 1-листковою, а w залишиться 2-листковою (див. рисунок 9).

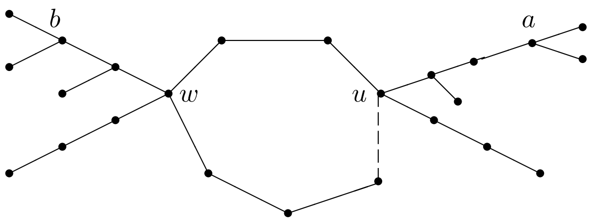

Рис. 9. Вилучено ребро, інцидентне основній вершині u

За теоремою 7 матимемо

$$dim(T) = (2-1)+(2-1)+(2-1) = 1+1+1 = 3.$$

Отже,

$$dim(T) = dim(G) + 1.$$

Зауважимо, що у випадку обплетення «графа-напівпавучка» , «графа-павучка» ланцюгами $L_1, L_2, \ldots, L_r$ вершини степеня 2 в $\widehat{G}$, що склеєні з $L_1, L_2, \ldots, L_r$, в кістяковому дереві T стануть 1-листковими або матимуть степінь 2. Оскільки, згідно з теоремою 7, 1-листкові вершини не впливають на метричну розмірність, тому $dim(T)$ залежатиме лише від ситуацій, описаних вище.

Припустимо, що уніциклічний граф G не містить вершин степеня 4 і не є простим циклом. Тоді, якщо $dim(G) = 2$, то граф G є мінорним графом або обплетенням мінорного графа, базисним графом або повним обплетенням базисного графа.

Оскільки за означенням мінорний граф G має рівно одну основну вершину v, то існуватиме рівно одна 2-листкова вершина u, що в неї проектується. У випадку вилучення ребра, що не є інцидентним v, в кістяковому дереві T вершина v буде 2-листковою, і матимемо рівно дві 2-листкові вершини u, v, а якщо вилучити ребро, інцидентне v, то вершина v матиме степінь 2, і в кістяковому дереві T отримаємо рівно одну 3-листкову вершину u. В обох випадках згідно з теоремою 7 отримаємо

$$dim(T) = 2.$$

Таким чином, незалежно від способу вилучення ребра
$$dim(T) = dim(G).$$

Якщо граф G є обплетенням мінорного графа ланцюгами $L_1, L_2, \ldots, L_r$, то незалежно від вилучення ребра в $\widehat{G}$ отримаємо дерево з двома 2-листковими вершинами (див. рисунок 10). Тому за теоремою 7 $dim(T) = 2$, а отже,

$$dim(T) = dim(G).$$

Нехай G — базисний граф. Тоді за означенням він має рівно дві основні вершини, в кожну з яких проектується рівно одна 2-листкова вершина. Таким чином, після вилучення довільного ребра з циклу G отримаємо дерево T з рівно двома 2-листковими вершинами. Згідно з теоремою 7 $dim(T) = 2$, тобто,

$$dim(T) = dim(G).$$

У випадку повного обплетення базисного графа ланцюгами $L_1, L_2, \ldots, L_r$ вершини степеня 2 в $\widehat{G}$, що склеєні з $L_1, L_2, \ldots, L_r$, в кістяковому дереві T стануть 1-листковими. Оскільки, згідно з теоремою 7, 1-листкові вершини не впливають на метричну розмірність, тому T також матиме рівно дві 2-листкові вершини і $dim(T) = 2$. Отже,

$$dim(T) = dim(G).$$

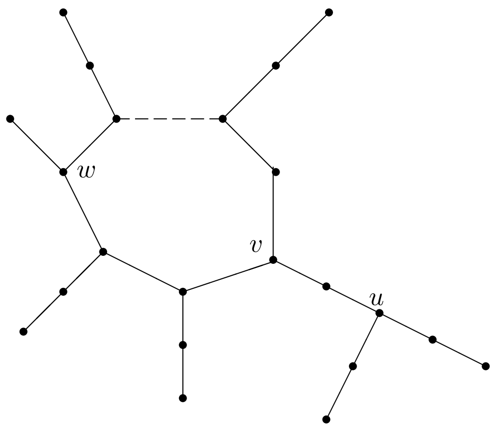

Рис. 10. Кістякове дерево обплетення мінорного графа ланцюгами

Список літератури

1. Blumenthal L. M. Theory and applications of distance geometry. Oxford : Clarendon Press, 1953.
2. Slater P. J. Leaves of trees // Congr. Number. 1975. No. 14. P. 549–559.
3. Harary F., Melter R. A. On the the metric dimension of a graph // Ars Combinatoria. 1976. No. 2. P. 191–195.
4. Chartrand G., Eroh L., Johnson M. A. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph // Discrete Appl. Math. 2000. No. 105. P. 99–113.
5. Beerliova Z., Eberhard F., Erlebach T., Hall A., Hoffmann M., Mihal'ak M., Ram L. S. Network discovery and verification // IEEE J. Sel. Areas Commun. 2006. No. 24. P. 2168–2181.
6. Chvatal V. Mastermind // Combinatorica. 1983. No. 3. P. 325–329.
7. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. Freeman, New York, 1979. 338 p.
8. Shanmukha B., Sooryanarayana B., Harinath K. S. Metric dimension of wheels // Far East J. Appl. Math. 2002. Vol. 8. No. 3. P. 217–229.
9. Khuller S., Raghavachari B., Rosenfeld A. Landmarks in graphs // Disc. Appl. Math. 1996. No. 70. P. 217—229.
10. Eroh L., Feit P., Kang C. X., Eunjeong Y. The effect of vertex or edge deletion on the metric dimension of graphs // Journal of Combinatorics. 2015. Vol. 6. No. 4. P. 433–444.
11. Дуденко М. А. Уніциклічні графи метричної розмірності 2 // Наукові записки НаУКМА. 2015. Т. 165: Фізико-математичні науки. С. 7–10.
12. Dudenko M., Oliynyk B. On unicyclic graphs of metric dimension 2 // Algebra and Discrete Math. 2017. Vol. 23. No. 2. P. 216–222.
13. Дуденко М. А. Метрична розмірність уніциклічних графів, що містять не більше однієї основної вершини // Вісник Львівського університету. 2017. – № 83: Механіко-математичні науки. С. 189–195.
14. Dudenko M., Oliynyk B. On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4 // Algebra and Discrete Math. 2018. Vol. 26. No. 2. P. 256–269.
15. Sebo A., Tannier E. On Metric Generators of Graphs // Mathematics of Operations Research. 2004. Vol. 29. No. 2. P. 383–393.

References

1. L. M. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry* (Clarendon Press, Oxford, 1953).
2. P. J. Slater, "Leaves of trees", Congr. Number. **14**, 549–559 (1975).
3. F. Harary, R. A. Melter, "On the the metric dimension of a graph", Ars Combinatoria. **2**, 191–195 (1976).
4. G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph", Discrete Appl. Math. **105**, 99–113 (2000).
5. Z. Beerliova, F. Eberhard, T. Erlebach, A Hall, M. Hoffmann, M. Mihal'ak, L. S. Ram, "Network discovery and verification", IEEE J. Sel. Areas Commun. **24** 2168–2181 (2006).
6. Chvatal V. "Mastermind", Combinatorica. **3.**, 325–329 (1983).
7. M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness* (Freeman, New York, 1979).
8. B. Shanmukha, B. Sooryanarayana, K. S. Harinath, "Metric dimension of wheels", Far East J. Appl. Math. **8** (3), 217–229 (2002).
9. S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs", Disc. Appl. Math. **70**, 217—229 (1996).
10. L. Eroh, P. Feit, C. X. Kang, Y. Eunjeong, "The effect of vertex or edge deletion on the metric dimension of graphs", Journal of Combinatorics. **6** (4), 433–444 (2015).
11. M. A. Dudenko, "Unitsyklichni hrafy metrychnoi rozmirnosti 2", Naukovi zapysky NaUKMA. **165**: Fizyko-matematychni nauky, 7–10 (2015).
12. M. Dudenko, B. Oliynyk, "On unicyclic graphs of metric dimension 2", Algebra and Discrete Math. **23** (2), 216–222 (2017).
13. M. A. Dudenko, "Metrychna rozmirnist unitsyklichnykh hrafiv, shcho mistiat ne bilshe odniiei osnovnoi vershyny", Visnyk Lvivskoho universytetu. **83**: Mekhaniko-matematychni nauky, 189–195 (2017).
14. M. Dudenko, B. Oliynyk, "On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4", Algebra and Discrete Math. **26** (2), 256–269 (2018).
15. A. Sebo, E. Tannier, "On Metric Generators of Graphs", Mathematics of Operations Research. **29** (2), 383–393 (2004).

M. Dudenko

METRIC DIMENSION OF SKELETAL TREES OF UNICYCLIC GRAPHS

The smallest subset $M \subset V$ of a graph $G = (V, E)$ such that for any pair $u, v \in V$ there exists at least one vertex $t \in M$ with

$$d_G(t, v) \neq d_G(t, u),$$

is called a *metric basis* of G, and its cardinality $|M|$ is called the *metric dimension* of G and denoted by $dim(G)$.

Since it is known that finding the metric dimension of a graph is NP-hard problem, finding the metric dimension of a graph is usually carried out in certain directions such as description of graph classes for which the metric dimension can be found in polynomial time and calculation of the metric dimension of certain, well-known families of graphs (such as grid graphs, wheels, etc.). One of these areas of research deals with characterization of graph families having a constant metric dimension. In particular, it has been proven that a graph has the metric dimension 1 if and only if it is a path. It is also known that metric dimensions of the cycle C_n, the complete graph K_n and the complete bipartite graph $K_{s,t}$ are equal to 2, $n-1$ and $s+t-2$, respectively.

Another area of research on the metric bases of graphs is the finding the metric dimension of graphs obtained by operations on graphs whose metric bases are known. In this paper, we present the relationship between a unicyclic graph (a graph with exactly one cycle) with metric dimension 2 and the metric dimension of its spanning trees. Since the corresponding spanning trees for a graph are determined ambiguously, depending on the method of deleting the edge to obtain such a tree, its metric dimension may also change.

The present paper describes conditions under which a spanning tree of a unicyclic graph G with $dim(G) = 2$ has the metric dimension from 1 to 4.

Keywords: metric, unicyclic graph, metric dimension, metric basis, spanning tree, distance.

Матеріал надійшов 27.07.2019