Реберні, бльокові, тотальні графи та споріднені конструкції

Дехтяр Б.-Я. В.
Науковий керівник: Козеренко С. О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"
Катедра математики факультету інформатики

27 травня 2023 р.

Означення

Дано граф G. Його реберний граф $L(G)$ [Har69] є граф перетинів на множині ребер графа G, або ж $L(G) \overset{def}{=} \Omega(V(G), E(G))$.

Означення

Дано граф G. Його граф підрозбиттів [Har69] $S(G) \overset{def}{=} (V(G) \cup E(G), \{ve : v \in V(G), e \in E(G), v \in e\})$.

Реберні графи

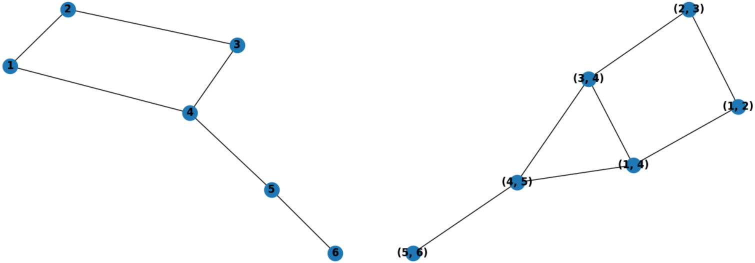


Рис.: Граф G (ліворуч) та його реберний граф $L(G)$ (праворуч).

Реберні графи

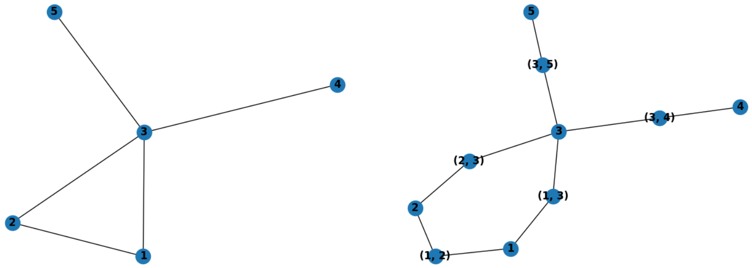


Рис.: Граф G (ліворуч) та його граф підрозбиттів $S(G)$ (праворуч).

Реберні графи

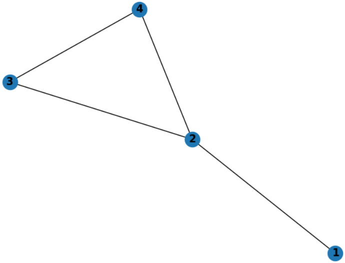
Означення

Дано граф G. Його середущий граф [HY76] $M(G) \overset{def}{=} (V(G) \cup E(G), \{eg : e, g \in E(G), e \cap g \neq \emptyset\} \cup \{ve : v \in V(G), e \in E(G), v \in e\})$.

Означення

Дано граф G. Його тотальний граф [Har69] $T(G)$ - це граф, множина вершин якого є об'єднання множин вершин і ребер графа G, при чім дві вершини $T(G)$ з'єднані тоді й тільки тоді, коли що відповідні елементи в G суміжні чи інцидентні.

Реберні графи



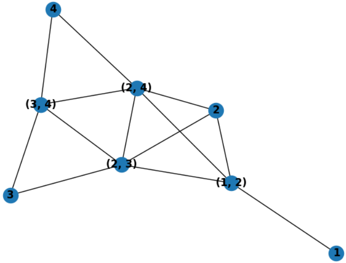


Рис.: Граф G (ліворуч) та його середущий граф $M(G)$ (праворуч).

Реберні графи

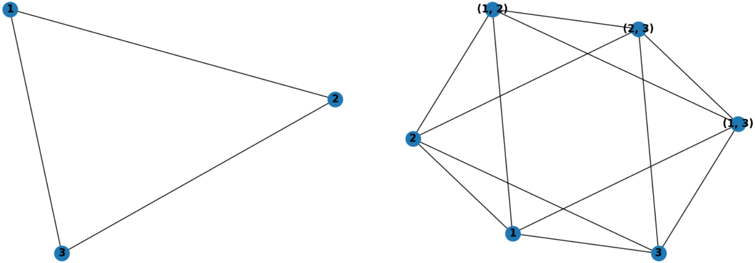


Рис.: Граф G (ліворуч) та його тотальний граф $T(G)$ (праворуч).

Реберні графи

Algorithm 1 Find line graph $L(G)$ of graph G

Require: Graph G

Ensure: Line graph $L(G)$

Create an empty edge list E'
for each node v in G **do**
    View adjacency list adj of v
    for each pair of nodes $first$ and $second$ in adj **do**
        Create edge $e_1 = \{v, first\}$
        Create edge $e_2 = \{v, second\}$
        Add edge $\{e_1, e_2\}$ to edge list E'
    end for
end for
Construct line graph $L(G)$ using edge list E'
return $L(G)$

Реберні графи

Algorithm 2 Construct subdivision graph $S(G)$ of graph G

Require: Graph G
Ensure: Subdivision graph $S(G)$

Create an empty edge list E'
for each node v in G **do**
    View adjacency list adj of v
    for each node u adjacent to v in adj **do**
        Create edge $e = \{v, \{u, v\}\}$
        Add edge e to edge list E'
    end for
end for
Construct subdivision graph $S(G)$ using edge list E'
return $S(G)$

Algorithm 3 Construct middle graph $M(G)$ of graph G

Require: Graph G

Ensure: Middle graph $M(G)$

1: Construct line graph $L(G)$ of G

2: Construct subdivision graph $S(G)$ of G

3: Set $V(M(G)) := V(S(G))$

4: Set $E(M(G)) := E(L(G)) \cup E(S(G))$

5: **return** $M(G)$

Algorithm 4 Construct total graph $T(G)$ of graph G

Require: Graph G
Ensure: Total graph $T(G)$
1: Construct middle graph $M(G)$ of G
2: Set $V(T(G)) := V(M(G))$
3: Set $E(T(G)) := E(M(G)) \cup E(G)$
4: **return** $T(G)$

Графи бльоків

Означення

Дано граф G. Його граф бльоків [Har69] $B(G)$ є граф перетинів на множині бльоків $G : B(G) = \Omega(V(G), \beta(G))$.

Означення

Маючи зв'язний граф G, його бльоко-точкове дерево (БТД) [Kul76] означимо наступним чином: $bP(G) = (V(G) \cup \beta(G), \{aB : B \in \beta(G), a \in V(\beta)\})$, себто його множина вершин складається з вершин і бльоків G, а дві вершини $bP(G)$ з'єднані, якщо одна з них відповідає вершині G, а інша бльокові, що її містить.

Графи бльоків

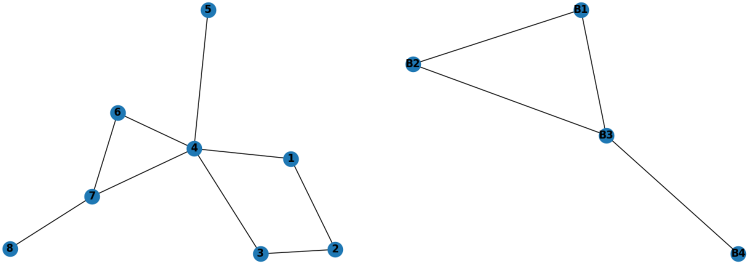
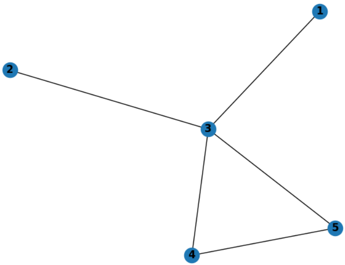


Рис.: Граф G (ліворуч) та його граф бльоків $B(G)$ (праворуч). Бльоки містять такі вершини: $B1 : 1, 2, 3, 4$; $B2 : 4, 5$; $B3 : 4, 6, 7$; $B4 : 7, 8$.

Графи бльоків



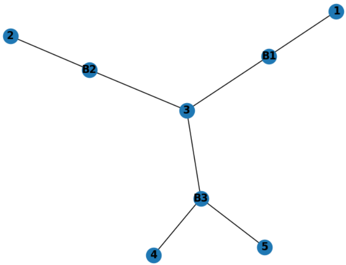


Рис.: Граф G (ліворуч) та його БТД $pB(G)$ (праворуч). Бльоки містять такі вершини: $B1 : 1, 3$; $B2 : 2, 3$; $B3 : 3, 4, 5$.

Означення

Дано граф G. Його точко-бльоковий граф (ТБГ) [KB14] $Pb(G) = (V(G) \cup \beta(G), E(B(G)) \cup E(bP(G)))$, тобто граф, вершини якого є вершини G, і дві вершини u, $v \in V(Pb(G))$ суміжні, якщо виконується одна з двох умов:

1) u, v є бльоки G зо спільною точкою з'єднання;
2) u є бльок G, а v - вершина, що до нього належить.

Графи бльоків

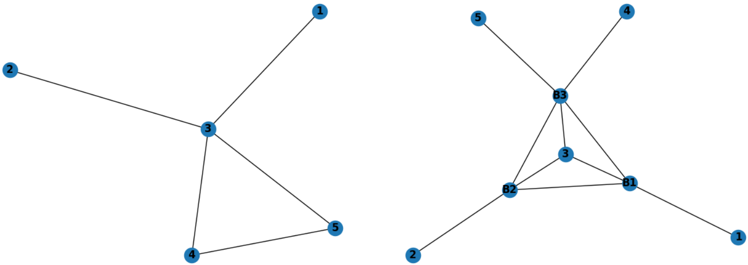


Рис.: Граф G (ліворуч) та його ТБГ $Pb(G)$ (праворуч). Бльоки містять такі вершини: $B1 : 1, 3$; $B2 : 2, 3$; $B3 : 3, 4, 5$.

Графи бльоків

Теорема (1)

Нехай G є зв'язний граф. Тоді $B(Pb(G)) \simeq G \iff G$ є граф бльоків [KB14].

Наслідок

$B(Pb(B(G))) \simeq B(G)\ \forall G.$

Графи бльоків

Теорема (2)

$Pb(B(G)) \simeq G \iff G$ *є ТБГ.*

Наслідок

$Pb(B(Pb(G))) \simeq Pb(G)\ \forall G.$

Графи бльоків

Означення

Маємо граф G. Його бльоко-тотальний граф (БТГ) $bT(G)$ є граф такий, що $V(bT(G)) = V(G) \cup \beta(G)$, а вершини $u, v \in V(bT(G))$ суміжні в кожному з наступних випадків:

- u та v є суміжні вершини графа G;
- u є вершина G, а v - бльок, що її містить;
- u й v є бльоки G зо спільною точкою з'єднання.

Графи бльоків

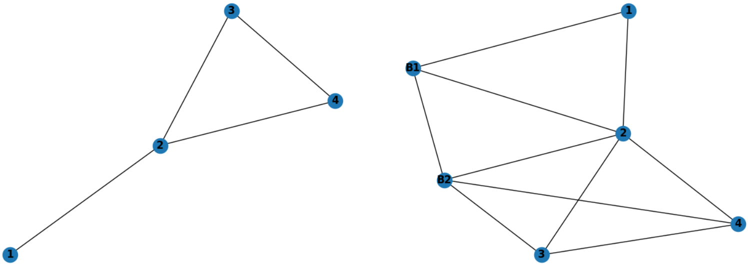


Рис.: Граф G (ліворуч) та його БТГ $bT(G)$ (праворуч). Бльоки G містять такі вершини: $B1 : \{1, 2\}$, $B2 : \{2, 3, 4\}$.

Графи бльоків

Теорема

Маємо граф G. Тоді $bT(G) \simeq T(G) \iff G$ є дерево.

Теорема

Маємо граф G. Тоді $T(G) \simeq (S(G))^2$ [Beh67].

Теорема

Нехай G є зв'язний граф. Тоді $bT(G) \simeq (bP(G))^2$.

Графи бльоків

Algorithm 5 Construct block graph $B(G)$ of graph G

Require: Graph G
Ensure: Block graph $B(G)$

```
Set V(B(G)) := β(G)
for all pairs of blocks (B_1, B_2) of G do
    if B_1 ≠ B_2 and B_1 and B_2 share a node then
        Add edge {B_1, B_2} to B(G)
    end if
end for
return B(G)
```

Графи бльоків

Algorithm 6 Construct block-point tree $bP(G)$ of graph G

Require: Graph G

Ensure: Block-point tree $bP(G)$

```
Set V(bP(G)) := V(G) ∪ β(G)
for all blocks B of G do
    for all nodes v of B do
        Add edge {v, B} to bP(G)
    end for
end for
return bP(G)
```

Algorithm 7 Construct point-block graph $Pb(G)$ of graph G

Require: Graph G

Ensure: Point-block graph $Pb(G)$

1: Construct block graph $B(G)$ and block-point tree $bP(G)$
2: Set $V(Pb(G)) := V(bP(G))$
3: Set $E(Pb(G)) := E(B(G)) \cup E(bP(G))$
4: **return** $Pb(G)$

Algorithm 8 Construct block-total graph $bT(G)$ of graph G

Require: Graph G

Ensure: Block-total graph $bT(G)$

1: Construct point-block graph $Pb(G)$
2: Set $V(bT(G)) := V(Pb(G))$
3: Set $E(bT(G)) := E(Pb(G)) \cup E(G)$
4: **return** $bT(G)$

Графи бльоків

Пари суміжних елементів	Реберна конструкція	Пари суміжних елементів	Бльокова конструкція
ребра-ребра	реберний граф $L(G)$	бльоки-бльоки	граф бльоків $B(G)$
вершини-ребра	граф підрозбиттів $S(G)$	вершини-бльоки	БТД $bP(G)$
ребра-ребра вершини-ребра	середущий граф $M(G)$	бльоки-бльоки вершини-бльоки	ТБГ $Pb(G)$
ребра-ребра вершини-ребра вершини-вершини	тотальний граф $T(G)$	бльоки-бльоки вершини-бльоки вершини-вершини	БТГ $bT(G)$

Графи клік

Означення

Дано граф G. Його граф клік є граф перетинів $K(G) = \Omega(V(G), \mathcal{K}(G))$.

Графи клік

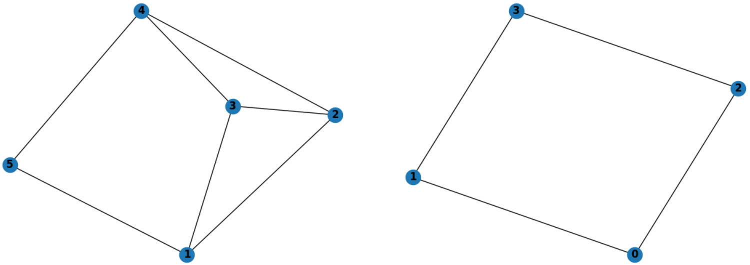


Рис.: Граф G (ліворуч) та його граф клік $K(G)$ (праворуч). Кліки G містять такі вершини: $0 : \{1, 2, 3\}$, $1 : \{2, 3, 4\}$, $2 : \{4, 5\}$, $3 : \{1, 5\}$.

Графи клік

Теорема

Дано нетривіяльний граф G. Тоді $B(G) \simeq K(G) \iff G$ є граф бльоків.

Теорема

(Характеризація реберних графів двочасткових графів). Для графа G існує двочастковий граф $H : L(H) \simeq G$ тоді й тільки тоді, коли:

1) $K(G)$ *двочастковий;*
2) $\forall C_{1,2} \in \mathcal{K}(G) : |V(C_1 \cap C_2)| \leq 1$.

[Beh67] M. Behzad, *A criterion for the planarity of the total graph*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **63** (1967), 679–681.

[Har69] Frank Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[HY76] T. Hamada and I. Yoshimura, *Traversability and connectivity of the middle graph of a graph*, Discrete Mathematics **14** (1976), 247–255.

[KB14] V. R. Kulli and M. S. Biradar, *The point block graph of a graph*, Journal of Computer and Mathematical Sciences **5** (2014), no. 5, 476–481.

[Kul76] V. R. Kulli, *The block-point tree of a graph*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics **7** (1976), no. 6.

Дякую за увагу!