УДК 517.9

Кашпіровський О. І., Митник Ю. В.

ОПЕРАТОРНИЙ ПІДХІД ДО АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ ФУНКЦІЙ

Описані класи гладких на відрізку функцій, для яких найкращі наближення алгебраїчними поліномами мають заданий порядок прямування до нуля.

Нехай $\rho(t)$ обмежена, монотонно зростаюча на $[0,+\infty)$ функція, $\rho(0)=0$. Розглядається задача: знайти клас функцій $f\in C[-1,1]$, для яких найкращі наближення алгебраїчними поліномами

$$E_n(f)=\inf_{\alpha_k}\max_{|x|\le1}|\,f(x)-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k\,|$$

мають оцінки

$$E_n(f)\le C_1\rho\left(\frac{C_2}{n}\right), \qquad (1)$$

де C_1, C_2 — додатні константи, залежні від f.

Відомо [1—3], що оцінки найкращих наближень періодичних функцій $u(\theta)$ тригонометричними поліномами визначаються порядком гладкості функцій. Так, оцінці (1) з ваговою функцією $\rho(t)\le t^{\alpha}$, $\alpha>0$, $C_2=1$ прямі і обернені теореми теорії наближень ставлять у відповідність деякий клас періодичних функцій скінченної гладкості.

Якщо при $t\to0$ $\rho(t)$ прямує до нуля швидше за будь-яку степінь t^{α}, то $u(\theta)$ нескінченно диференційовна і її гладкість визначається оцінками похідних [4—6] $u(\theta)|\le CL^nM_n,\ n\in N$, де $C,L>0$ — константи залежні від u, $M_n=\sup\limits_{t>0}\dfrac{\rho(t)}{t^n}$.

Послідовність $\{M_n\}_0^{\infty}$ зростає швидше за будь-яку геометричну прогресію $\{L_n\}_0^{\infty}, L>0$. Зокрема, при $\rho(t)=\exp(-t^{1/\beta}),\ \beta>0$ маємо класи Жевре порядку $\beta(M_n=n^{\beta n})$. При $\beta=1$ маємо теорему С. Н. Берштейна про наближення аналітичних функцій.

Наведені результати узагальнені в працях В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука [5, 6] на випадок апроксимації елементів банахового простору Y векторами експоненціального типу деякого замкнутого оператора A в гільбертовому просторі H $D(A)\subseteq Y\subset H$. Якщо оператор H має дискретний спектр $\sigma(A)=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ (нумерація в порядку зростання модуля) $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$,— власний базис оператора A, то класи елементів $y\in Y$ з оцінками типу (1) для величин $E_n(y,Y,H,A)=\inf\limits_{\alpha_k}\|\,y-\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\,\|_Y$ є класами гладких векторів оператора A [7].

Застосовуючи це до апроксимації тригонометричних функцій многочленами, маємо:

$Y=\hat{C}[0,2\pi]$ — простір неперервних 2π-періодичних функцій, $H=L_2(0,2\pi)$, $A=\sqrt{A^2}$, де A^2— самоспряжений в H оператор, який визначається співвідношенням $A^2=-\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ і граничними умовами $u(0)=u(2\pi)$ і $u'(0)=u'(2\pi)$.

Власний базис оператора A утворюють функції $1,\cos kx,\sin kx,\ k\in N,\ \sigma(A)=N$.

Покажемо, що і у випадку апроксимації функцій з $C[-1,1]$ алгебраїчними поліномами оцінки $E_n(f)$ визначаються гладкістю функцій відносно деякого додатного оператора, який діє в гільбертовому розширенні простору $C[-1,1]$.

Виділимо в $Y=\hat{C}[0,2\pi]$ замкнутий підпростір Y_1 парних періодичних функцій. Оператор A_1^2 — звуження A^2 на парні періодичні функції — також є самоспряженим в $L_2(0,\pi)$, визначається співвідношенням $A_1^2u=-\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$ і граничними умовами $u'(0)=u'(\pi)=0$, $\{\cos k\theta\}_{k=0}^{\infty}$— власний базис оператора $A_1=\sqrt{A_1^2}$, $\sigma(A_1)=N$.

Заміна змінної $\theta = \arccos x$ породжує ізометричне $_{def}$ відображення $J: Y_1 \to C[-1,1]$, $J(u(\theta)) = u(\arccos x)$. Відображення J породжує також ізометричну відповідність між гільбертовими просторами $H_1 = L_2(0,\pi)$ і $H_2 = L_2(-1,1;(1-x^2)^{-1/2}dx)$. Оператору A_1^2 в H_2 відповідає самоспряжений оператор $\Lambda^2 = = JA_1^2 J^{-1}$, який визначається співвідношенням $\Lambda^2 f = -(1-x^2)\dfrac{d^2 f}{dx^2} + x\dfrac{df}{dx}$ без граничних умов.

Оскільки, очевидно, 1) гладкі вектори оператора Λ є J – образами гладких векторів оператора A_1, 2) для $f \in C[-1,1]$ величини $E_n(f), E_n(u_f, Y, H, A)$ і $E_n(u_f, Y_1, H_1, A_1)$ $(u_f(\theta) = = f(\cos\theta))$ співпадають, то оцінки $E_n(f)$ визначаються "гладкістю" $f(x)$ відносно оператора Λ.

Оскільки диференціальний оператора Λ^2 має виродження при $x = \pm 1$, то із оцінки (1) випливає, взагалі кажучи, різна гладкість в "звичайному" сенсі в середині інтервалу $(-1,1)$ і на його кінцях.

Так, із оцінки $E_n(f) \le Cn^{-p-\varepsilon}$ при цілому p і $0 < \varepsilon \le 1$ випливає, за теоремою С. Н. Берштейна [3, с. 94], що на сегментах $[a,b] \subset (-1,1)$ $f(x)$ m раз неперервно диференційовна. Враховуючи гладкість $f(x)$ відносно оператора Λ, можна описати поведінку при підході $f(x)$ до кінців інтервалу $(-1,1)$ [8—9].

1) $f \in C^q[-1,1]$, $q = \left[\dfrac{p-1}{2}\right]$, ([ ] —ціла частина числа),

2) $f^{(q+j)}(x) \le C_1(1-x^2)^{-j/2}$, $0 < j < p-q$.

Для функцій з експоненційною оцінкою $E_n(f)$ справедливе твердження, яке випливає з результатів [9].

Теорема. *Для функції* $f \in C[-1,1]$ *справедливі оцінки*

$$E_n(f) \le C_1 \exp(-C_2 n^{1/\beta}), \qquad (2)$$

де $\beta \ge 1$, $C_1, C_2 > 0$ *— константи залежні від f, тоді і тільки тоді, коли f нескінченно диференційовна і її похідні задовольняють умовам*

$$| f^{(n)}(x) | \le C_3 L^n n^{\beta n} \min((1-x^2)^{-\frac{n}{2}}, n^{(\beta-1)n}),$$

$$C_3, L > 0.$$

Таким чином, із оцінок (2) випливає, що в середині інтервалу $(-1,1)$ f належить класу Жеврe порядку β, але в цілому на $[-1,1]$ f належить класу Жевре порядку $2\beta - 1$. Так, функція $f_s(x) = \exp(-(1-x^2)^{-s})$ належить на $[-1,1]$ класу Жевре порядку $1 + \dfrac{1}{s}$ [10], а в середині $(-1,1)$ є аналітичною. З теореми випливають оцінки

$$E_n(f_s) = C_1 \exp(-C_2 n^{\frac{2s}{2s+1}}).$$

При $\beta = 1$ з даної теореми випливає теорема С. Н. Берштейна про апроксимацію аналітичних функцій алгебраїчними поліномами. При $0 < \beta < 1$ із оцінок (2) маємо [11], що f допускає аналітичне продовження до цілої функції порядку $\dfrac{1}{1-\beta}$.

Операторний підхід дозволяє по-новому дивитися на поставлену С. М. Нікольським [12] проблему про з'ясування причин особливої ролі кінців відрізку в прямих та обернених теоремах про наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними поліномами. В монографії В. К. Дзядика [2] причина цього явища стає зрозумілою при дослідженні апроксимації функцій в комплексних областях D з кутами. А саме, вершини кутів границі області D є точками розгалуження конформного відображення зовнішності D на зовнішність одиничного круга.

З операторної точки зору особлива роль кінців відрізку пояснюється виродженням диференціального оператора Λ^2. При цьому з певних оцінок найкращих наближень $E_n(f)$ випливає деяка гладкість відносно оператора Λ, з якої, в свою чергу, маємо різну гладкість в звичайному розумінні в середині відрізку та на його кінцях.

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Наука, 1960.— 624 с.

2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М: Наука, 1977.— 512 с.

3. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций.— Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.— 184 с.

4. *Горбачук В. И.* О суммируемости разложений по собственным функциям самосопряженных операторов // Докл. АН СССР—1987.— Т. 292,—№ 1.—С. 20—25.

5. *Горбачук В. І., Горбачук М. Л.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн.— 1995.- Т. 47.—№5.— С. 616—628.

6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ.— 1997.— Т. 9.— Вып. 6.— С. 90—108.

7. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев: Наук, думка, 1984.— 283 с.

8. *Томин Н. Г* Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам //

Докл. АН СССР — 1973,— Т. 212.— № 5. — С. 1074—1077.

9. *Кашпіровський О. І., Митник Ю. В.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів // Укр. мат. журн.— 1998.—Т. 50, № 1 1 — С 1506—1516.

10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.— 327 с.

11. *Извеков И. Г., Мартыненко Е. В.* О классах Жевре некоторых самосопряженных операторов с вырождением // Укр. мат. журн—1993,—Т. 45, № 12.— С. 1622—1627.

12. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных полиномами // Труды 3-го всесоюзного математического съезда.— М, 1958.— Т. 3.— С. 226—231.

Kashpirovsky A. I., Mytnik Yu. V.

OPERATOR APPROACH TO APPROXIMATION OF FUNCTION CONTINUOUS ON SEGMENT

Classes of function differentiated on segment whose best approximation by algebraic polynomials tend to zero in a given order are ascertained.