УДК 517.988

Кашпіровський О. І.

АПРОКСИМАЦІЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Будуються апроксимації гладких розв'язків однорідних та неоднорідних операторно-диференціальних рівнянь. Одержано відповідні оцінки точності апроксимації.

У сепарабельному гільбертовому просторі H розглядається задача Коші для операторно-диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} & y' + Ay = h(t), \\ & y(0) = f, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y = y(t)$ та $h(t)$ відповідно невідома та відома вектор-функції зі значеннями в H, $0 \le t \le +\infty$, A — самоспряжений додатний оператор в H (взагалі кажучи, необмежений). Якщо $H = L_2(-\pi, \pi)$, A — самоспряжений оператор, породжений диференціальним виразом $-\frac{d^2}{dx^2}$ з періодичними крайовими умовами $u(-\pi) = u(\pi)$, $u'(-\pi) = u'(\pi)$, то рівняння (1) переходить у відоме рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t). \tag{2}$$

Вивчення рівняння (1) дає змогу з єдиної точки зору досліджувати абстрактні рівняння параболічного типу, які є узагальненням рівняння (2).

Як відомо [1], розв'язок задачі Коші допускає представлення

$$y(t) = U(t) f + \int_0^t U(t-s) h(s)\, ds, \tag{3}$$

де $U(t) = e^{-At} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda$ — напівгрупа операторів, породжена оператором A, E_λ — спектральний розклад оператора A. Оскільки спектральний розклад E_λ оператора A, як правило, невідомий, то виникає природна задача побудови наближень півгрупи $U(t)$, а отже і розв'язків рівняння (1).

У працях А. В. Бабіна [2] та М. Л. Горбачука і В. В. Городецького [3] півгрупа $U(t)$ наближається поліномами $P_N(A)$ від оператора A. При цьому послідовність $P_N(A)$ збігається до $U(t)$ не на всіх векторах $f \in H$, а тільки для деяких C^∞ — векторів оператора A (у праці [2] на напіваналітичних, відповідно в [3] на аналітичних векторах оператора A). Суттєвий недолік таких наближень пов'язаний з використанням степенів від необмеженого оператора A, що приводить до нестійкості відповідних чисельних методів.

У працях Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка, В. Л. Макарова [4—5] для наближення аналітичної стискаючої півгрупи $U(t)$ використовується дробово-раціональна функція від оператора A

$$T(\gamma, A) = \frac{\gamma - A}{\gamma + A}, \quad \gamma > 0,$$

яка називається перетворенням Келі оператора A, або когенератором напівгрупи $U(t)$. При цьому відповідна послідовність поліномів

$$P_N(T(\gamma, A))$$

збігається при $N \to +\infty$ на всіх векторах $f \in H$. Якщо f — гладкий вектор оператора A, а саме $f \in D(A^m)$, $m > 0$, то для наближення розв'язку однорідного рівняння (1)

$$y_N(t) = P_N(T(\gamma, A)) f$$

має місце степенева оцінка збіжності

$$\|y(t) - y_N(t)\|_H \le C N^{-m-1/2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Для самоспряженого додатного оператора $A \ge I$ в [6] будуються наближення напівгрупи $U(t)$, використовуються частинні суми розкладу в ряд Фур'є–Чебишева функції $e^{-t/x}$ на відрізку [0, 1]

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) T_n^*(x),$$

де $T_n^*(x) = \cos(n \arccos(2x-1))$ — зміщені поліноми Чебишева 1-го роду [7]. При фіксованому $t > 0$ для довільного вектора $f \in H$ відповідна послідовність наближених розв'язків однорідного рівняння (1)

$$y_N(t) = S_N(A^{-1}) f$$

збігається до точного розв'язку $y(t)$ з експоненціальною швидкістю

$$\|y(t) - y_N(t)\|_H \le C \exp\left(-\delta \left(tN^2\right)^{1/3}\right) \|f\|_H. \tag{5}$$

Для однорідного рівняння (1) з нормальним секторіальним оператором A

$$AA^* = A^*A,$$
$$\sigma(A) \subseteq \left\{ z : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}\theta \right\}, \quad 0 \leq \theta < 1$$

для наближення напівгрупи $U(t)$ в праці [8] використовуються частинні суми $S_N(z)$ ряду Фур'є–Фабера функції

$$\exp\left[-\gamma t (1-z)(1+z)^{-1} \right].$$

Для відповідних наближень

$$y_N(t) = S_N(T(\gamma, A)) f$$

розв'язків однорідного рівняння (1) одержані оцінки типу (3)

$$\|y(t) - y_N(t)\|_H \leq$$
$$\leq C \exp\left[-\delta \left(t \cos \frac{\pi\theta}{2} \right)^{\frac{1}{3-\theta}} N^{\frac{2-\theta}{3-\theta}} \right] \|f\|_H, \quad (6)$$

де C, $\delta > 0$ сталі, що залежать від γ. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ оцінка (6) вироджується.

У праці В. Б. Василика та В. Л. Макарова [9] вивчаються апроксимації $V_N(t)$ розв'язку неоднорідного рівняння (1)

$$V(t) = \int_p^t U(t-\tau) h(\tau)\, d\tau. \quad (7)$$

Ці апроксимації одержуються підстановкою в (7) замість напівгрупи $U(t)$ відповідної частинної суми ряду Фур'є–Чебишева [6]. Оскільки оцінка (3) вироджується при $t = 0$, то для апроксимацій $V_N(t)$ має місце оцінка [9]

$$\|V(t) - V_N(t)\|_H \leq CN^{-2}. \quad (8)$$

Отже, наближений розв'язок $V_N(t)$ збігається до точного розв'язку $V(t)$ набагато повільніше, ніж апроксимації $y_N(t)$ збігаються до точного розв'язку однорідного рівняння згідно з оцінкою (5).

Виникає природна проблема поліпшення оцінки (5) при $t \to +0$, що відповідно дасть змогу поліпшити оцінку (8) швидкості збіжності наближеного розв'язку неоднорідного рівняння.

У даній праці для розв'язків однорідного рівняння (1), $A \geq 1$ з гладким початковим значенням f, будуються наближення у вигляді поліномів від A^{-1}, які одночасно задовольняють оцінкам типу (5) та (4), тобто при фіксованому $t > 0$ забезпечують експоненціальну швидкість збіжності, а при $t \to +0$ ця швидкість степенева.

Якщо $f \in D(A^s)$, $s > 0$, тобто $f = A^{-s}g$, $g \in H$, то оператор e^{-At} доцільно наближати поліномом $P_N(A^{-1})$ таким, що відповідний числовий поліном $P_N(x)$ на $[0,1]$ наближає функцію в деякій ваговій матриці. А саме, нехай $P_N(x)$ дорівнює N-й частинній сумі розвинення функції в ряд Фур'є за зміщеними поліномами Якобі $\{P_n^*(x,\alpha,\beta)\}_{n=0}^{\infty}$ [10, 11].

$$P_n^*(x,\alpha,\beta) =$$
$$= A_n x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+n}(1-x)^{\beta+n} \right],$$
$$A_n = \left[\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta} n!\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)} \right]^{1/2},$$

$\alpha > -1$, $\beta > -1$. Нагадаємо, що поліноми утворюють ортонормований базис у гільбертовому просторі

$$H(\alpha,\beta) = L_2\left([0,1], x^{\alpha}(1-x)^{\beta} dx \right),$$

що складаються з визначених на $[0,1]$ функцій $f(x)$, квадрати яких сумовані з вагою $\rho(x,\alpha,\beta) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

Диференціальний вираз

$$-\left(x - x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} + \left[(\alpha+\beta+2)\,x - \alpha - 1 \right] \frac{d}{dx}$$

породжує в $H(\alpha,\beta)$ самоспряжений оператор $\Lambda^2 = \Lambda^2(\alpha,\beta)$ [12]. Оскільки диференціальний вираз вироджується на кінцях відрізка $[0,1]$, то у цього оператора відсутні граничні умови. Поліноми Якобі $\{P_n^*(x,\alpha,\beta)\}_{n=0}^{\infty}$ утворюють в $H(\alpha,\beta)$ власний ортонормований базис оператора $\Lambda^2(\alpha,\beta)$.

$$\Lambda^2(\alpha,\beta) P_n^*(x,\alpha,\beta) =$$
$$= n(n+\alpha+\beta+1) P_n^*(x,\alpha,\beta).$$

Оскільки $\lambda_n^2 = n(n+\alpha+\beta+1) \geq 0$, то $\Lambda^2(\alpha,\beta)$ додатний оператор, отже однозначно визначається його квадратний корінь $\Lambda(\alpha,\beta) \geq 0$.

Оскільки функція $e^{-\frac{t}{x}}$ нескінченно диференційована по x на $[0,1]$ (належить класу Жевре порядку 2 [13]), то ця функція є C^{∞}-вектором оператора $\Lambda = \Lambda(\alpha,\beta)$, тобто належить $\bigcap_{m=1}^{\infty} D(\Lambda^m)$ – перетину областей визначення степенів оператора A.

Щоб оцінити точність наближення функції $e^{-\frac{t}{x}}$ частинними сумами ряду Фур'є–Якобі в $H(\alpha,\beta)$, потрібно мати оцінки моментів [14, 15]

$$M_m = \left\| \Lambda^m e^{-\frac{t}{x}} \right\|_{H(\alpha,\beta)}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

За допомогою цієї послідовності визначається функція

$$G(\lambda) = \max_{m\in N} \frac{\lambda^m}{M_m},$$

яка в свою чергу визначає гладкість функції $e^{-\frac{t}{x}}$ відносно оператора $\Lambda(\alpha,\beta)$, а отже і швидкість наближення поліномами функції $e^{-\frac{t}{x}}$ в $H(\alpha,\beta)$.

Враховуючи, що степені оператора Λ мають досить складну структуру, для одержання цих оцінок доцільно скористатися диференціальними співвідношеннями між поліномами Якобі, що відповідають різним параметрам [10, 11]

$$\frac{d}{dx}P_n^*(x,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}[n(n+\alpha+\beta+1)]^{1/2} \times \times P_{n-1}^*(x,\alpha+1,\beta+1), \qquad (9)$$

$$\frac{d^m P_n^*(x,\alpha,\beta)}{dx^m} = H_{m,n}P_{n-m}^*(\alpha+m,\beta+m),$$

$$H_{m,n} = 2^{-m}\left(\frac{n!\Gamma(m+n+\alpha+\beta+2)}{(n-m)!\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$m \le n$.

З цього співвідношення випливає [16, лема 2] еквівалентність двох сімейств норм соболєвського типу

$$\|f\|^2_{H(m,\alpha,\beta)} = \|f\|^2_{H(\alpha,\beta)} + \|\Lambda^m f\|^2_{H(\alpha,\beta)} = = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\lambda_n^{2m}\right)|f_n|^2$$

та

$$\|f\|^2_{W(m,\alpha,\beta)} = \|f\|^2_{H(\alpha,\beta)} + \left\|f^{(m)}\right\|^2_{H(\alpha+m,\beta+m)} = = \sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2 + \sum_{n=0}^{\infty}H^2_{m,n}|f_n|^2,$$

де $f_0, f_1, \dots f_n, \dots$ коефіцієнти розкладу функції $f(x)$ в ряд Фур'є–Якобі $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n P_n^*(x,\alpha,\beta)$.

Внаслідок асимптотичної формули Стірлінга для гамма-функції [11]

$$\Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi e p}\left(\frac{p}{e}\right)^p\left(1+\frac{1}{12p}+\frac{1}{288p^2}+\dots\right)$$

для коефіцієнтів $H_{m,n}$ має місце оцінка $H_{m,n} \le \le C2^{-m}n^m$, $n \ge 2m$.

Отже, моменти M_m можна оцінити за допомогою оцінки m-ї похідної функції $e^{-\frac{t}{x}}$ в $H(\alpha+m,\beta+m)$

$$M_m^2 = \left\|\Lambda^m e^{-t/x}\right\|^2 \le \lambda^{2m}_{2m}\left\|e^{-t/x}\right\|^2 + + \left\|\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-t/x}\right)\right\|^2_{H(\alpha+m,\beta+m)}. \qquad (10)$$

Для поточкової оцінки похідних функції $e^{-\frac{t}{x}}$ скористаємось формулою Коші для похідних функції комплексної змінної [17]

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-\frac{t}{x}}\right) = \frac{m!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_x}\frac{e^{-\frac{t}{z}}dz}{(z-x)^{m+1}},$$

де $m \in N$, $0 < x \le 1$, $\Gamma_x = \{z : |z-x| = x\}$ — коло радіуса x з центром у точці $z = x$. Відповідний йому круг $\{z : |z-x| \le x\}$ серед кругів з центром у точці $z = x$ є кругом найбільшого радіуса, в середині якого функція $e^{-\frac{t}{z}}$ є аналітичною. Звідси одержимо поточкові оцінки похідних [17]

$$\left|\frac{d^m}{dx^m}e^{-\frac{t}{x}}\right| \le \frac{m!}{x^m}\max_{z\in\Gamma_x}\left|e^{-\frac{t}{z}}\right| = \frac{m!}{x^m}e^{-\frac{t}{2x}},$$

з яких у свою чергу випливають оцінки квадратів норм похідних в $H(\alpha+m,\beta+m)$.

$$\left\|\frac{d^m}{dx^m}e^{-\frac{t}{x}}\right\|^2_{H(\alpha+m,\beta+m)} =$$

$$= \int\limits_0^1 x^{\alpha+m}(1-x)^{\beta+m}\left(\frac{d^m}{dx^m}e^{-\frac{t}{x}}\right)^2 dx \le$$

$$\le (m!)^2\int\limits_0^1 x^{\alpha-m}(1-x)^{\beta+m}e^{-\frac{t}{x}}dx \le$$

$$\le (m!)^2\int\limits_0^1 x^{\alpha-m}e^{-\frac{t}{x}}dx =$$

$$= (m!)^2\int\limits_1^{\infty} y^{m-\alpha-2}e^{-ty}dy \le$$

$$\le (m!)^2 t^{-(m-\alpha-1)}\int\limits_t^{\infty} u^{m-\alpha-2}e^{-u}du \le$$

$$\le (m!)^2 t^{-(m-\alpha-1)}\int\limits_0^{\infty} u^{m-\alpha-2}e^{-u}du =$$

$$= (m!)^2\frac{\Gamma(m-\alpha-1)}{t^{m-\alpha-1}},$$

звідки внаслідок (9) та формули Стірлінга одержимо шукані оцінки моментів M_m при малих $t > 0$.

$$\mathrm{M}_m \le C\frac{m!\,(\Gamma(m-\alpha-1))^{\frac{1}{2}}}{2^m t^{\frac{m-\alpha-1}{2}}} \le$$

$$\le C_1\frac{m^{m+\frac{1}{2}}(m-\alpha-2)^{m-\alpha-\frac{3}{2}}}{2^m\left(e^{\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{2}}\right)^{m-\alpha-1}}. \qquad (11)$$

В останньому виразі наявні множники з неузгодженими основами та показниками. Для того щоб одержати вираз функції $G(\lambda)$ представимо оцінку моментів M_m як функцію від $m-\alpha-1$ (тобто показника степені $\sqrt{t}$)

$$\mathrm{M}_m \le C_1 \left(\frac{(m-\alpha-1)^{\frac{3}{2}}}{2e^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}\right)^{m-\alpha-1} \times$$
$$\times \left(\frac{m}{m-\alpha-1}\right)^{m-\alpha-1} \left(\frac{m-\alpha-2}{m-\alpha-1}\right)^{\frac{m-\alpha-1}{2}} \times$$
$$\times\, m^{\alpha+\frac{3}{2}} (m-\alpha-2)^{-\frac{1}{2}} \le$$
$$\le C_2 \left(\frac{(m-\alpha-1)^{\frac{3}{2}}}{h\sqrt{t}}\right)^{m-\alpha-1}, \quad (12)$$

$$0 < h = 2e^{\frac{3}{2}} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Оцінка (12) для M_m є більш грубою, ніж попередня (11), але вона дає змогу одержати прийнятну оцінку збіжності ряду Фур'є–Якобі при малих t для функції $e^{-\frac{t}{x}}$. Визначимо функцію

$$G(\lambda) = \sup_{m>\alpha+1} \frac{\lambda^m}{\left(\frac{(m-\alpha-1)^{\frac{3}{2}}}{h\sqrt{t}}\right)^{m-\alpha-1}} =$$
$$= \lambda^{\alpha+1} \sup_{\mu>0} \left(\frac{\lambda h\sqrt{t}}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)^{\mu}.$$

Прирівняємо до нуля логарифмічну похідну функції $\Phi(\mu) = \left(\frac{\lambda h\sqrt{t}}{\mu^{\frac{3}{2}}}\right)^{\mu}$

$$\frac{\Phi'(\mu)}{\Phi(\mu)} = \ln(\lambda h\sqrt{t}) - \frac{3}{2}\ln\mu - \frac{3}{2} = 0.$$

Отже, при $\mu_0 = \frac{(\lambda h\sqrt{t})^{\frac{2}{3}}}{e}$ функція $\Phi(\mu)$ досягає максимуму

$$\Phi(\mu_0) = e^{\delta(t\lambda^2)^{1/3}}, \quad \delta = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{e}.$$

Таким чином

$$G(\lambda) = \lambda^{\alpha+1} e^{\delta(t\lambda^2)^{1/3}},$$

а отже, внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ одержимо

$$\left\| G(\lambda)\, e^{-\frac{t}{x}} \right\|_{H(\alpha,\beta)} < +\infty,$$

тобто

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)|^2 G^2(\lambda_n) < +\infty,$$

де $a_n(t)$ — коефіцієнти Фур'є–Якобі функції $e^{-\frac{t}{x}}$.

У такому разі для залишкового члена $R_N(x)$ ряду Фур'є–Якобі внаслідок монотонності $G(\lambda)$ одержимо

$$\|R_N(x)\|_{H(\alpha,\beta)} =$$
$$= \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_n(t) P_n^*(x,\alpha,\beta) \right\|_{H(\alpha,\beta)} =$$
$$= \frac{1}{G(\lambda_{N+1})} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} G(\lambda_{N+1}) a_n(t) P_n^*(x,\alpha,\beta) \right\|_{H(\alpha,\beta)}$$
$$\le \frac{1}{G(\Lambda_{N+1})} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} G(\lambda_n) a_n(t) P_n^*(x,\alpha,\beta) \right\|_{H(\alpha,\beta)}$$
$$\le CN^{-\alpha-1} e^{-\delta(tN^2)^{\frac{1}{3}}} \left\| G(\Lambda) e^{-t/x} \right\|_{H(\alpha,\beta)} \quad (13)$$

Якщо оператор A має неперервний спектр і спектральна міра dE_x оператора A^{-1} сильно абсолютно неперервна відносно міри Лебега, то для $f = A^{-s}g$, $g \in H$, $s > 0$, внаслідок нерівності Коші–Буняковського одержимо оцінку наближення розв'язку

$$\|y(t) - y_N(t)\|_H = \left\| R_N\left(A^{-1}\right) f \right\|_H =$$
$$= \left\| A^{-s} R_N\left(A^{-1}\right) g \right\|_H = \left\| \int_0^1 x^s R_N(x)\, dE_x g \right\|_H \le$$
$$\le \left(\int_0^1 x^{2s} R_N^2(x)\, dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 d\,(E_x g, g)_H \right)^{1/2} \le$$
$$\le CN^{-2s-1} e^{-\delta\left(tN^2\right)^{1/3}} \cdot \|g\|_H.$$

Якщо оператор A має точковий спектр, то спектральна міра dE_x не буде сильно абсолютно неперервною відносно міри Лебега. При цьому не можна оцінити різницю

$$y(t) - y_N(t) = R_N\left(A^{-1}\right) A^{-s} g, \quad g \in H$$

за допомогою нерівності Коші–Буняковського й одержати оцінку (12). У даному випадку точність наближення розв'язку однорідного рівняння (1) визначається поточковою ваговою оцінкою залишкового члена $R_N(x)$, або, точніше, рівномірною оцінкою добутку $x^s R_N(x)$. По заданому $s \ge 0$ слід при цьому підібрати параметри α, β так, щоб оцінка була найкращою. Таку оцінку можна одержати з поточкової вагової оцінки збіжності Фур'є–Якобі, яку одержав у 1930 р. С. Н. Бернштейн [10, 18]:

$$x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} (1-x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}} |f(x) - S_N(f,x)| \le$$
$$\le CN^{-p-\gamma} \ln N,$$

де $f(x)$ — p разів неперервно диференційована на [0, 1] функція, p-та похідна якої належить класу Гельдера—Ліпшиця порядку γ $(0 < \gamma \leq 1)$, $S_N(f, x)$ — N-та часткова сума ряду Фур'є—Якобі. Оскільки $e^{-\frac{t}{\alpha}}$ аналітична при $x > 0$, то параметр β можна брати довільним з проміжку $(-1, +\infty)$. Параметр α обираємо з умови $\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} = S$. Отже, $\alpha = 2s - 1/2$.

З (13) одержимо таке твердження:

Теорема 1. *Нехай $f \in D(A^s)$, $s \geq 0$, $S_N(t, x)$ — N-та часткова сума розвинення в ряд Фур'є за поліномами Якобі $\{P_n^*(x, 2s - 1/2, \beta)\}_{n=0}^{\infty}$, $\beta > -1$ довільне число, $y(t) = e^{-At} f$ розв'язок однорідного рівняння (1), $y_N(t) = S_N(t, A^{-1}) f$ відповідний наближений розв'язок, то має місце така оцінка збіжності:*

$$\|y(t) - y_N(t)\|_H \leq CN^{-2s-1/2} \ln N \times \times \exp\left(-\delta \left(tN^2\right)^{1/2}\right) \cdot \|A^s f\|_H,$$

де C, δ — деякі додатні сталі.

Для розв'язання неоднорідного рівняння (1) з правою частиною $h(t)$, яка має певну гладкість відносно оператора A та відносно змінної t, можна поліпшити оцінку (8) за допомогою оцінки (12).

Має місце таке твердження:

Теорема 2. *Нехай*

$$\|V(t) - V_N(t)\|_H \leq CN^{-2m-3} h(t)$$

— сильно неперервна вектор-функція зі значеннями в $D(A^m)$, $V(t) = \int\limits_0^t e^{-A\tau} h(t-\tau)\, d\tau$ — відповідний розв'язок неоднорідного рівняння (1), $V_N(t) = \int\limits_0^t S_N(\tau, A^{-1}) h(t-\tau)\, d\tau$ — відповідне наближення розв'язку $V(t)$, $S_N(t, x)$ — N-та часткова сума ряду Фур'є—Якобі функції $e^{-\frac{t}{\alpha}}$ з параметрами $\alpha = 2m - 1/2$, $\beta > -1$ довільне число. Тоді швидкість збіжності $V_N(t)$ до $V(t)$ допускає оцінку

$$\|V(t) - V_N(t)\|_H \leq CN^{-2m-5/2} \ln N.$$

Доведення теореми 2 можна зробити за аналогією з [9]. Внаслідок теореми 1

$$\|V(t) - V_N(t)\|_H = = \left\| \int\limits_0^t \left(e^{-A\tau} - S_N\left(\tau, A^{-1}\right)\right) h(t-\tau)\, d\tau \right\|_H = = \left\| \int\limits_0^t A^{-m} \left(e^{-A\tau} - S_N\left(\tau, A^{-1}\right)\right) h(t-\tau)\, d\tau \right\|_H \leq \leq \max_{0 \leq \tau \leq t} \left\|A^{mh} h(\tau)\right\|_H CN^{-2m-1/2} \times \times \ln N \int\limits_0^t \exp\left(-\delta\left(\tau N^2\right)^{1/3}\right) d\tau \leq \leq CN^{-2m-1/2} \ln N \int\limits_0^\infty \exp\left(-\delta\left(\tau N^2\right)^{1/3}\right) d\tau = = CN^{-2m-1/2} \ln N \frac{3}{\delta^3 N^2} \int\limits_0^\infty u^2 e^{-4} du = = C_1 N^{-2m-5/2} \ln N.$$

Теорему 2 доведено.

Якщо оператор A має спектральну міру $dE(\lambda)$ сильно абсолютно неперервну відносно міри Лебега, то оцінка (13) може бути поліпшена, а саме, внаслідок (13) можна одержати оцінку

$$\|V(t) - V_N(t)\|_H \leq CN^{-2m-3}.$$

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

2. *Бабин А. В.* Построение и исследование решений дифференциальных уравнений методами теории приближения функций. - Мат. сб., 1984. - Т. 123, № 2. - С. 147-174.

3. *Горбачук М. Л., Городецкий В. В.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. — Успехи мат. наук, 1984. - Т. 39, № 4. - С. 140.

4. *Arov D. Z. and Gavrilyuk I.P.A* method for solving initial value problems for differential equation in Hubert space based on the Cayley transform// Numer. Funct. Anal, and Optimiz. 14 (1993) 5& 6, P. 156-173.

5. *Gavrilyuk I. P. and Makarov V. L.* Representation and approximation for the solution of an initial value problem for a first order differential equation in Banach space. Universitaet Leipzig, NTZ, Preprint Nr. 9/95.

6. *Кашпіровський О. 1., Митник Ю. В.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів // Укр. мат. журн. — 1998. — 50. -№ 11, С 1506-1516.

7. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. — М.: Наука, 1983. — 452 с.

8. *Кашпіровський О. I.* Наближення розв'язків диференціальних рівнянь з секторіальним операторним коефіцієнтом. Теорія наближення функції та її застосування. Праці ЇМ НАН України, вип. 31.- 2000,- С 220-226.

9. *Makarov V. L, Vasylyk V. B.* Exact and approximate solutions of an abstract equation of the first order hyperbolyc type with a non-constant unbounded operator coefficient in Hubert Space. Теорія обчислень. Інститут кібернетики НАН України.— К., 1999.-С. 247-251.

10. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1976. - С. 328.

11. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их апроксимации.— М.: Мир, 1980.— 608 с.

12. *Извеков И. Г., Мартыненко Е. В.* О классах Жевре некоторых самосопряженных операторов с вырождением // Укр. мат. журн. - 1993.- 45, № 12. - С. 1622-1627.

13. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 327 с.

14. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. — К.: Наукова думка, 1984. -283 с.

15. *Горбачук В. И. и Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9. — Вып. 6.-С. 90-108.

16. *Томин Н. Г.* Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Докл. АН СССР. - Т. 212, № 5 (1973). - С. 1074-1077.

17. *Шабаш Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969. - 576 с.

18. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений.- Т. 1.- М.: АН СССР, 1952. - 587 с.

O. I. Kashpirovskyi

THE APPROXIMATION OF SMOOTH SOLUTIONS OF OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Approximations of smoothes solutions of homogeneous and non-homogeneous operator - differential equations and estimations of approximation accuracy are obtained.