1.12 ОЦІНЮВАННЯ ВЗАЄМНОЇ ДИНАМІКИ ДОХОДНОСТІ КРИПТОВАЛЮТ

Пенцак Є.Я.

In this article the problem of parametric approximation of highly non-normal multivariate density function of cryptocurrencies returns is considered. It is shown that Pearson Type IV parametric family of distributions is quite well suited to model the fat tailed marginal distributions and copula approach could be used to estimate dynamics of cross dependency of highly volatile cryptocurrencies. The proposed estimation methodology is implemented using maximum likelihood procedure in STATA and special copula estimation tools in Matlab based on real data.

Вступ. На початку 2009 року світова фінансова спільнота вперше серйозно звернула увагу криптовалюту під назвою біткоїн (*Bitcoin*). З того часу криптовалюти перебувають під пильним наглядом авторитетних світових фінансових установ, включаючи центральні та найбільші інвестиційні банки світу [1]. Зараз у світі нараховується понад тисячу різних криптовалют, які ще називають схемами віртуальних валют VCS (*virtual currency schemes*). Поряд з ризиками їх використання, легальністю з юридичної точки зору, практично усі звіти зазначають інноваційних характер платежів та інших транзакцій між учасниками такої мережі, що можуть служити прототипом нових майбутніх фінансових платіжних систем [2]. Серед найбільш поширених криптовалют з капіталізацією понад 150 млн. $ можна назвати наступні криптовалюти: Bitcoin, Ethereum, Ripple, Dash, Litecoin, Monero, NEM, Golem, Augur, Zcash, MaidSafeCoin, Stratis, Stellar Lumens, Gnosis, Dogecoin, Steem, PIVX, BitShares, SingularDTV, GameCredits, Siacoin та інші. Динаміка руху цін на криптовалюту тісно пов'язана з попитом на неї, що зумовлена емоційним сприйняттям учасниками ринку, звітами провідних фінансових установ, а також пропозицією, що визначається динамікою їх «добування».

Починаючи з 1 квітня 2017 року у Японії вступив в силу закон про легалізацію біткоїнів, що спричинило зростання обсягів торгів усіма криптовалютами, а також зростання їх ціни. Зростання популярності криптовалют пов'язують також з падінням фондового ринку Китаю з початку 2017 року, внаслідок чого китайські інвестори почали переводити свої кошти у всі криптовалюти. Не виключено, що криптовалюти служать платіжним інструментом для розрахунків у фінансових пірамідах, можливо, що деякі з них самі є фінансовими пірамідами.

Не вдаючись до аналізу юридичних та операційних ризиків різних криптовалют, ми проаналізуємо динаміку їх взаємної доходності, щоб зрозуміти можливість використання теорії оптимальної диверсифікації портфеля криптовалют. Базовим припущенням використання варіаційно-коваріаційного аналізу портфеля фінансових інструментів шляхом застосування чисельних методів оптимізації задач квадратичного програмування є припущення щодо нормальності функції щільності всіх компонент портфеля, відносної стабільності їх варіаційно-коваріаційної структури, а також можливості опису розподілу доходності усіх компонент портфеля з допомогою багатовимірного нормального розподілу. Саме дослідженню взаємної поведінки доходності криптовалют з допомогою копульного підходу присвячена дана робота.

Аналіз останніх досліджень. У академічній літературі існує багато досліджень стосовно того, чи слід додавати криптовалюти до інвестиційних портфелів, до золотовалютних резервів центральних банків тощо [3]. Проте аналітичних досліджень щодо формування оптимальних інвестиційних портфелів виключно з криптовалют практично немає. Це можна пояснити тим, що експоненційне зростання усіх криптовалют почалось на початку 2017 року, а тому на даний момент ще складно оцінити закономірності динаміки зміни доходностей усіх криптовалют.

Постановка задачі. У роботі ми проаналізуємо закономірності динаміки взаємної доходності усіх криптовалют з високим рівнем капіталізації, дослідимо можливість використання класичної теорії диверсифікації щодо формування оптимального інвестиційного портфеля з цих криптовалют, а також визначимо перспективні підходи до формування їх портфеля.

Результати досліджень. Візьмемо дані цін криптовалют з 6.04.2017 до 20.05.2017. Виберемо станом на 20.05.2017 криптовалюти з найбільшим рівнем капіталізації.

Таблиця 1 – Статстистичні дані криптовалюти з найбільшим рівнем капіталізації

Криптовалюта	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Капіталізація, млн. дол.	32463,219	11905,340	12575, 721	723,483	1416,444	461,454

Описові характеристики криптовалют. Знайдемо спочатку значення середньої денної, тижневої та місячної доходності μ та відповідні стандартні відхилення σ доходності обраних криптовалют R_i, i=1,…,N[1], використовуючи стандартні формули:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_i \qquad (1)$$

[1] Тут N=409

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(R_i - \mu)^2} \qquad (2)$$

Для кількісної оцінки відхилення від нормальності дослідники використовують міру асиметрії (скіс) та міру ексцесу, що визначаються як

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{\ 3/2}} \qquad (3)$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^{\ 2}} \qquad (4)$$

відповідно, де m_i - є центральним моментом порядку *i*, *i=1,2,3,4*. У наших позначеннях $m_2 = \sigma^2$. Коефіцієнт γ_1, відомий як «стандартизований третій центральний момент», вказує на відхилення від симетрії і називається коефіцієнтом асиметрії. Коли розподіл є симетричним, то $\gamma_1 = 0$. Проте можливо отримати $\gamma_1 = 0$ і тоді, коли розподіл не є цілком симетричним. Коефіцієнт $\gamma_2 = \beta_2 - 3$ (β_2 відомий як «стандартизований четвертий центральний момент») допомагає класифікувати розподіли відносно їх поведінки у «хвостах» і називається коефіцієнтом ексцесу. Відомо, що для нормального розподілу $\beta_2 = 3$. Запишемо значення описових характеристик доходності криптовалют у вигляді Таблиць 2-4.

Таблиця 2 – Статстистичні дані криптовалюти

Описова денна характер-ристика доходності	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Середнє значення	0,0041	0,0071	0,0129	0,0076	0,0066	0,0107
Стандартне відхилення	0,0280	0,0591	0,0954	0,0544	0,0528	0,0906
Коефіцієнт асиметрії	-0,9023	1,0995	7,1594	1,5934	3,2298	5,1495
Коефіцієнт ексцесу	7,982	5,118	79,757	6,884	25,962	47,980

Таблиця 3 –Тижневі характеристики доходності

Описова тижнева характеристика доходності	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Середнє значення	0,0283	0,0522	0,1152	0,0620	0,0516	0,0737
Стандартне відхилення	0,0863	0,1903	0,4406	0,2307	0,2283	0,2449
Коефіцієнт асиметрії	-0,8455	1,3332	3,9180	3,1952	3,5122	1,8826
Коефіцієнт ексцесу	3,7550	2,3666	15,4476	13,1531	13,7799	5,0084

Таблиця 4 –Місячні характеристики доходності

Описова місячна характеристика доходності	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Середнє значення	0,1040	0,2519	0,3000	0,2960	0,1801	0,6498
Стандартне відхилення	0,1575	0,5382	0,8117	0,5679	0,4192	1,8346
Коефіцієнт асиметрії	-0,2500	1,5802	2,2480	2,3719	1,9048	2,8830
Коефіцієнт ексцесу	-1,1547	2,2127	3,8514	5,2117	2,5120	6,9705

Ми бачимо з таблиць 2-4, що не тільки денні доходності криптовалют, але й тижневі і місячні демонструють значне відхилення від нормальності. Для ілюстративності побудуємо графіки непараметричних функцій щільності тижневої доходності Ripple та місячної доходності Monero і порівняємо їх графічно з відповідними функціями щільності нормального розподілу.

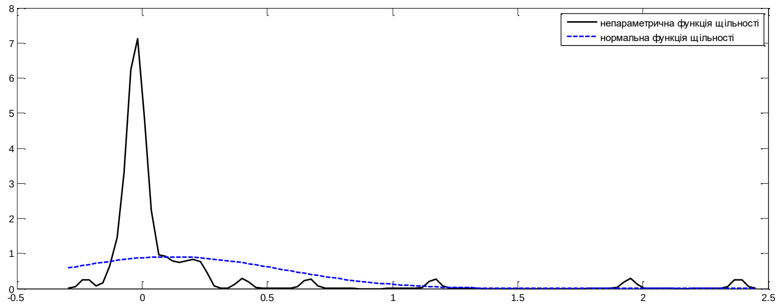

Рисунок 1 – Непараметрична і нормальна функції щільності розподілу тижневої доходності Ripple

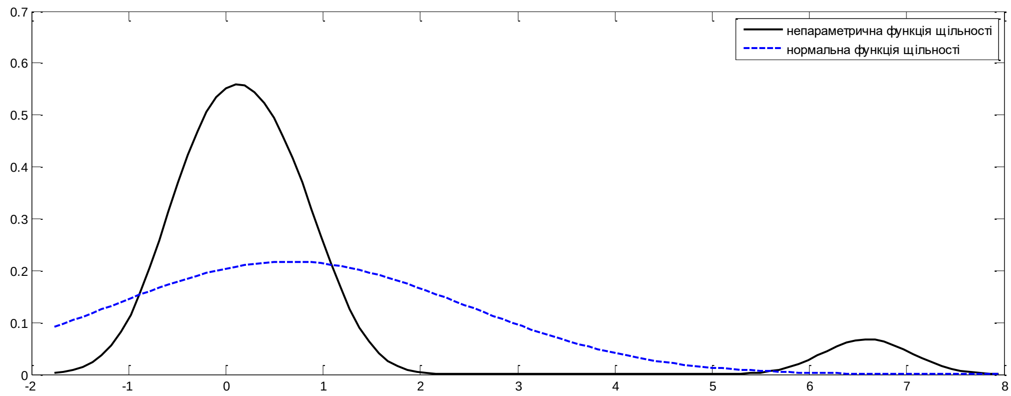

Рисунок 2 – Непараметрична і нормальна функції щільності розподілу місячної доходності Monero

Візуалізація функцій щільностей розподілів Ripple та Monero підтверджує, що розподіли відповідних доходностей є дуже далекими від нормального.

Коефіцієнти кореляції, Спірмана та Кендала. Для аналізу взаємної динаміки доходностей випадкових величин як правило використовують коефіцієнти кореляції, коефіцієнти Кендала та Спірмана.

Нехай $\psi(x,y)$ – спільна функція щільності двох випадкових змінних x та y. Граничною функцією щільності випадкової величини x та y називають, відповідно,

$$\psi_x(x) = \int \psi(x,y)dy, \tag{5}$$

$$\psi_y(y) = \int \psi(x,y)dx. \tag{6}$$

Лінійною кореляцією (або r Пірсона) двох випадкових змінних x та y називають величину

$$\rho_{xy} = \frac{Cov[x,y]}{\sqrt{V[x]\cdot V[y]}}, \tag{7}$$

де

$$Cov\,[x,y] = \int xy\psi(x,y)dxdy - \int x\psi_x(x)dx \cdot \int y\psi_y(y)dy \tag{8}$$

$$V\,[x] = \int x^2\psi_x(x)dx - \left[\int x\psi_x(x)dx\right]^2 \tag{9}$$

З концепцією лінійної кореляції є дуже тісно пов’язана ще одна міра взаємної залежності, ρ_S Спірмана, що є лінійною кореляцією кумулятивних функцій розподілу $\Psi_x(x)$ та $\Psi_y(y)$ від даних випадкових змінних. Можна показати, що

$$\rho_S = 12 \cdot \iint \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y) \cdot \psi(x,y)dxdy - 3 \tag{10}$$

Ще однією мірою взаємозалежності випадкових змінних є τ_K Кендала. Якщо

$$\Psi(x,y) = \int_{x=-\infty}^{x} \int_{y=-\infty}^{y} \psi(x',y')dx'dy', \tag{11}$$

то

$$\tau_K = 4 \cdot \iint \Psi(x,y) \cdot \psi(x,y) dxdy - 1. \qquad (12)$$

ρ_S Спірмана та τ_K Кендала мають ту перевагу над лінійною кореляцією, що вони є інваріантними від індивідуальних перетворень змінних, та завжди є можливість побудувати спільну функцію щільності, знаючи граничні функції щільності та значення ρ_S, τ_K, відповідно.

Таблиця 5 – Матриця кореляцій криптовалют

Матриця кореляцій	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Bitcoin	1,000	0,230	0,228	0,292	0,457	0,216
Ethereum	0,230	1,000	0,092	0,650	0,037	0,239
Ripple	0,228	0,092	1,000	-0,119	0,720	-0,041
Dash	0,292	0,650	-0,119	1,000	-0,012	0,183
Litecoin	0,457	0,037	0,720	-0,012	1,000	0,071
Monero	0,216	0,239	-0,041	0,183	0,071	1,000

Таблиця 6 – Коефіцієнт Спірмана криптовалют

Коефіцієнт Спірмана	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Bitcoin	1,000	0,087	0,232	0,312	0,385	-0,009
Ethereum	0,087	1,000	0,468	0,450	0,096	-0,042
Ripple	0,232	0,468	1,000	-0,564	0,253	-0,200
Dash	0,312	0,450	-0,564	1,000	0,163	-0,205
Litecoin	0,385	0,096	0,253	0,163	1,000	0,090
Monero	-0,009	-0,042	-0,200	-0,205	0,090	1,000

Таблиця 7 – Коефіцієнт Кендала криптовалют

Коефіцієнт Кендала	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Bitcoin	1,000	0,114	0,105	0,126	0,511	0,124
Ethereum	0,114	1,000	0,204	0,371	0,107	0,189
Ripple	0,105	0,204	1,000	-0,070	0,139	-0,205
Dash	0,126	0,371	-0,070	1,000	0,034	0,114
Litecoin	0,511	0,107	0,139	0,034	1,000	0,141
Monero	0,124	0,189	0,037	0,114	0,141	1,000

Зобразимо графічно взаємозв’язок доходності Bitcoin та Litecoin, щоб візуально побачити їх двомірний розподіл (Рис.3). З Рис.3 ми бачимо, що навіть для двох криптовалют з найбільшою мірою взаємозв’язку, їх спільний розподіл є дуже далеким від нормального. Якщо аналітик хоче дослідити поведінку портфеля криптовалют, то він повинен вміти згенерувати їх спільний розподіл. Якщо припустити їх нормальні граничні розподіли та нормальність їх спільного розподілу, то ми отримаємо наступну скатерграму (Рис.4).

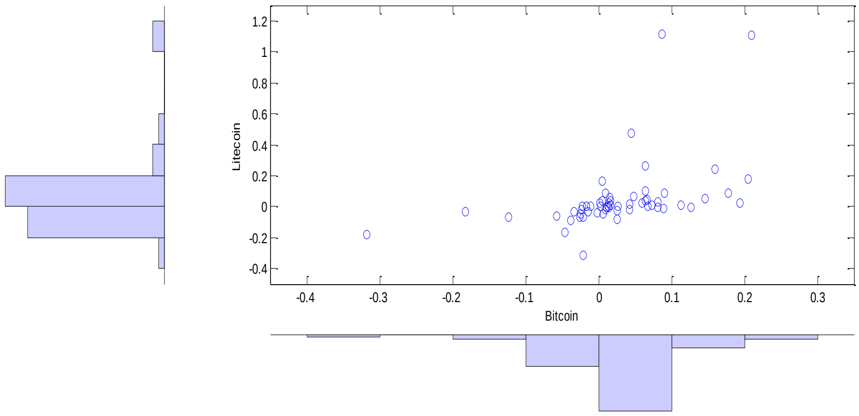

Рисунок 3 – Скатерграма місячної доходності Bitcoin та Litecoin

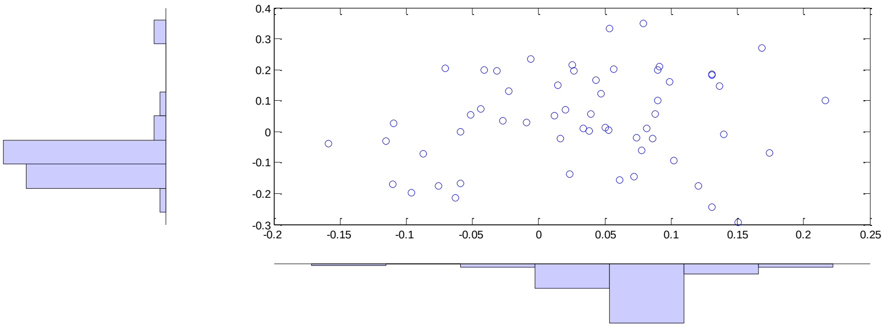

Рисунок 4 – Скатерграма згенерованої місячної доходності Bitcoin та Litecoin у припущенні їх спільного нормального розподілу

Генерування спільних розподілів доходності криптовалют з допомогою копул. У фінансовому моделюванні особливої популярності набули розподіли екстремальних значень, що враховують «товсті хвости» та асиметрію емпіричного розподілу. Однією з найбільш гнучких вважають сім'ю функцій Пірсона четвертого типу [4]. Функцію щільності розподілу Пірсона четвертого типу (PTIV) можна записати у вигляді

$$f(x;\mu_1,\alpha,\delta,\rho)=k\left[\left(\frac{x-\mu_1-\alpha}{\delta}\right)^2+1\right]^{-\frac{1}{2}(\rho+2)}\exp\left[-\frac{\alpha\rho}{\delta}arctg\left(\frac{x-\mu_1-\alpha}{\delta}\right)\right] \quad (13)$$

де k – нормуючий множник, а $\mu_1, \alpha, \delta, \rho$ – параметри, що потребують калібрування.

Здійснимо економетричну оцінку параметрів функції щільності у статистичному пакеті STATA для доходності Bitcoin та Litecoin. Результат калібрування запишемо у таблиці 8.

Таблиця 8 – Оцінка параметрів функції щільності для доходності Bitcoin та Litecoin

	μ_1	α	δ	ρ
Bitcoin	-33.7417	33.7438	0.0328054	-0.0004216
Litecoin	-14.70891	14.7012	0.0351829	-0.000701

Зобразимо на одному рисунку графіки функції щільності непараметричного розподілу доходності Bitcoin та Litecoin і їх апроксимацій з допомогою функції щільності Пірсона четвертого типу (Рис. 5 і Рис. 6).

Копульний підхід є стратегією моделювання, в якій спільний розподіл моделюється з допомогою граничних розподілів та копулою, функцією, що їх поєднує. Копула параметризує структуру залежності випадкових змінних, відображаючи їх взаємну поведінку. Під копулою розуміють багатовимірну функцію розподілу, одновимірні граничні розподіли якої є рівномірними на інтервалі (0,1). У відповідності до теореми Скляра, кожен неперервний багатовимірний розподіл можна розкласти на одновимірні граничні розподіли та параметричну копулу, що враховує їх взаємну залежність (див. [5], с. 15).

Таким чином

$$\Psi(x, y; \theta) = C(\Psi_x(x), \Psi_y(y); \theta), \tag{14}$$

де θ – набір параметрів, що характеризує даний клас копул. Знаючи функцію розподілу, ми можемо легко визначити функцію щільності двовимірної випадкової величини

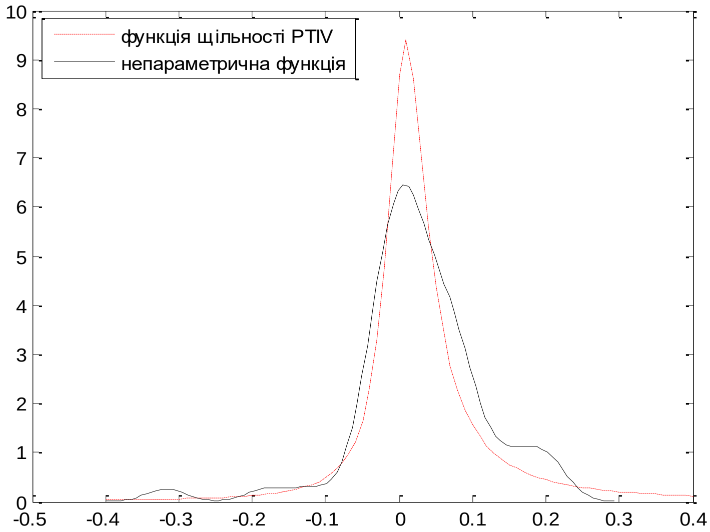

Рисунок 5 – Графічне зображення непараметричної функції щільності розподілу доходності Bitcoin та її апроксимації з допомогою функції щільності Пірсона типу IV.

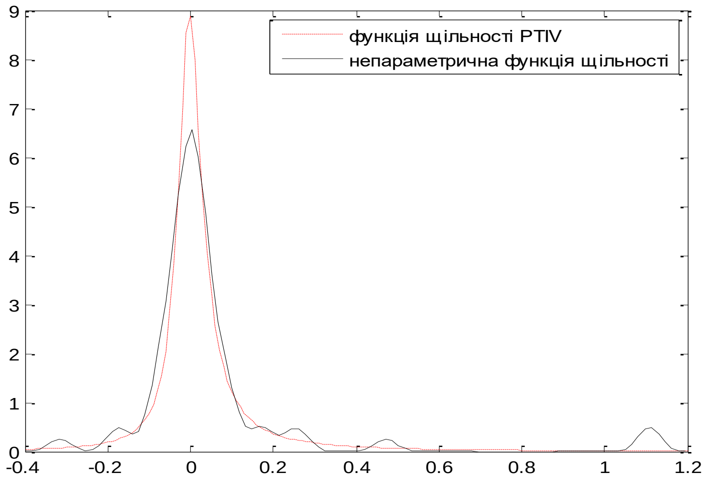

Рисунок 6 – Графічне зображення непараметричної функції щільності розподілу доходності Litecoin та її апроксимації з допомогою функції щільності Пірсона типу IV.

$$\psi(x,y;\theta) = C_{12}(\Psi_x(x),\Psi_y(y);\theta)\cdot\psi_x(x)\cdot\psi_y(y), \tag{15}$$

де $C_{12} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}$.

Одним з найпоширеніших загальних класів копул є Архімедові копули, тобто копули, що визначаються неперервною, опуклою вниз, спадною генеруючою функцією

$$\varphi : [0,1] \to [0,\infty) \tag{16}$$

з граничною умовою

$$\varphi(1) = 0 . \tag{17}$$

До найбільш вживаних Архімедових копул відносять сім'ю копул Клейтона (*Clayton*), що визначається формулою

$$C(u,v;\theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \text{ де } \theta \in [-1,\infty) \setminus \{0\}, \tag{18}$$

генеруюча функція якої

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta} . \tag{19}$$

Існує багато різних процедур для генерування спостережень (x,y) пари випадкових змінних (X,Y) зі спільною функцією розподілу Ψ. Наведемо один з алгоритмів генерування (x,y) з допомогою копули С:

1) згенерувати дві незалежні рівномірно розподілені на інтервалі (0,1) випадкові змінні u і t;
2) знайти $v = c_u^{(-1)}(t)$, де $c_u^{(-1)}(t)$ - квазі-обернене відображення до $c_u = \dfrac{\partial}{\partial u} C(u,v)$;
3) знайти $x = \Psi_x^{(-1)}(u)$ та $y = \Psi_y^{(-1)}(v)$;
4) шукана пара – (x,y).

Згенерувавши відповідну двовимірну вибірку, що описує взаємну доходність Bitcoin та Litecoin через копулу Клейтона, ми отримаємо зображення на Рис. 7.

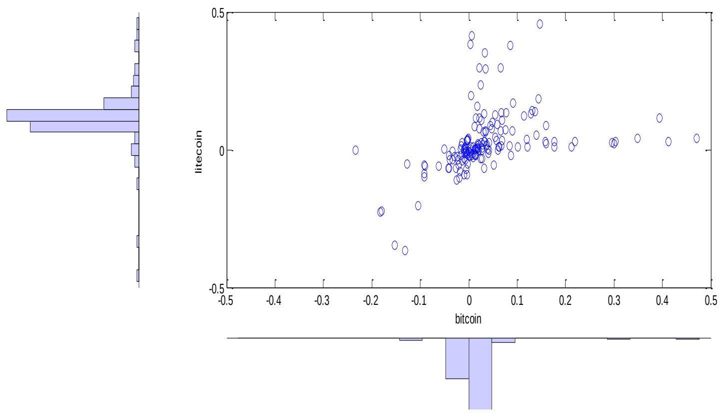

Рисунок 7. Скатерграма згенерованої місячної доходності Bitcoin та Litecoin у припущенні їх граничних розподілів Пірсона типу IV та копули Клейтона

У таблиці 9 наведемо значення параметра копули Клейтона для усіх пар криптовалют, взаємна динаміка доходності яких розглядається у даній роботі.

Таблиця 9 – Значення параметра копули Клейтона

Параметр копули Клейтона	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Bitcoin		0,326	0,101	0,488	1,500	0,404
Ethereum	0,326		0,779	0,728	0,360	0,695
Ripple	0,101	0,779		0,000	0,124	0,375
Dash	0,488	0,728	0,000		0,320	0,504
Litecoin	1,500	0,360	0,124	0,320		0,347
Monero	0,404	0,695	0,375	0,504	0,347	

Для повноти опису копульної міри взаємозв'язку динаміки доходності основних криптовалют також представимо в Таблиці 10 значення відповідних параметрів для копули Гауса. Наприклад, для двовимірної гаусівської сім'ї копул

$$C(u, v, \theta) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \text{ де } \theta \in [-1,1] \tag{20}$$

і $\Phi(\cdot)$ позначає кумулятивну функцію розподілу стандартної нормальної випадкової величини, а $\Phi_2(\cdot,\cdot;\theta)$ - кумулятивну функцію розподілу двовимірної стандартної нормальної випадкової величини з коефіцієнтом лінійної кореляції θ.

Ми бачимо, що коефіцієнти кореляції, які ми знайшли з копули Гауса суттєво відрізняються від звичайних коефіцієнтів кореляції, представлених у Таблиці 5. Для моделювання взаємної доходності кількох (більше двох) криптовалют, що входять у портфель, можна використовувати *t*-копули та копули Гауса.

Таблиця 10 – *T*-копули та копули Гауса для криптовалют

Параметр копули Гауса	Bitcoin	Ethereum	Ripple	Dash	Litecoin	Monero
Bitcoin	1,000	0,240	0,171	0,301	0,693	0,235
Ethereum	0,240	1,000	0,329	0,534	0,193	0,339
Ripple	0,171	0,329	1,000	-0,095	0,206	0,107
Dash	0,301	0,534	-0,095	1,000	0,129	0,253
Litecoin	0,693	0,193	0,206	0,129	1,000	0,239
Monero	0,235	0,339	0,107	0,253	0,239	1,000

Висновок. У роботі показано, що спільний розподіл доходності криптовалют є дуже далеким від нормального розподілу навіть для даних доходності з інтервалом в один місяць. Більше того, усі граничні розподіли, тобто доходності кожної криптовалюти зокрема не є нормально розподіленими також. Ми це показали не тільки графічно, але й з врахуванням описових характеристик доходності кожної криптовалюти (коефіцієнт асиметрії, коефіцієнт ексцесу). Проте, навіть такий далекий від нормального розподіл, допускає ефективне параметричне моделювання з допомогою функції щільності Пірсона типу IV для кожного граничного розподілу та з допомогою параметра, що описує поведінку копули Клейтона чи Гауса. У випадку ширшого портфеля криптовалют для моделювання взаємної поведінки доходності доцільно використати t-копулу або купулу Гауса.

Література

1. Virtual currency schemes – a further analysis. European Central Bank. Eurosystem. February, 2015 (/www.ecb.europa.eu/pub/pdf/other/virtualcurrencyschemesen.pdf).
2. Blockchain. The Trust Disrupter. August 2016 Europe/United Kingdom. (www.the-blockchain.com/docs/Credit-Suisse-Blockchain-Trust-Disrupter.pdf).
3. Peters G., Panayi E., Chapelley A.Trends in cryptocurrencies and blockchain technologies: a monetary theory and regulation perspectiveThe Journal of Financial Perspectives: FinTech,2015. - p. 92-113.
4. Holly A., Pentsak Y. Maximum likelihood estimation of the conditional mean E(y/x) for skewed dependent variables in four-parameter families of distribution. Institute of Health Economics and Management (IEMS), 2004, WP, p. 1-40.

Nelsen R.G. An introduction to copulas. Springer-Verlag, 1998. – 215 p.