

ДОСЛІДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ

Клітинні автомати дають змогу моделювати широкий спектр складних систем із локальною взаємодією. Попри те, що загалом поведінка окремо взятих клітинних автоматів може бути дуже простою, вдала їх комбінація або задання нестандартних правил взаємодії може значно ускладнити поведінку системи і призвести до доволі неоднозначних та непередбачуваних результатів спостережень. Стохастичність допомагає наблизити симульоване середовище до реальних умов і знайти оптимальну стратегію, яка буде більш стійкою до усіх можливих видів подій, в тому числі малоімовірних. Саме стохастичні клітинні автомати широко використовують у відтворенні природних явищ та процесів, симуляції транспортних потоків, криптографії тощо. У середовищах з наявним зовнішнім впливом стає актуальною задача пошуку оптимального керування системою.

У цій статті розглянуто оптимальні стратегії керування для систем стохастичних клітинних автоматів, наведено приклад використання алгоритму покращення стратегії в задачі гасіння лісових пожеж, проаналізовано оптимальність вибраної стратегії.

Ключові слова: стохастичні клітинні автомати, оптимальне керування, оптимальні стратегії, лісові пожежі.

Вступ

Клітинні автомати як моделі для нейронних мереж є раннім прикладом моделей для великих структурованих графом взаємодіючих систем. Уведення стохастичних ефектів у формалізм детермінованих клітинних автоматів мотивувалося фон Нейманом [1] як особливість, що відображає аспекти ненадійності в локальних координатах, тобто нейронах. Така недостовірність є фундаментальною для всіх організмів, і метою дослідження було побудувати моделі, які на глобальному рівні поводяться майже повністю надійно, хоча фундаментальні блоки системи були ненадійними.

Клітинні автомати нині забезпечують універсальний клас моделей для складних взаємодіючих систем з і без керування. Їх діапазон застосування охоплює, наприклад, штучне моделювання життя, вирощування кристалів, самоорганізацію систем хімічної реакції-дифузії, транспортний потік, формування зразків і природну екологію. Детальний огляд див. у роботі [2].

У задачах оптимізації, що вивчаються в цій роботі, розглядаємо входи до автоматів як рішення тих, хто приймає рішення, що керують поведінкою системи незалежними локальними збуреннями. Реакція системи залежить від структури сусідства, а обчислення виходу автомата призводять додатково до функції винагороди.

Стохастичні клітинні автомати

Нехай задано неорієнтований граф локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів $G(V, N)$, де V — множина вершин (клітинних автоматів) графа, $V \in \{1, 2, \dots, S\}$; $N(i)$ — множина суміжних автоматів для автомата i :

$$N(i) = \{j \in \{1, 2, \dots, S\} \setminus \{i\} \mid d(i, j) = 1, \\ i \in \{1, 2, \dots, S\}\},$$

де $d(i, j)$ — відстань між вершинами i та j графа G .

У кожен момент часу $t \in \mathbb{N}$:

- кожен автомат $i \in V$ перебуває в одному з можливих станів $\xi_i^t = x_i \in X_i$, $|X_i| < \infty$, X_i — множина можливих станів автомата i ;
- на вхід кожного автомата $i \in V$ подається сигнал α_i^t з множини входів цього автомата: $\alpha_i^t = y_i \in I_i$, $|I_i| < \infty$. При цьому сигнали α_i^t не залежать від сигналів інших автоматів та від історії системи.

На перехід автомата i з одного стану в інший впливають лише входні сигнали α_i^t , а також стани «сусідів» автомата з множини $N(i)$, що забезпечує локальну взаємодію між автоматами.

При переході системи в наступний момент часу $t + 1$ кожен автомат i , $i \in V$ подає на вихід сигнал γ_i^{t+1} з множини виходів цього автомата: $\gamma_i^{t+1} = o_i \in O_i$, $|O_i| < \infty$.

Таким чином, якщо в момент часу t автомат i перебуває у стані $\xi_i^t = x_i \in X_i$, околom його сусідів $\in N(i)$ і на вхід цього автомата подається сигнал $\alpha_i^t = y_i \in I_i$, то в наступний момент часу $t + 1$ автомат i перейде в стан $\xi_i^{t+1} = \tilde{x}_i \in X_i$, і на вихід автомат надішле сигнал $\gamma_i^{t+1} = o_i \in O_i$ з імовірністю

$$\begin{aligned} Q(x_i, x_j: j \in N(i), y_i; \tilde{x}_i, o_i) &= \\ &= \Pr(\xi_i^{t+1} = \tilde{x}_i, \gamma_i^{t+1} = o_i \mid \xi_i^t = x_i, \\ &\quad \xi_j^t = x_j, j \in N(i), \alpha_i^t = y_i), \end{aligned}$$

$$0 \leq Q(x_i, x_j: j \in N(i), y_i; \tilde{x}_i, o_i) \leq 1.$$

Кожному вихідному сигналу $\gamma_i^t = o_i$ автомата i ставиться у відповідність певне числове значення за допомогою функції перетворення $T^o: O_i \rightarrow \mathbb{R} \forall i \in V$. Аналогічно і з вхідним сигналом $\alpha_i^t = y_i$ і відповідною функцією $T^i: I_i \rightarrow \mathbb{R} \forall i \in V$. У результаті застосування цього перетворення до вхідних та вихідних сигналів отримуємо числову функцію оцінки керування системою клітинних автоматів. Тобто, маємо числову функцію оцінювання $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка залежить від вихідного сигналу автомата при переході в момент часу $t + 1$, а також функцію $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що залежить від вхідного сигналу в момент часу t , якщо автомат був у стані ξ_i^t . Сукупну функцію витрат при переході клітинного автомата в момент часу $t + 1$ позначимо як $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Таким чином, функція витрат в момент часу t має вигляд:

$$\begin{aligned} F^t &= \sum_{i=1}^S g(\xi_i^t, \alpha_i^t) + f(\gamma_i^{t+1}) \\ &= \sum_{i=1}^S r(\xi_i^t, \alpha_i^t, \gamma_i^{t+1}). \end{aligned}$$

Основною задачею оптимального керування системою стохастичних клітинних автоматів є оптимізація подання вхідних сигналів α_i^t таким чином, щоб глобальна функція витрат F прямувала до бажаного значення (залежно від задачі, це може бути максимізація, мінімізація, або певне конкретне значення):

$$\sum_{t=0}^{n-1} F^t = F \rightarrow \tilde{F}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Структура керування і стратегії

Стратегією будемо називати послідовність $\omega := \omega^\infty = (\omega_i^t: t \in \mathbb{N}_0, i \in V)$ сигналів, які подаються на вхід клітинного автомата/системи клітинних автоматів у кожен момент часу $t, t \in \mathbb{N}$. Загалом керування вхідними сигналами

клітинного автомата здійснюється за допомогою застосування певних політик вибору рішення, які базуються на історії станів автомата і його околу, та попередньо прийнятих рішень. Тобто, якщо в момент часу t для автомата i відома історія станів $h_i^t = (x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{t-1}, x_i^t), x_i^t \in X_i, i \in V$, разом з історією станів його околу $h_{N(i)}^t = (x_j^0: j \in N(i)), (x_j^1: j \in N(i)), \dots, (x_j^t: j \in N(i))$, $x_j^t \in X_j$, і до цього були прийняті рішення $\omega_i^{t-1} = (\alpha_i^0, \alpha_i^1, \dots, \alpha_i^{t-1}), \alpha_i^k \in I_i, k = \overline{0, t-1}$, то рішення щодо надсилання вхідного сигналу $\alpha_i^t = y_i \in I_i$ приймається з імовірністю

$$\begin{aligned} \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid \{\xi_i^0 = x_i^0, \xi_j^0 = x_j^0: j \in N(i), \\ \alpha_i^0 = y_i^0\}, \{\xi_i^1 = x_i^1, \xi_j^1 = x_j^1: j \in N(i), \\ \alpha_i^1 = y_i^1\}, \dots, \{\xi_i^{t-1} = x_i^{t-1}, \xi_j^{t-1} = x_j^{t-1}: \\ j \in N(i), \alpha_i^{t-1} = y_i^{t-1}\}, \xi_i^t = x_i^t, \xi_j^t = x_j^t: \\ j \in N(i)) = \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1}) \end{aligned}$$

і при цьому

$$\sum_{y_i \in I_i} \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1}) = 1.$$

Стратегія ω буде мати марковську властивість, якщо ймовірність вибору того чи іншого вхідного сигналу для автомата не залежить від минулих станів, околів та прийнятих рішень, а лише від поточного стану з його околом:

$$\begin{aligned} \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1}) \\ = \Pr(\alpha_i^t = y_i \mid \xi_i^t = x_i, \xi_j^t = x_j^t: j \in N(i)). \end{aligned}$$

Множину всіх стратегій позначатимемо Ω , множину марковських стратегій — Ω_M .

Якщо ж імовірність вибору стратегії для одного й того ж стану клітинного автомата та його околу не залежить від моменту часу t , тобто:

$$\begin{aligned} \Pr(\cdot \mid \xi_i^{t'} = x_i, \xi_j^{t'} = x_j^t: j \in N(i)) \\ = \Pr(\cdot \mid \xi_i^{t''} = x_i, \xi_j^{t''} = x_j^t: j \in N(i)) \end{aligned}$$

для будь-яких $t' \neq t''$, то такі стратегії називаються стаціонарними (марковськими) допустимими стратегіями (що утворюють множину Ω_S).

Допустимі стаціонарні (марковські) стратегії називаються детермінованими (множина Ω_D), якщо для всіх станів автомата та його околу вхідний сигнал вибирається однозначно, тобто

$$\Pr(\cdot \mid \xi_i^t = x_i, \xi_j^t = x_j^t: j \in N(i))$$

для всіх $x_i \in X_i$ — міра, зосереджена в одній точці.

У цій роботі основним критерієм якості керування будуть очікувані середні витрати в одиницю часу на необмеженому горизонті, тобто

$$\Phi^\omega(x^0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_{x^0}^\omega \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} r(\psi^t, \omega, \gamma^{t+1}),$$

де $E_{x^0}^\omega$ — математичне сподівання, що відповідає процесу, керованому стратегією ω , якщо початковий стан системи x^0 .

Стратегію ω^* називатимемо оптимальною у класі K , якщо для всіх $x^0 \in X$

$$\Phi^\omega(x^0) = \inf_{\omega \in K} \Phi^\omega(x^0).$$

Теорема 1. *Розглянемо систему синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів, задану на графі $G(V, N)$ зі скінченним простором станів X_i та скінченним простором керувань I_i , $i \in V$. Нехай множина допустимих керувань системою не залежить від моменту часу t . Тоді серед множини усіх допустимих стаціонарних марковських детермінованих стратегій Ω_D існує оптимальна стратегія $\omega^* \in \Omega_D$.*

Доведення. (I) Якщо система в момент часу $t = 0$ була в початковому стані $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_S^0)$, і для керування вибрана стратегія ω , тоді:

$$E_{x^0}^\omega F = \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{i=1}^S \sum_{\xi_i^{t+1} \in X_i} Q(\xi_i^t, \xi_j^t : j \in N(i), \alpha_i^t; \xi_i^{t+1}, \gamma_i^{t+1}) \Pr(\alpha_i^t = y_i | h_i^t, h_{N(i)}^t, \omega_i^{t-1}) r(\xi_i^t, \alpha_i^t, \gamma_i^{t+1}).$$

Для кожної можливої стратегії $\omega \in \Omega$ визначимо очікувані дисконтовані витрати для деякого дисконтованого множника $\beta \in (0; 1)$, якщо процес почався зі стану x^0 :

$$\mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta) = E_{x^0}^\omega \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \omega, \gamma^{t+1}), \quad (1)$$

$$\text{і } \mathcal{F}_{x^0}(\beta) = \inf_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta).$$

Оскільки множини вхідних сигналів $I_i, \forall i \in V$ скінченні, і при цьому вони не залежать від історії системи та інших автоматів, можемо показати, що простір допустимих стратегій Ω_D є компактним. У кожен фіксований момент часу t приймається рішення $\omega^t = (\omega_1^t, \omega_2^t, \dots, \omega_S^t)^T$, $\omega_i^t \in I_i, i \in V$. При цьому $\forall i \in V$ I_i є компактним, як простір зі скінченною кількістю точок. А оскільки $\Omega_D = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_S$ дорівнює добутку всіх множин I_i , то за теоремою Тихонова Ω_D також компактний.

Функціонал $\mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta)$ як функція від $\omega \in \Omega$ неперервним для всіх x^0 і $0 \leq \beta \leq 1$, оскільки кожен його член із (7) є неперервною функцією [3].

У силу неперервності функціоналу $\mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta)$ та компактності простору допустимих стратегій, можемо стверджувати, що існує стратегія $\tilde{\omega}$, така, що для всіх $x^0 \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_S$

$$\mathcal{F}_{x^0}^{\tilde{\omega}}(\beta) = \mathcal{F}_{x^0}(\beta) = \inf_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta).$$

Використовуючи умовне математичне сподівання, для будь-якого $p \geq 0$ маємо:

$$\mathcal{F}_{x^0}^\omega(\beta) = E_{x^0}^\omega \left\{ \sum_{t=0}^p \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) + E^\omega \left(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = x^0, \dots, \psi^p = x^p \right) \right\}.$$

За допомогою принципу Беллмана можна показати: якщо x^0, x^1, \dots, x^p — перші $p+1$ станів процесу $(\psi, \tilde{\omega}(\beta))$, то для будь-якої стратегії $\omega \in \Omega_D$, згідно з (1), виконується:

$$E^{\tilde{\omega}} \left(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \tilde{\omega}^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = x^0, \dots, \psi^p = x^p \right) \leq E^\omega \left(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \omega^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = x^0, \dots, \psi^p = x^p \right).$$

Позначимо:

$$\Phi^{\tilde{\omega}}(x^0, \dots, x^p) = E^{\tilde{\omega}} \left(\sum_{t=p+1}^{\infty} \beta^t r(\psi^t, \tilde{\omega}^t, \gamma^{t+1}) \mid \psi^0 = x^0, \dots, \psi^p = x^p \right).$$

Використовуючи скінченність множини послідовностей (x^0, x^1, \dots, x^k) , можна показати, що для деякого фіксованого k , $\Phi^{\tilde{\omega}}(x^0, \dots, x^k)$ залежить лише від x^k [4]. Використовуючи незалежність $\Phi^{\tilde{\omega}}(x^0, \dots, x^k)$ від історії, можна ввести такий керуючий вплив для $k = 1$

$$\tilde{\omega}_{(1)}(x^0, x^1, \dots, x^k, \dots) = (\omega_{(1)}^0(x^0), \omega_{(1)}^1(x^1), \omega_{(1)}^2(x^1, x^2), \dots, \omega_{(1)}^k(x^1, x^2, \dots, x^k), \dots),$$

який буде давати таке саме умовне матсподівання, що й оптимальна стратегія $\tilde{\omega}$: $\Phi^{\tilde{\omega}_{(1)}}(x^0) = \Phi^{\tilde{\omega}}(x^0)$. Тому можемо змінити відповідне керування: $\omega_{(1)}^0(x^0) = \tilde{\omega}^0(x^0)$.

Продовжуючи ті самі міркування для $k = 2$ і вже для стратегії $\tilde{\omega}_{(1)}$, отримуємо таку стратегію:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{(2)}(x^0, x^1, \dots, x^k, \dots) &= \\ &= (\omega_{(2)}^0(x^0), \omega_{(2)}^1(x^1), \omega_{(2)}^2(x^2), \omega_{(2)}^3(x^2, x^3), \dots, \\ &\quad \omega_{(1)}^k(x^2, x^3, \dots, x^k), \dots), \end{aligned}$$

і відповідно: $\omega_{(2)}^0(x^0) = \omega_{(1)}^0(x^0), \omega_{(2)}^1(x^1) = \omega_{(1)}^1(x^1)$.

Продовжуючи застосування даної процедури, врешті-решт отримуємо послідовність $\tilde{\omega}_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Згідно з [4], за допомогою методу діагоналізації Вейерштрасса, можна отримати марковську стратегію $\dot{\omega}(\beta) = \{\dot{\omega}_{x^k}, k = 1, \dots, p\}$, для якої:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{(\cdot)}(x^0, x^1, \dots, x^k, \dots) &= \\ &= (\omega_{(\cdot)}^0(x^0), \omega_{(\cdot)}^1(x^1), \omega_{(\cdot)}^2(x^2), \dots, \omega_{(\cdot)}^k(x^k), \dots), \end{aligned}$$

і при цьому $\omega_{(\cdot)}^j(x^j) = \omega_{(j)}^j(x^j)$, $j \in \mathbb{N}$.

Таким чином, очікувані дисконтовані витрати для всіх допустимих стратегій $\tilde{\omega}_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ є однаковими, і в точності такими, як для оптимальної стратегії: $\mathcal{F}_{x^0}^{\tilde{\omega}_{(n)}}(\beta) = \mathcal{F}_{x^0}^{\dot{\omega}}(\beta)$ для будь-якого $x^0 \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_S$.

Більше того, маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{x^0}^{\tilde{\omega}_{(n)}}(\beta) = \mathcal{F}_{x^0}^{\dot{\omega}}(\beta) &\implies \\ \implies \mathcal{F}_{x^0}^{\dot{\omega}}(\beta) = \mathcal{F}_{x^0}^{\tilde{\omega}}(\beta). \end{aligned} \quad (2)$$

Згідно з [4, р.104], з використанням рівняння Беллмана, можна показати, що якщо для марковської стратегії виконується (2), то ця стратегія є стаціонарною марковською. Таким чином, існує стаціонарна марковська стратегія $\omega^*(\beta)$, для якої:

$$\mathcal{F}_{x^0}^{\omega^*}(\beta) = \min_{\omega \in \Omega} \mathcal{F}_{x^0}^{\omega}(\beta).$$

Можна знайти нескінченну послідовність дисконтованих множників $\beta_\alpha \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow \infty$ таку, що оптимальні стратегії $\omega^*(\beta_\alpha)$ будуть збігатися: $\omega^*(\beta_\alpha) = \tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_{x^k} = \tilde{\omega}_{x^k}(\psi), k = 1, \dots, S\}$.

Візьмемо довільну послідовність $\beta_{\alpha'} \rightarrow 1$, $\alpha' \rightarrow \infty$ з відповідними стратегіями $\omega^*(\beta_{\alpha'}) = \{\omega_{x^k}^*(\beta_{\alpha'}), k = 1, \dots, S\}$, які визначаються через функції $\omega^*(\beta_{\alpha'}) = (\omega_{x^k}^{*t}(\beta_{\alpha'}): t \in \mathbb{N})$, де $(\omega_{x^k}^{*t}(\beta_{\alpha'}))$ визначені на скінченній множині, таким чином, маючи скінченну кількість значень.

Отож, маємо нескінченну підпослідовність $\beta_{\alpha'} \rightarrow 1$ послідовності $\beta_\alpha \rightarrow 1$, якій відповідає та сама стратегія $\tilde{\omega}$.

Процес $(\psi, \tilde{\omega})$ є однорідним марковським ланцюгом з імовірностями переходу

$$\text{Pr}\{\psi_i | \psi_j, \tilde{\omega}_{\psi_j}, j = 1, \dots, c\} = Q(\psi_i | \psi_j).$$

Згідно з доведенням [4, р. 112], для фіксованої стратегії $\tilde{\omega}$, використовуючи збіжність за Чезаро, існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} E_{x^0}^{\tilde{\omega}} r(\psi^t, \tilde{\omega}, \gamma^{t+1}) = \Phi^{\tilde{\omega}}(x^0).$$

Застосувавши абелеву теорему до цієї границі, отримуємо дисконтовані витрати для $\beta_\alpha \rightarrow 1$. Отже, теорему доведено.

Сформулюємо без доведення результат, аналогічний [5, Theorem 1].

Теорема 2. Процес еволюції системи синхронних локально взаємодіючих стохастичних клітинних автоматів ергодичний і його єдиний граничний і стаціонарний розподіл $\pi^\omega = (\pi^\omega(x_k): k = 1, \dots, S)$ такий, що:

$$\begin{aligned} \pi^\omega(x_k) &= \pi^{\omega_k}(x_1, x_2, \dots, x_S) \\ &= \prod_{i=1}^S \left(\frac{(1 - p(x_i, y_i))}{p(x_i, y_i)} \right) G(\psi_k)^{-1}, \end{aligned}$$

де $p(x_i, y_i)$ – ймовірність i -го клітинного автомата залишитись в стані x_i , якщо на вхід був поданий сигнал y_i , $G(\psi_k)$ – нормуюча константа.

Процедура покращення стратегії керування [4, р. 116] полягає у такому. Вибирається довільна початкова стратегія ω_0 і проводиться такий алгоритм оптимізації:

1. Для обраної стратегії ω і для певної (невідомої) функції $\nu = (\nu(\psi_k): k = 1, \dots, S)$ розв'язується система рівнянь:

$$\begin{cases} R_{\psi_k}^\omega + \nu(\psi_k) = r(\psi_k, \omega_k) + \\ + \sum_{p=1}^c Q(\psi_p | \psi_k, \omega_k) \nu(\psi_p), k = 1, \dots, S; \\ \sum_{k=1}^c \pi^{\omega_k}(\psi_k) \nu(\psi_k) = 0 \end{cases}$$

2. Для кожного $k = 1, \dots, S$ визначимо A^k як множину рішень ω_k^* , що задовольняє

$$\sum_{i=1}^c Q(\psi_i | \psi_k, \omega_k^*) R_{\psi_i}^\omega = R_{\psi_k}^\omega,$$

і при цьому:

$$\begin{aligned} r(\psi_k, \omega_k^*) + \sum_{p=1}^c Q(\psi_p | \psi_k, \omega_k^*) \nu(\psi_p) &< \\ &< r(\psi_k, \omega_k) + \sum_{p=1}^c Q(\psi_p | \psi_k, \omega_k) \nu(\psi_p) = \\ &= R^\omega + \nu^\omega(\psi_k). \end{aligned}$$

3. Для всіх можливих станів системи ψ_k , для яких множина A^k непорожня, змінюємо керування ω_k на $\omega_k^* \in A^k$, таким чином формуючи нову стратегію ω^* , і повторюємо процедуру покращення. Якщо ж $\forall k = 1, \dots, S \ A^k = \emptyset$, то стратегія ω є оптимальною.

Задача поширення лісових пожеж

Розглянемо застосування отриманих результатів до розв'язання задачі поширення лісових пожеж.

Територія поширення лісової пожежі розглядається як двовимірна сітка розміром $L_x \times L_y$. Кожна клітина сітки моделює частину лісу і є клітинним автоматом, який визначається:

- позицією $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ у сітці, де $i = 1, \dots, L_x$ — відповідний рядок, а $j = 1, \dots, L_y$ — відповідний стовпчик;
- скінченною множиною станів автомата $X_{i,j}^t \in \{E, A, B, D\}$, яка описує поточний стан ділянки лісу в кожен момент часу. Стан E (Empty) позначає ділянку лісу, яка не містить достатньої кількості рослинності, щоб загорітись (імітація неоднорідності лісу). Стан A (Alive) позначає ділянку, яка перебуває в потенціальній небезпеці. Стан B (Burning) позначає область лісу, яка горить у даний момент часу. Стан D (Dead) визначає клітину, яка вже повністю згоріла;
- множиною сусідніх клітин $N(i, j)$. У цій моделі «сусідами» будуть вважатися клітини з околу фон Неймана 1-го порядку: 4 клітини навколо обраної, що мають з нею спільне ребро [6].

Для керування введемо скінченну множину вхідних символів $I_{i,j} \in \{Z, F\}$, де $\alpha_{i,j}^t \in I_{i,j}$ — об'єм води або іншої вогнегасної речовини, яка виливається на ділянку з позицією (i, j) в момент часу t . Тут Z (Zero) — це бездіяльність у вибраній позиції, F (Full) — літак виливає повний бак для гасіння пожежі у вибраній ділянці.

Еволюція системи відбувається таким чином:

- *Генерація лісу.* В момент часу t_0 для кожної клітини системи генерується її початковий стан $\xi_{i,j}^0 \in \{E, A\}$. З імовірністю q_e клітина набуває стан E , тобто не зможе загорітись взагалі, і відповідно з імовірністю $(1 - q_e)$ — стан A .
- *Початок пожежі.* Після початкової генерації лісу, випадковим чином вибирається довільна клітина (або декілька клітин), яка має стан A , і стан обраних клітинних автоматів змінюється на B — та-

ким чином розпочинається процес лісової пожежі.

Також для кожної клітини у стані A існує мала, але ненульова ймовірність загорітись p_b , незалежно від того, чи є поряд палаючі клітини.

- *Поширення пожежі* [6]. Якщо в момент часу t клітина перебуває у стані $\xi_{i,j}^t = A$, на вхід подається сигнал $\alpha_{i,j}^t = y_{i,j} \in I_{i,j}$, і в околі її сусідів $N(i, j)$ є хоча б одна клітина, яка має стан B , то в наступний момент часу її стан може змінитися на $\xi_{i,j}^{t+1} = B$, а на вихід буде подано сигнал $(A \rightarrow B) \in O_{i,j}$ з певною ймовірністю.
- *Вигорання лісу.* В кожен момент часу t ділянка лісу, яка горить, може згоріти повністю, тобто, якщо на вхід подається сигнал $\alpha_{i,j}^t = y_{i,j} \in I_{i,j}$, клітина з околом $N(i, j)$ зі стану $\xi_{i,j}^t = B$ може перейти в стан $\xi_{i,j}^{t+1} = D$, а на вихід буде подано сигнал $(B \rightarrow D) \in O_{i,j}$ з певною ймовірністю.
- *Гасіння пожежі.* У випадку спроби гасіння пожежі в клітині (i, j) , якщо на вхід був поданий сигнал $\alpha_{i,j}^t = F$, а в її околі рівно $n_{i,j}^t$ палаючих клітин, то її стан у момент часу $t + 1$ може змінитися з $\xi_{i,j}^t = B$ на $\xi_{i,j}^{t+1} = A$, і на вихід буде поданий сигнал $(B \rightarrow A) \in O_{i,j}$ з деякою ймовірністю.
- *Відновлення лісу.* Ліс, який повністю згорів, з часом має властивість відновлюватися. Нехай у момент часу t в околі клітини рівно $n_{i,j}^t$ сусідів у стані A , і при цьому жодної клітини в стані B , тоді стан цього автомату в момент часу $t + 1$ може змінитися з $\xi_{i,j}^t = D$ на $\xi_{i,j}^{t+1} = A$, і на вихід буде поданий сигнал $(D \rightarrow A) \in O_{i,j}$ з певною ймовірністю.

Умовно позначимо ймовірність живої клітини загорітись як p_B , палаючої клітини згоріти — p_D , мертвої клітини відновитись — p_A , і ймовірність загасити палаючу клітину як p_E (E — extinguish). Якщо під час генерації лісу клітина не перейшла в статус E — Empty, то, використовуючи дані позначення, її подальшу поведінку можна описати ланцюгом Маркова:

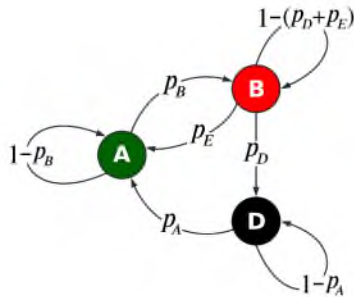


Рис. 1. Ланцюг Маркова для «живої» ділянки лісу

Загалом можна розглядати два типи стратегій: глобальні — для всієї системи, та локальні — для кожного клітинного автомата та його околу. При виборі оптимальної стратегії для цієї задачі постають ключовими дві проблеми.

1. При використанні глобальної стратегії кількість усіх можливих станів системи зростає експоненційно. За трьох активних станів кожного клітинного автомата (не враховуючи стан Empty), кількість станів системи залежно від розміру сітки буде дорівнювати: за 2×2 — **81** стан, за 3×3 — **19 683** стани, за 4×4 — **43 046 721** стан і т. д. Враховуючи той факт, що у процедурі покращення стратегії необхідно розв'язувати систему лінійних рівнянь із кількістю невідомих, що дорівнюють кількості станів, при оптимізації стратегії вже для сітки 3×3 процес покращення буде потребувати багато ресурсів і часу, що робить використання глобальної стратегії нерациональним.
2. Для великих розмірностей сітки використання локальних стратегій значно спрощує обчислення та зменшує час оптимізації. Однак не можна стверджувати, що використання локальних стратегій дасть такий самий результат, що і в разі використання глобальної стратегії. Тобто мінімізація витрат на локальному рівні не обов'язково приведе до глобальної мінімізації.

Використання локальних стратегій легко вирішує першу проблему, однак неминуче тягне за собою другу. Для того щоб використовувати локальні стратегії замість глобальної, потрібно перевірити, наскільки сильно відрізняється функція витрат для локальних і для глобальних стратегій, якщо використовувати їх на великих проміжках часу. Якщо ж відхилення буде незначним, то можна припустити, що за великої кількості ітерацій процесів, використання локальних стратегій приводить до мінімізації

глобальної функції витрат.

Це припущення будемо перевіряти на гранично допустимій для обчислень сітці 3×3 та 15% порожніх клітинок (для більших розмірностей на розрахунок оптимальної глобальної стратегії буде витрачено дуже багато часу).

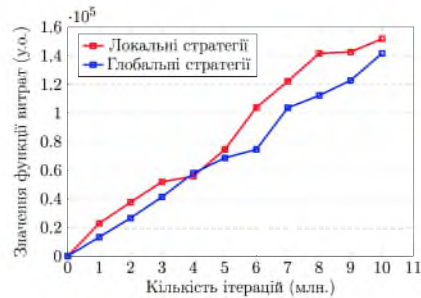


Рис. 2. Порівняння функцій витрат для глобальних і локальних стратегій

Таке відхилення не можна назвати несуттєвим, що означає, що використання локальних стратегій не призводить до глобальної мінімізації функції витрат, однак цей показник є достатньо невеликим, щоб дозволити використовувати локальні стратегії для сіток лісу більших розмірностей.

Проте для цієї конкретної задачі про лісову пожежу може постати природне запитання: чому просто не гасити всі палаючі ділянки лісу? Тому для оцінки оптимальності застосування локальних стратегій розглянемо ще дві стратегії на більших розмірностях сітки лісу.

Як першу стратегію для порівняння візьмемо таке керування, яке гасить усі палаючі клітини в будь-який момент часу. Для другої стратегії задамо керування, метою якого буде не допустити поширення пожежі, і будемо надсилати вхідний сигнал F на всі живі суміжні клітини поряд з палаючою.

Цей експеримент розглянемо вже на сітці 20×20 з 15% порожніх клітин протягом 200 тисяч ітерацій.

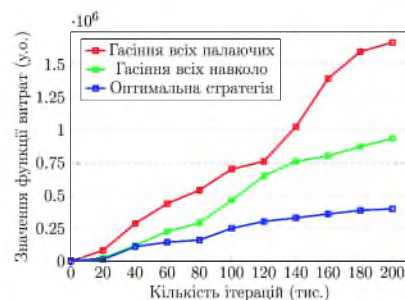


Рис. 3. Порівняння функцій витрат за різних стратегій

Як можна побачити, розраховані локальні стратегії значно краще мінімізують функцію витрат порівняно з двома альтернативними стратегіями.

Список літератури

1. von Neumann J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components. *Automata Studies*. 1956. Pp. 43–98.
2. Ilachinski A. *Cellular Automata: A Discrete Universe*. Singapore : World Scientific, 2001.
3. Viskov O. V., Shiryayev A. N. On controls leading to optimal stationary states. *Trudy Mat. Inst. Steklov*. 1964. Vol. 71. Pp. 35–45. English translation in: Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability. 1966. Vol. 6. Pp. 71–83.
4. Chornei R. K., Daduna H., Knopov P. S. Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications. New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006.
5. Daduna H. Some results for steady-state and sojourn time distributions in open and closed linear networks of Bernoulli servers with state-dependent service and arrival rates. *Performance Evaluation*. 1997. Vol. 30, no. 1. Pp. 3–18. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166531696000582>.
6. Almeida R. M., Macau E. Stochastic cellular automata model for wildland fire spread dynamics. *Journal of Physics: Conference Series*. 2011. Vol. 285. Pp. 012–038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/285/1/012038>

References

1. J. von Neumann. “Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components”, *Automata Studies*. 43–98 (1956).
2. A. Ilachinski, *Cellular Automata: A Discrete Universe* (Singapore: World Scientific, 2001).
3. O. V. Viskov and A. N. Shiryayev. “On controls leading to optimal stationary states”, *Trudy Mat. Inst. Steklov*. **71**, 35–45 (1964). English translation in: Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability. **6**, 71–83 (1966).
4. R. K. Chornei, H. Daduna and P. S. Knopov. *Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications* (New York: Springer Science + Business Media, Inc., 2006).
5. H. Daduna, “Some results for steady-state and sojourn time distributions in open and closed linear networks of Bernoulli servers with state-dependent service and arrival rates”, *Performance Evaluation*. **30** (1), 3–18 (1997). <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166531696000582>.
6. R. M. Almeida and E. Macau, “Stochastic cellular automata model for wildland fire spread dynamics”, *Journal of Physics: Conference Series*. **285**. 012–038 (2011). <https://doi.org/10.1088/17426596/285/1/012038>

S. Hlushenkov, R. Chornei

RESEARCH OF STOCHASTIC BEHAVIOUR OF CELLULAR AUTOMATA

A wide range of complex systems with local interactions could be described by cellular automata. Despite the fact, that in general, behaviour of each cellular automata on its own could be quite simple, their effective combination, or setting unusual interaction rules may result in extraordinary system with much more complicated behaviour, or unexpected and ambiguous observation results. Stochasticity in interactions between cells approximates simulated environment to real conditions and helps finding optimal strategy, which would be more stable under all circumstances and events, especially unlikely ones. Stochastic cellular automata are often used for modelling natural phenomena and processes, simulating traffic flows, cryptography, and so on. Finding an optimal strategy – is a key problem in managing environments with available outside influence.

This article shows existence of optimal strategies for stochastic cellular automata systems, gives an example of applying improving strategy algorithm in case of extinguishing forest fires, analyses chosen strategy optimality.

Keywords: stochastic cellular automata, optimal control, optimal strategies, forest fires.

Матеріал надійшов 05.10.2022



Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0)