Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра математики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Лінійні, метричні та неперервні відображення між зв’язними графами

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*

____
(підпис)
“____”____________________ 2022 р.

Виконав студент
3-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Дехтяр Юр-Любомисл Валерійович

Київ – 2022

Тема: Лінійні, метричні та неперервні відображення між зв'язними графами.

Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	01.06.2021	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	01.06.2021	
3.	Розробка плану та структури роботи.	10.06.2021	
4.	Дослідження основних концепцій, встановлення зв'язків між рінними видами графових відображень.	01.08.2021	
5.	Доведення основних властивостей відображень між графами.	01.10.2020	
7.	Дослідження і доведення нетривіяльних властивостей.	01.01.2022	
8.	Дослідження поведінки метричних відображень, ретрактів.	01.04.2022	
9.	Доведення властивостей гомоморфізмів.	01.05.2022	
10.	Робота над текстовим офрмленням результатів.	01.06.2022	

Зміст

1 Вступ

У сій роботі детально розглядаються відображення між графами. Почну з того, що на зв'язних графах досить природньо вводиться метричний простір (відстань між двома вершинами - се довжина найкоротшого шляху між ними). Се дозволяє ввести на графах такі знайомі з математичної аналізи поняття, як опуклі множини, зв'язні множини, (метричні) відрізки. З їхньою допомогою, вводяться різномінітні види відображень. У другому розділі розглядаються такі відображення: неперервні, метричні, лінійні, монотонні, інваріянтні відносно опуклости. Розглядаються їхні основні властивості, себто зв'язок із різними поняттями з теорії графів (наприклад, медіянними графами) та, що вельми важливо, зв'язки між ними. Детальніше вони досліджуються у першій секції четвертого розділу. Для того, щоби зрозуміти, у якому ключі, зручно навести приклад. Зчаста, певний вид відображень я підклясою іншого виду. Зокрема, усі неперервні відображення є метричними. А для яких клясів графів вони еквівалентні? Саме отакого роду питання вирішуються у сій секції. В останній секції роботи розглядається поведінка метричних відображень щодо нерухомих точок. Легко проглед іти алюзії між метричними відображеннями та відображеннями стиску у метричних просторах, а в сьому контексті пригадується відома теорема Банаха, яка надихає на сю розмову. Наостанок, слід відзначити третій розділ роботи. Там, хай і побіжно, розглядаються вибрані питання на тему гомоморфізмів. Се напевно найкраще досліджене серед усіх графових відображень, тому автор вважає, що оминути її було б недоречно, хоча акцент роботи усе таки на інших видах відображень.

2 Основні означення та попередні результати

Оскільки метрика вводиться тільки на зв'язних графах, надалі усі графи вважаються зв'язними.

2.1 Означення

Означення 2.1. Метричним відрізком у графі G між вершинами $u, v \in V(G)$ називається множина вершин $w \in V(G)$ таких, що:

$$d(u,w) + d(w,v) = d(u,v).$$

Позначається $[u,v]_G$ або просто $[u,v]$, якщо з контексту зрозуміло, про який граф іде мова.

Означення 2.2. Множина $A \subset V(G)$ називається зв'язною, якщо $G[A]$ - зв'язний граф.

Зауваження 2.3. Якщо A - підмножина $V(G)$, то $G[A]$ - граф, породжений A.

Означення 2.4. Множина $A \subset V(G)$ називається опуклою, якщо для $\forall a, b \in A$ метричний відрізок $[a,b]_G$ є підмножиною A.

Означення 2.5. Множина $A \subset V(G)$ називається чебишовською, якщо для $\forall x \in V(G)$ $|pr_A(x)| = 1$, де $pr_A(x)$ - проєкція вершини x на множину A.

Означення 2.6. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається метричним, якщо $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u,v)$ для $\forall u, v \in V(G)$.

Означення 2.7. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається неперервним, якщо $[f(u), f(v)]_H \subset f([u,v]_G)$ для $\forall u, v \in V(G)$.

Означення 2.8. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається лінійним, якщо $[f(u), f(v)]_H \supset f([u,v]_G)$ для $\forall u, v \in V(G)$.

Означення 2.9. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається монотонним, якщо для $\forall u \in V(H)$ $f^{-1}(u)$ - зв'язна множина.

Означення 2.10. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається інваріантним відносно опуклости, якщо образом будь-якої опуклої множини вершин $A \subset V(G)$ є також опукла множина.

Означення 2.11. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ називається гомоморфізмом, якщо для будь-яких двох вершин, що з'єднані ребром, їхні образи при відображенні f також з'єднані ребром. Якщо між двома графами G та H існує гомоморфізм, то позначатимемо се $G \to H$.

Означення 2.12. Циклом називається шлях у графі, у якому перша та остання вершини збігаються. Якщо при цьому усі інші вершини різні між собою, то шлях називається простим циклом. Граф, який сам по собі є простим циклом та має k вершин позначатимемо C_k.

Означення 2.13. Граф T називається деревом, якщо він зв'язний і не містить циклів.

Означення 2.14. Граф G називається медіянним, якщо для будь-яких трьох вершин u, v, w графа існує вершина m така, що $[u, v] \cap [v, w] \cap [w, u] = \{m\}$. Вершину m називають медіяною вершин u, v, w.

Означення 2.15. Граф G називається інтервально монотонним, якщо у ньому кожен метричний відрізок є опуклою множиною.

Означення 2.16. Граф G називається графом бльоків, якщо кожен його бльок (компонента двозв'язноти) є повним підграфом.

Зауваження 2.17. Граф бльоків іноді визначають як граф перетинів бльоків довільного графа [2], а означення подане вище подають як характеризацію графів бльоків. Втім, у сій роботі буде використано лише означення вище; крім того, на думку автора воно краще передає інтуїцію щодо того, чим же насправді є графи бльоків.

Означення 2.18. Підграф H графа G називається ізометричним, якщо він зберігає відстані між вершинами:

$$\forall u, v \in V(H) : d_H(u, v) = d_G(u, v).$$

Означення 2.19. Обхватом графа називається довжина найкоротшого циклу, що міститься у графі. Непарний (парний) обхват - довжина найкоротшого непарного (парного) циклу. Якщо граф не має циклів (циклів відповідної парности), то обхват вважається нескінченним.

2.2 Попередні результати

Більшість основних видів відображень між графами є замкненими відносно композиції. Формально це сформульовано у наступних твердженнях.

Твердження 2.20. *Композиція метричних відображень між графами також є метричним відображенням.*

Доведення. Очевидно, що твердження достатньо довести для композиції двох відображень. Нехай $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} R$, де f, g - метричні відображення. Слід довести, що $h = g \circ f$ - також метричне. Для цього виберемо дві довільні вершини $u, v \in V(G)$. Маємо, що для них виконується:

$$d_R(h(u), h(v)) = d_R(g(f(u)), g(f(v))) \leq d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v),$$

де перша нерівність випливає з метричности відображення g, а друга - з метричности відображення f. А це і є умова метричности відображення h. □

Твердження 2.21. *Композиція неперервних відображень між графами також є неперервним відображенням.*

Доведення. Доведіть це! □

Твердження 2.22. *Композиція лінійних відображень між графами також є лінійним відображенням.*

Доведення. Доведіть це! □

Приклад 2.23. Най G - ланцюг з трьома вершинами, f, g - відображення з G у самого себе, задані такими рівностями:
$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$; $g(1) = 1$, $g(2) = g(3) = 3$.
Легко переконатися, що f і g - монотонні. Втім, $h = g \circ f$ - не монотонне, адже $h^{-1}(3) = \{1, 3\}$ - не зв'язна множина (нагадаю, що відображення називається монотонним, якщо прообраз кожної вершини є зв'язною множиною). Таким чином, композиція монотонних відображень може не бути монотонною.

Для перевірки чи є задане відображення між двома графами метричним, часто буває зручно використати такий результат.

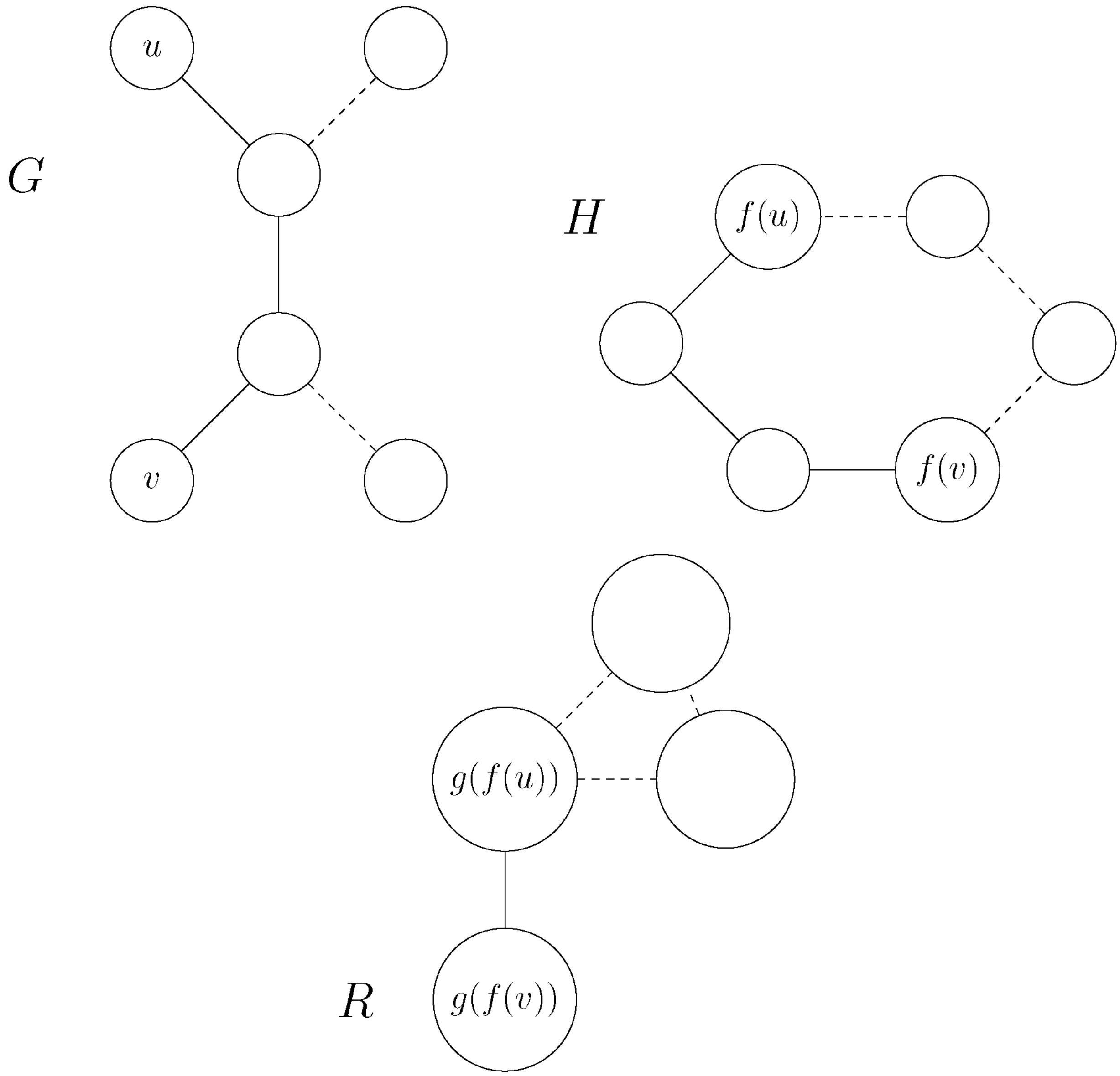

Рис. 1: Композиція метричних відображень

Лема 2.24. *Відображення $f : V(G) \to V(H)$ є метричним тоді й тільки тоді, коли $\forall u, v \in V(G), uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) \leq 1$.*

Доведення. ($\Longrightarrow$) Якщо f - метричне, то $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v)$ для усіх пар вершин u, v графа G. Наклавши на u, v додаткову умову $uv \in E(G)$, отримаємо $1 = d_G(u, v) \geq d_H(f(u), f(v))$.
($\Longleftarrow$) Доведемо достатню умову. Для цього, зафіксувавши дві довільні вершини $x_0, x_n \in V(G)$, розглянемо найкоротший шлях між ними: $x_0 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1} - x_n$. За “нерівністю багатокутника” (яка прямо випливає

з нерівності трикутника) для метрики d:

$$d_H(f(x_0), f(x_n)) \le \sum_{i=1}^{n} d_H(f(x_{i-1}), f(x_i)) \le n = d_G(x_0, x_n),$$

де остання нерівність випливає з припущення $\forall u, v \in V(G), uv \in E(G) : d_H(f(u), f(v)) \le 1$ ($x_{i-1}x_i \in E(G)$ як послідовні вершини на шляху між x_0 і x_n). $\square$

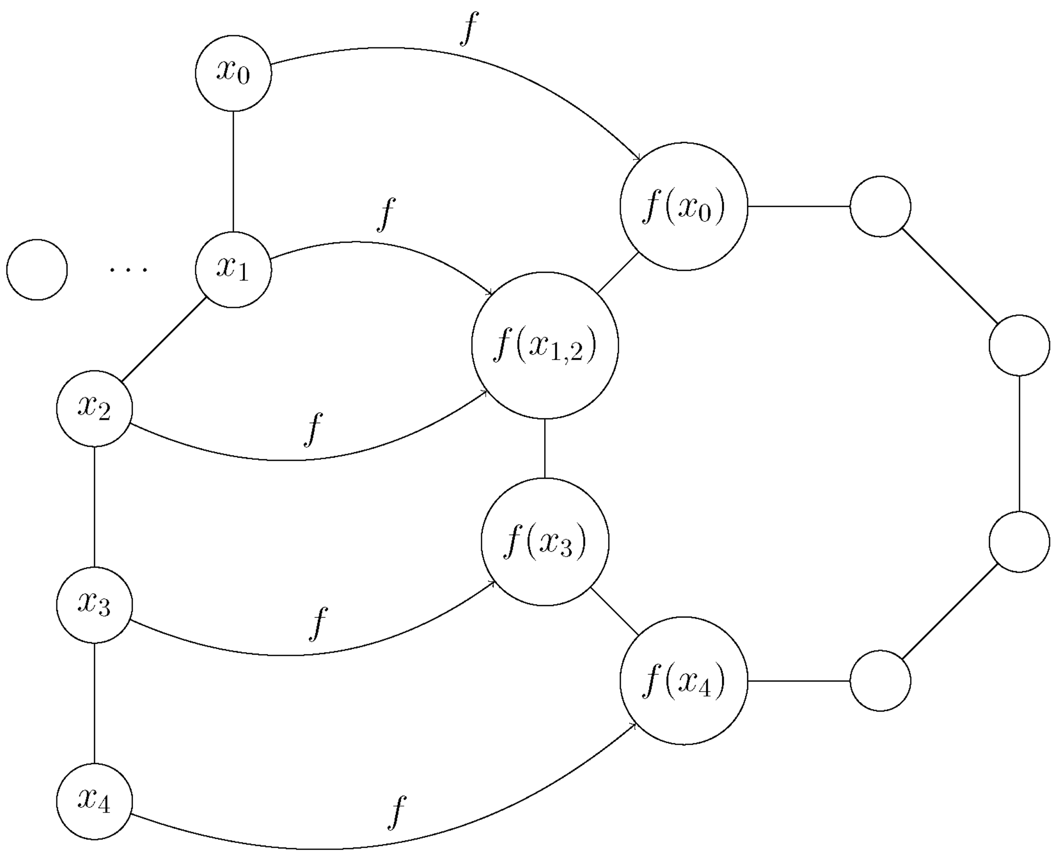

Рис. 2: критерій метричности

Наслідок 2.25. *Будь-яке неперервне відображення є метричним.*

Доведення. Нехай $u, v \in V(G)$ такі, що $uv \in E(G)$ (між ними є ребро), $f : V(G) \to V(H)$ - неперервне відображення. Тоді, за означенням:

$$[f(u), f(v)]_H \subset f([u, v]_G) = f(u, v) = \{f(u), f(v)\} \implies d_H(f(u), f(v)) \le 1.$$

А відтак, за критерієм метричности (**лема 2.24**) f - метричне. $\square$

Приклад 2.26. Нехай графи G і H (**Рис. 3**) такі, що $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(H) = \{a, b, c, d\}$ і $G \cong H \cong C_4$ (C_4 - цикл на чотирьох вершинах). Розглянемо відображення f: $f(1) = f(3) = a$, $f(2) = b$, $f(4) = d$. Легко переконатися, що f - метричне: $\{f(1)f(2), f(2)f(3), f(3)f(4), f(4)f(1)\} = \{ab, ba, ad, da\} \subset E(H)$. Однак $[f(2), f(4)] = [b, d] = \{a, b, c, d\} \not\subset \{a, b, d\} = f([2, 4]) \implies f$ - не неперервне. Отже метричне відображення необов'язково є неперервним.

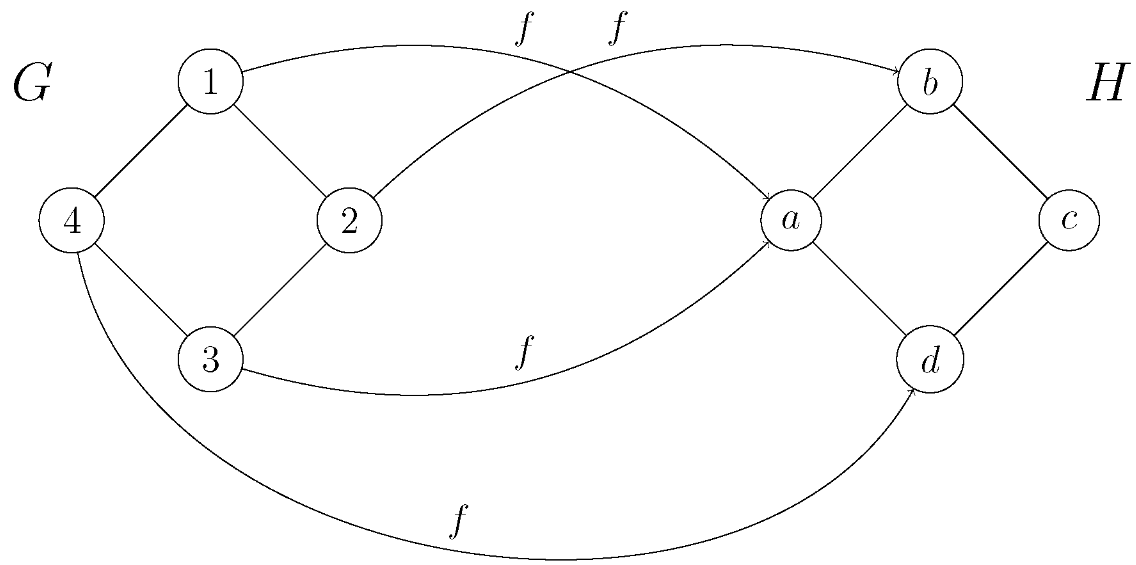

Рис. 3: Приклад метричного відображення, яке не є неперервним

Твердження 2.27. *Будь-яке лінійне відображення є монотонним.*

Доведення. Нехай G, H - графи, $f : V(G) \to V(H)$ - відображення між ними. Припустимо, що f - лінійне. Доведемо, що воно повинне бути монотонним. Нагадаю, що для цього необхідно, щоби $\forall h \in V(H) : f^{-1}(h)$ - зв'язна. Зафіксуємо $h \in V(H)$ та довільні $u, v \in f^{-1}(h)$. Шоб показати, що $f^{-1}(h)$ - зв'язна множина, досить пересвідчитися, що між u і v є шлях, який проходить по вершинах лише з цієї множини. Знайдімо його. Дійсно, за означенням лінійности відображення:

$$f([u, v]_G) \subset [f(u), f(v)]_H = [h, h]_H = \{h\}.$$

Але тоді $[u, v]_G \subset f^{-1}(h)$! Очевидно, $[u, v]_G$ містить якийсь шлях між u і v. Отже, твердження доведено. $\square$

Зауваження 2.28. В інший бік твердження не справедливе. Справді, якби це було так, то лінійніть та монотонніть відображень були б еквівалентними. Проте у 2.22, 2.23 показано, що лінійність є замкненою відносно композиції, а монотонність - ні. Отже вони не еквівалентні.

Нехай G - зв'язний граф, $A \subset V(G)$ - чебишовська множина. Тоді, за означенням, проєкція будь-якої вершини G на сю множину містить рівно 1 вершину. Отже, проєкцію на чебишовську множину можна розглядати як відображення із множини $V(G)$ у саму себе.

Теорема 2.29. *Проєкція на чебишовську множину є монотонним відображенням.*

Доведення. Нехай $f : V(G) \to V(G)$ - відображення таке, що $\forall x \in V(G)$: $pr_A(x) = \{f(x)\}$, себто кожна вершина переходить у свою проєкцію. Зафіксуємо $a \in A$, $x, y \in f^{-1}(a)$. Щоб довести монотонність відображження f слід показати, що існує шлях між x та y, всі вершини якого лежать у $f^{-1}(a)$. Зробімо се. За побудовою $a \in f^{-1}(a)$. Покажемо, що існує шлях із $f^{-1}(a)$ між x та a (y та a); склеївши їх, отримаємо шлях між x та y. А шлях між x та a знаходиться нескладно - підходить найкоротший, а саме по метричному відрізку. Дійсно, кожна вершина $z \in [x, a]_G$ належить $f^{-1}(a)$. Доведемо сей факт від супротивного. Припустимо, що $\exists b \in A : d_G(z, b) < d_G(z, a)$ (себто проєкція вершини z - якась відмінна від a вершина). Тоді справджується ланцюжок нерівностей:

$$d_G(x, b) \leq d_G(x, z) + d_G(z, b) < d_G(x, z) + d_G(z, a) = d_G(x, a),$$

де остання рівність випливає з того, що $z \in [x, a]_G$. Однак се суперечить тому, що a - проєкція вершини x. Отже, $z \in f^{-1}(a) \implies$ метричний відрізок $[x, a]_G \subset f^{-1}(a)$. Аналогічно доводиться дуальне твердження для y. $\square$

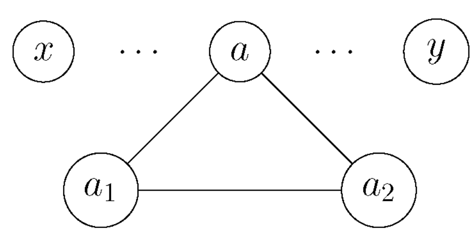

Рис. 4: Проєкція на Чебишовську множину є монотонним відображенням

Вправа 2.30. Нехай $f : X \to Y$ - довільне відображення, $A, B \subset D_f$. Доведіть, що $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Твердження 2.31. *Нехай G, H - медіянні графи, $f : V(G) \to V(H)$ - відображення між ними. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

1. *f - лінійне;*
2. *f зберігає медіяни, себто для будь-яких 3-х вершин графа G, їхня медіяна відображається у медіяну їхніх образів;*
3. *f^{-1} задовольняє умову, що якщо $A \subset V(H)$ - опукла, то $f^{-1}(A) \subset V(G)$ - теж опукла.*

Доведення. Доводитимемо твердження "по колу". Спершу покажемо що з першої умови випливає друга. Нехай f - лінійне, $x, y, z \in V(G)$. Тоді: $f(m_G(x, y, z)) = f([x, y]_G \cap [y, z]_G \cap [z, x]_G) \subset f([x, y]_G) \cap f([y, z]_G) \cap f([z, x]_G) \subset [f(x), f(y)]_H \cap [f(y), f(z)]_H \cap [f(z), f(x)]_H = m_H(f(x), f(y), f(z))$, де перше включення - теоретико-множинний факт (**вправа 2.30**), а друге випливає з лінійности f.
Покажемо, що з другої умови випливає третя. Дійсно, най A - опукла множина, $u, v \in f^{-1}(A)$. Зафіксуємо $w \in [u, v]_G$. Тоді $w = m_G(u, v, w)$. Застосуємо другу умову: $w = m_G(u, v, w) \implies f(w) = m_H(f(u), f(v), f(w)) \in [f(u), f(v)]_H \subset A$ (останнє включення є наслідком опуклости множини A). Отже, $f(w) \in A \iff w \in f^{-1}(A)$! А тоді $f^{-1}(A)$ - опукла.
Наостанок покажемо, що з третьої умови слідує перша. Виберемо довільні $u, v \in V(G)$. Оскільки у медіянному графі метричний відрізок є опуклою множиною, то множина $[f(u), f(v)]_H$ - опукла. Скористаємося третьою умовою - прообраз опуклої множини є також опуклою множиною: $f^{-1}([f(u), f(v)]_H)$ - опукла. Помітимо, що $u, v \in f^{-1}([f(u), f(v)]_H)$. За опуклістю $[u, v]_G \subset f^{-1}([f(u), f(v)]_H)$, що рівносильно $f([u, v]_G) \subset [f(u), f(v)]_H$, а значить f - лінійне. □

Зауваження 2.32. У доведенні **твердження 2.31**, а саме останньої частини (прообрази опуклих опуклі $\implies$ лінійність) було використано те, що граф H - медіянний. І справді, якщо не накладати сю умову то, взагалі кажучи, твердження є невірним (див. рис.). Але в інший бік твердження правдиве.

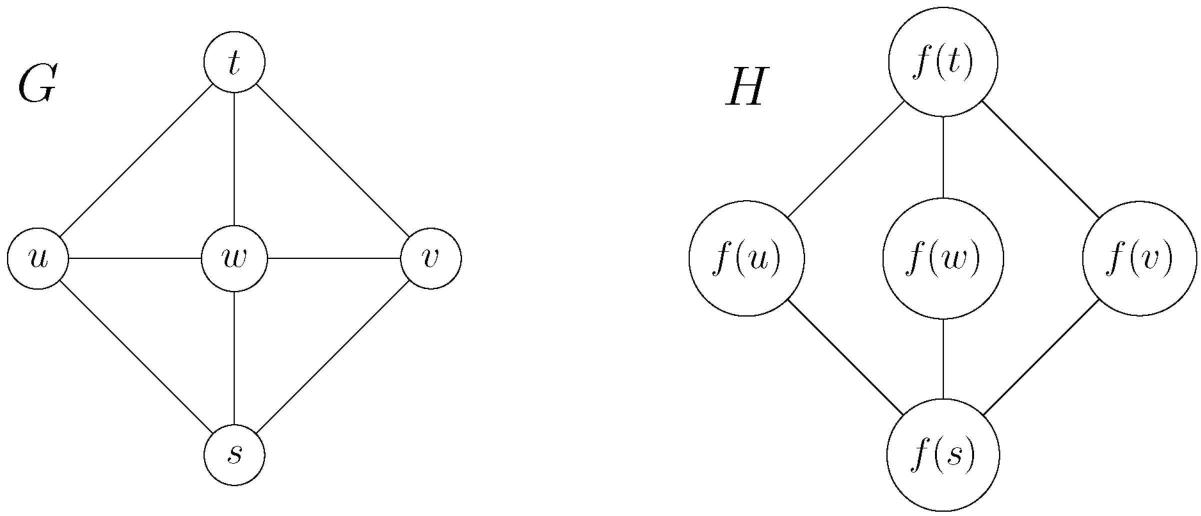

Рис. 5: f - задовольняє умову пункту 3 **твердження 2.31** (переконайтеся!), однак воно не є лінійним, адже $f([u,v]) \nsubseteq [f(u), f(v)]$

Твердження 2.33. *Якщо $f : V(G) \to V(H)$ - лінійне відображення, то для будь-якої опуклої множини $A \subset V(H)$ справджується, що $f^{-1}(A)$ - опукла.*

Доведення. Розглянемо лінійне відображення f і виберемо довільну опуклу $A \subset V(H)$. Якщо $f^{-1}(A)$ - порожня, то твердження виконується. Інакше зафіксуємо $u, v \in f^{-1}(A)$. Оскільки f - лінійне, то $f([u,v]_G) \subset [f(u), f(v)]_H$. Оскільки A - опукла, то $[f(u), f(v)]_H \subset A$. Об'єднавши сі дві умови маємо, що $f([u,v]_G) \subset A$, або $[u,v]_G \subset f^{-1}(A)$, що те саме. Отже, $f^{-1}(A)$ - опукла, що й потрібно було довести. □

Твердження 2.34. *Нехай $f : V(G) \to V(H)$ - відображення між графами. Тоді метричність f рівносильна тому, що образ будь-якої зв'язної множини вершин графа G є зв'язним.*

Доведення. ($\Longrightarrow$) Най відображення f - метричне, A - зв'язна пімножина вершин графа G. Слід довести, що її образ - зв'язний. Для цього зафіксуємо $v, w \in f(A)$ і знайдемо $u_0, u_n \in A$ - вершини з A такі, що $f(u_0) = v, f(u_n) = w$ $(n = d_G(u_0, u_n))$. Тоді існує шлях $u_0 - u_1 - \dots - u_n$, де $u_i \in A$. Оскільки f - метричне, то за **лемою 2.24** $d_H(f(u_i), f(u_{i+1})) \leq 1$ $\Longrightarrow$ $v = f(u_0) - f(u_1) - \dots - f(u_n) = w$ - шлях у графі H по вершинах $f(A)$, де $f(u_i)$ та $f(u_{i+1})$ або з'єднані ребром, або збігаються. Отже $f(A)$ - зв'язна.

($\Longleftarrow$) Най образ будь-якої зв'язної $A \subset V(G)$ є зв'язним у H. Тоді виберемо довільні $u, v \in V(G) : uv \in E(G)$. Маємо, що $\{u, v\}$ - зв'язна множина вершин. Значить, її образ $\{f(u), f(v)\}$ також повинен бути зв'язним $\Longrightarrow$ $d_H(f(u), f(v)) \leq 1$. За **лемою 2.24** f - метричне! $\square$

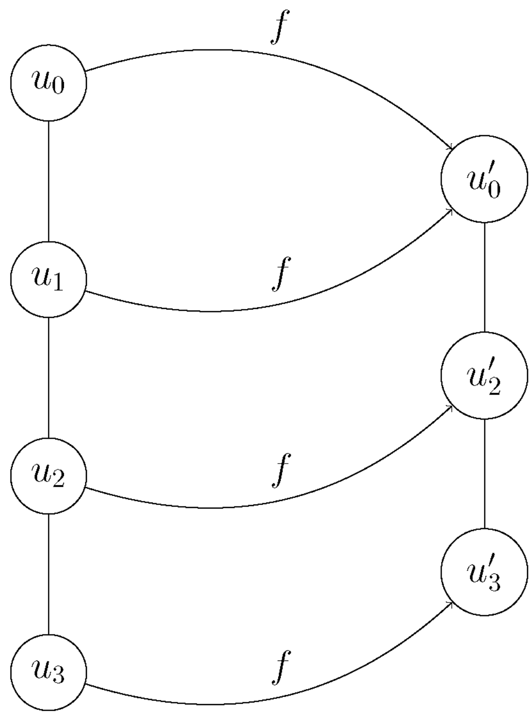

Рис. 6: Метричне відображення не може розбити зв'язну множину вершин

Зауважимо, що замінити образи на прообрази у **твердженні 2.34** не можна. Се підтверджують наступні приклади.

Приклад 2.35. Най G, H - ланцюги з трьох вершин, як зображено на **рис. 7**. Легко бачити, що граф H має всього 7 зв'язних множин:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}.$$

Їхні прообрази, множини

$$\{1\}, \emptyset, \{2, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

відповідно, теж зв'язні. Однак відображення f не є метричним, адже образом зв'язної множини $\{1, 2\}$ є незв'язна множина $\{a, c\}$.

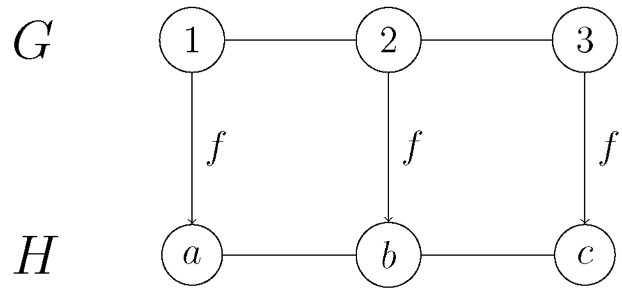

Рис. 7: Прообрази усіх зв'язних множин є зв'яними не лише для метричних відображень!

Приклад 2.36. Най G, H - ланцюги з трьох та двох вершин відповідно; як зображено на **рис. 8**. Відображення f безумовно метричне, адже граф H не має незв'язних множин, а отже образи зв'язних множин графа G точно зв'язні. У той же час, прообразом зв'язної одноточкової множини $\{a\}$ є незв'язна множина $\{1, 3\}$.

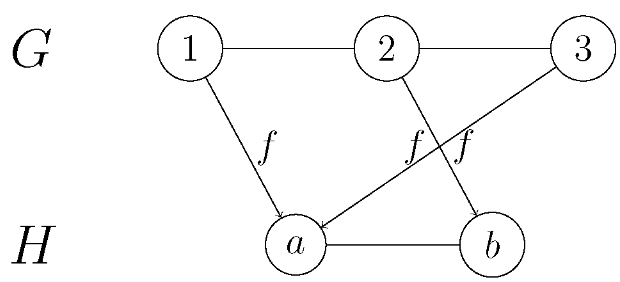

Рис. 8: Прообрази зв'язних множин при метричному відображенні не обов'язково зв'язні

Твердження 2.37. *Най задано відображення $f : V(G) \to V(H)$. Тоді f - неперервне $\implies$ f інваріянтне відносно опуклости (образом будь-якої опуклої множини вершин є опукла множина) $\implies$ f - метричне.*

Доведення. Доведемо перше твердження. Най $A \subset V(G)$ - опукла, $x, y \in f(A)$. Виберемо $u, v : f(u) = x, f(v) = y$. Тоді $A \supset [u, v]_G$, бо A - опукла. Крім того, $f([u, v]_G) \supset [f(u), f(v)]_H$, адже f - неперервне. Маємо: $f(A) \supset f([u, v]_G) \supset [f(u), f(v)]_H = [x, y]_H \implies f(A)$ - опукла!
Доведемо друге твердження. Себто доведемо, що f - метричне, виходячи з того, що воно інваріянтне відносно опуклости. Розглянемо довільне ребро $uv \in E(G)$. За **лемою 2.24** досить показати, що $d_H(f(u), f(v)) \le 1$.

Очевидно, що ребро є опуклою множиною, зокрема uv. Скористамося інваріянтністю відносно опуклости: $f(uv)$ - опукла множина. Однак $f(uv) = \{f(u), f(v)\}$. Тоді $d_H(f(u), f(v)) \leq 1$, адже якщо найкоротший шлях між $f(u)$ та $f(v)$ містить хоча б одну додаткову вершину, то вона має лежати в найменшій за включенням опуклій множині, що містить $f(u)$ та $f(v)$. А це суперечило б тому, що $\{f(u), f(v)\}$ - опукла. $\square$

3 Гомоморфізми

Жадна розмова про відображення між графами не може оминути тему гомоморфізмів. Утім, у сій роботі я лиш торкнуся вибраних питань на сю тему. Зауважу, що наступні твердження взяті з книги “Графи й гомоморфізми” Павола Гела та Ярослава Несетріла[1].

Твердження 3.1. *Для двох циклів C_k та C_l існує гомоморфізм із C_k у C_l ($C_k \to C_l$) тоді й тільки тоді, коли k - парне, або l - непарне та $l \leq k$.*

Доведення. ($\implies$) Най $C_k \to C_l$, k - непарне. Спершу припустимо, що l - парне. Розфарбуємо вершини C_l почергово у білий та чорний кольори. Оскільки l парне, жодні дві білі (чорні) вершини не будуть стояти поруч. Пронумерувавши вершини графа C_k від 1 до k, отримаємо, що вершини різної парности відображаються у вершини різного кольору, і навпаки, вершини однієї парности переходять у однокольорові вершини. Однак вершини 1 та k однієї парности, адже k - непарне, і з’єднані ребром, бо C_k - цикл. Отже, дві однокольорові вершини у C_l усе ж з’єднані ребром. Отримали суперечність. Отже, l - непарне. Тепер най $l > k$. Тоді у C_l є вершина з порожнім прообразом. Відкинувши сю вершину отримаємо ланцюг H_{l-1}, причому $C_k \to H_{l-1}$. Однак $l-1$ - парне. Повторивши той самий аргумент (розфарбування), прийдемо до протиріччя. Таким чином, $l \leq k$.
($\impliedby$) Най k - парне. Тоді працює досить тривіяльне відображення, а саме: виберемо довільну вершину графа C_l, усі парні вершини із C_k відобразимо у неї, а усі непарні у одного з її сусідів. Фактично, весь граф C_k перейде у єдине ребро. Легко переконатися, що се відображення буде гомоморфізмом. Якщо є k - непарне, то l - непарне і $l \leq k$. Гомоморфізм також не складно побудувати: відобразимо перші $k-l$ вершин у певне ребро графа H, а решту l - просто по циклу (як на **рис. 9**) $\square$

Для того, щоби зрозуміти **твердження 3.3**, зручно спершу розібратися із наступною лемою.

Лема 3.2. *Най $C = c_1 - c_2 - \cdots - c_{2k+1}$ - замкнений шлях у графі певному графі G, $k > 0$. Тоді він містить у собі (простий) цикл непарної довжини.*

Доведення. Проведімо доведення за індукцією.
База. $k = 1 \implies C \cong C_3$ і твердження задачі очевидне.
Крок. Най C - не простий цикл. Тоді існують $l < m$ такі, що $c_l = c_m$. Якщо

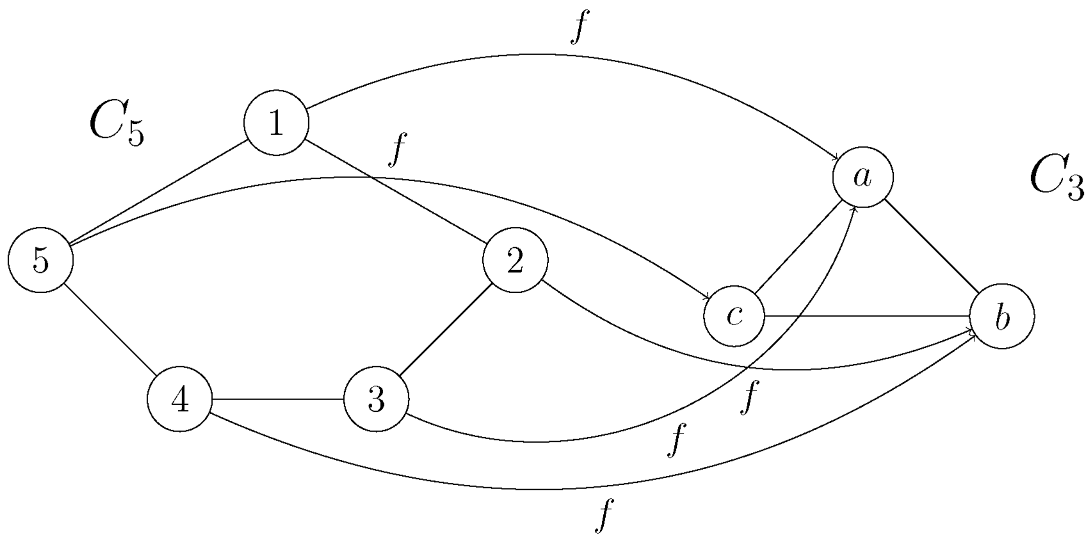

Рис. 9: $C_k \to C_l$, $k = 5$, $l = 3$

$m - l$ - непарне, то $c_l - c_{l+1} - \cdots - c_{m-1} - c_m$ - замкнений непарний шлях, що міститься у C, причому коротший. Тоді, за припущенням індукції, у ньому знаходиться простий цикл непарної довжини. Якщо ж $m - l$ - парне, то $c_1 - c_2 - \cdots - c_l - c_{m+1} - \cdots - c_{2k} - c_{2k+1}$ - непарний замкнений шлях, і знов можна застосувати припущення індукції. $\square$

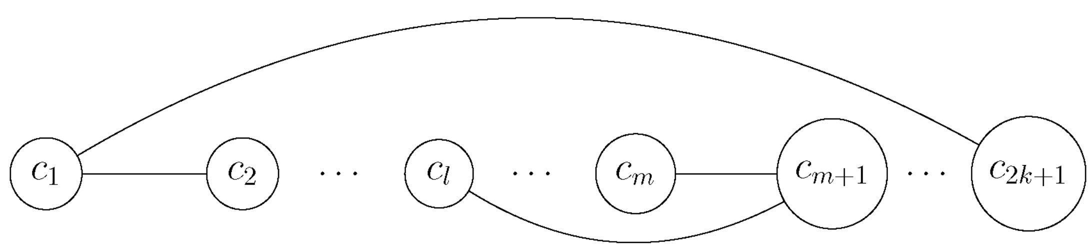

Рис. 10: Оскільки $c_l = c_m$, шлях розбивається на 2, один з яких - непарний

Лема також проливає світло на саме поняття непарного обхвату. Дійсно, з неї випливає, що найменший цикл непарної довжини у довільному графі обов'язково є простим (якщо, звісно, граф узагалі містить непарні цикли).

Твердження 3.3. *Якщо $G \to H$, то непарний обхват графа G не менший, аніж непарний обхват у H.*

Доведення. Якщо у графі G не має циклів непарної довжини, то твердження задачі тривіяльне. Інакше, розглянемо найкоротший цикл непарної довжини у графі G: $g_1 - g_2 - \cdots - g_{2n+1}$. Тоді $f(g_1) - f(g_2) - \cdots - f(g_{2n+1})$ - замкнений шлях у графі H. Однак з **леми 3.2** випливає, що сей шлях містить простий цикл непарної довжини, нехай C_H. Довжина C_H не перевищує $2n + 1 \implies$ граф H містить непарний цикл не довший, ніж $g_1 - g_2 - \cdots - g_{2n+1}$ - найкоротший непарний цикл у графі G. Тоді непарний обхват графа H не перевищує відповідне значення з графа G, що й потрібно було довести. □

Приклад 3.4. Цікаво, що якщо у попередньому твердженні забрати вимогу непарности обхвату, то твердження, взагалі кажучи, перестане бути вірним. Контрприклад для сього випадку зображений на **рис. 11**.

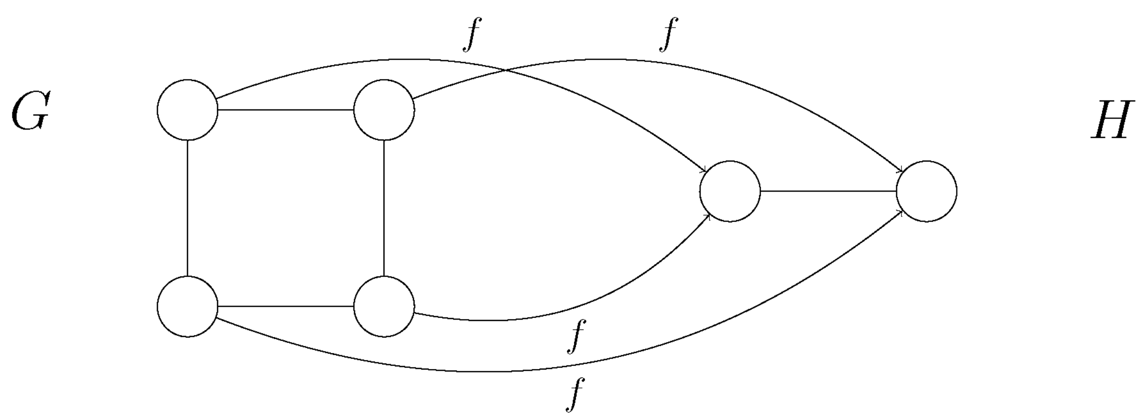

Рис. 11: Обхват графа G - 4 - менший за обхват графа H - ∞

Твердження 3.5. *Граф G має непарний цикл тоді і тільки тоді, коли $C_k \to G$ для якогось непарного числа k.*

Доведення. $\implies$ Най G містить цикл непарної довжини C_l. Тоді, поклавши $k := l$, маємо тривіяльне вкладення $C_l \hookrightarrow G$, яке є гомоморфізмом.
$\impliedby$ Най існує непарне число k таке, що $C_k \to G$. Тоді, за доведеним у **твердженні 3.3**, непарний обхват графа $G \leq k < \infty$, а отже G містить непарний цикл. □

На сьому завершимо розмову про гомоморфізми, та перейдемо до основних результатів.

4 Основні результати

4.1 Рівність клясів неперервних, інваріянтних відносно опуклости та метричних відображень

У попередній секції було доведено, що кожне неперервне відображення є метричним. Цікаво, коли справджується протилежне, себто з метричности випливає неперервність? Вцілому питання поставлене дуже загально і навряд чи має задовільну відповідь. Але якщо його уточнити, то можна отримати досить цікаві результати. Наприклад, для яких зв'язних графів H будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним (для довільного G)? Це питання досить конкретне і його розв'язок досить красивий. Він викладений у наступній теоремі.

Теорема 4.1. *Множина графів H, для яких виконується, що для довільного графа G будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним, це множина графів бльоків.*

Для доведення **теореми 4.1** зручно скористатися таким фактом.

Лема 4.2. *У графі бльоків для будь-яких двох вершин кожна точка на найкоротшому шляху між ними (крім, можливо, їх самих) є точкою з'єднання.*

Доведення. Най H - граф бльоків, $u, v \in V(H)$. Якщо $uv \in E(H)$, то твердження леми очевидне. Інакше існує $w \in [u, v]_H, w \neq u, w \neq v$. Підемо від супротивного - нехай w - не точка з'єднання. Розглянемо найкоротший шлях між u та v, що проходить через w: $u - \cdots - w_{-1} - w - w_1 - \cdots - v$. Оскільки w - не точка з'єднання, то вершини w_{-1} і w_1 лежать у тому самому бльоці, що й власне w. Тоді за теоремою про характеризацію графів бльоків $w_{-1}w_1 \in E(H)$. Втім, це суперечить тому факту, що $u - \cdots - w_{-1} - w - w_1 - \cdots - v$ - найкоротший шлях, адже існує коротший: $u - \cdots - w_{-1} - w_1 - \cdots - v$. Таким чином, w повинна бути точкою з'єднання. □

Тепер у нас є всі необхідні інструменти для доведення **теореми 4.1**.

Доведення. Най H не є графом бльоків. Тоді треба довести, що існують такі G та $f : V(G) \to V(H)$, що f є метричним, але не неперервним. З теореми про характеризацію графів бльоків випливає, що у H є бльок, який не є повним підграфом. Назвемо його H_1. Зафіксуємо $u, v \in V(H_1)$, $uv \notin E(H_1)$. Розглянемо найкоротший ланцюг між ними: $u - \cdots - w - \cdots - v$.

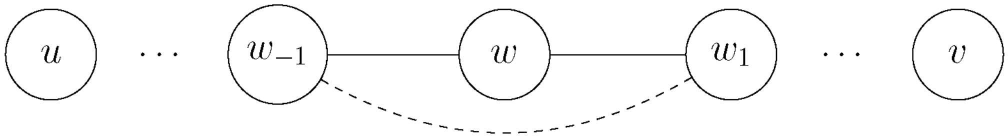

Рис. 12: w - не лежить на найкоротшому шляху між u та v

Оскільки H_1 - бльок, то існує ще один шлях $u - k_1 - k_2 - \cdots - k_n - v$, який не містить вершини w; довжина сього шляху $n+2$. Покладемо G - ланцюг з $n+2$ вершин:

$$G = g_0 - g_1 - \cdots - g_n - g_{n+1},$$

а f визначимо наступним чином:

$$f(g_0) = u, f(g_i) = k_i, i = 1..n, f(g_{n+1}) = v.$$

Очевидно, що таке відображення задовольняє умови **леми 2.24**, а отже є метричним. Проте не неперервним! Дійсно, якби f було неперервним, то мало б виконуватися $f([g_0, g_{n+1}]_G) \supset [f(g_0), f(g_{n+1})]_H = [u, v]_H = [u, v]_{H_1} \ni w$ (де остання рівність є наслідком того, що бльок є ізометричним підграфом), але $f([g_0, g_{n+1}]_G) = f(g_0 - g_1 - \cdots - g_n - g_{n+1}) = u - k_1 - k_2 - \cdots - k_n - v \implies w \notin f([g_0, g_{n+1}]_G)$. Таким чином, f - метричне, але не неперервне $\implies$ жоден граф окрім графів бльоків не може лежати у шуканій множині.
Звісно, звідси ще не слідує, що усі графи бльоків належать шуканій множині. Перевіримо се. Най H є графом бльоків. Покажемо, що для відображень у H з метричности слідує неперервність. Припустимо, що це не так, себто $\exists G, f : V(G) \to V(H) : f$ - метричне, але не неперервне: $\exists u, v \in V(G) : f([u, v]_G) \not\supseteq [f(u), f(v)]_H$. Виберемо $h \in [f(u), f(v)]_H \setminus f([u, v]_G)$. За **лемою 4.2** h є точкою з'єднання. Однак тоді образ зв'язної множини $[u, v]_G$ не є зв'язною множиною вершин $\implies$ за **твердженням 2.34** f не може бути метричним, суперечність. □

Після розгляду попередньої теореми природньо постає запитання: а як щодо дуальної задачі? Для яких графів G будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним? Відповідь на це питання є досить тривіяльною.

Теорема 4.3. *Множина графів G, для яких виконується, що будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним, це множина повних графів.*

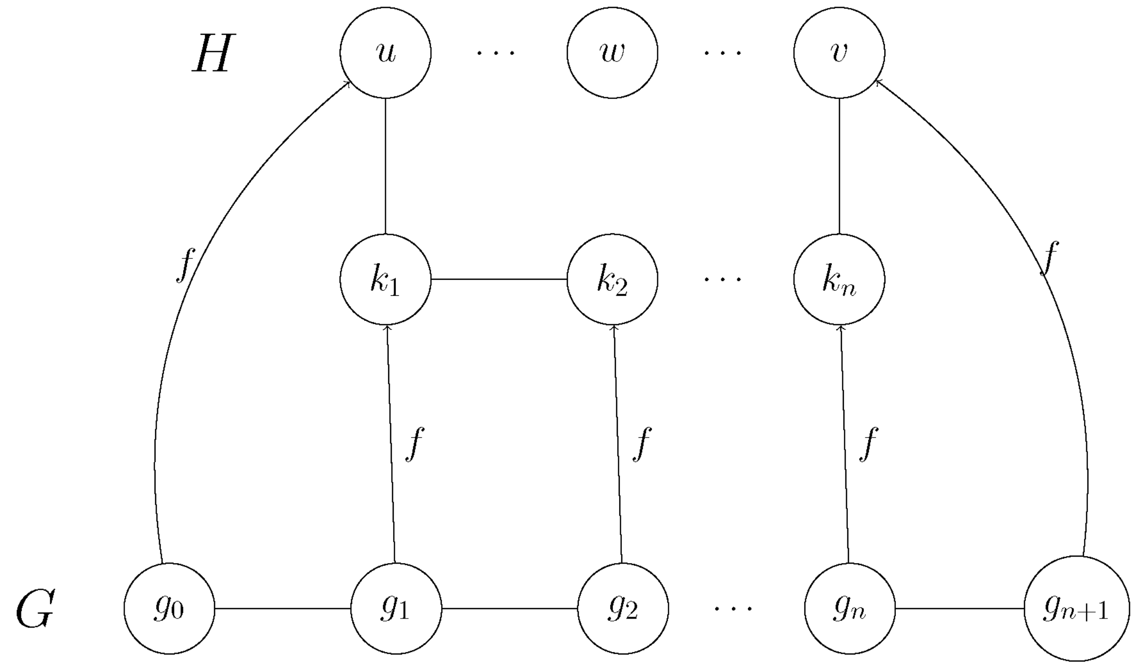

Рис. 13: w - не належить образові графа G

Доведення. Най G - не повний $\implies \exists u, v \in V(G) : uv \notin E(G)$. Покладемо $H = C_4$, $V(H) = \{a, b, c, d\}$, $E(H) = \{ab, bc, cd, da\}$. У якості f візьмемо таке відображення: $f(u) = a, f(v) = c, \forall x \neq u, v : f(x) = b$. Тоді за **лемою 2.24** f - метричне. Справді, най $x, y \in V(G), xy \in E(G)$. Якщо $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$, то $d_H(f(x), f(y)) = d_H(b, b) = 0 \leq 1$; якщо $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \{u\}$, то $d_H(f(x), f(y)) = d_H(a, b) = 1 \leq 1$; якщо $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \{v\}$, то $d_H(f(x), f(y)) = d_H(b, c) = 1 \leq 1$ ($\{x, y\} \cap \{u, v\} \neq \{u, v\}$, бо $xy \in E(G)$). Зате f не є неперервним! Перевіримо: $f([u, v]_G) = \{a, b, c\}$, а $[f(u), f(v)]_H = [a, c]_H = \{a, b, c, d\} \implies f([u, v]_G) \not\supseteq [f(u), f(v)]_H$.
Най G - повний! Тоді, будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним (для довільного H). Дійсно, для $u, v \in V(G)$ виконується $[u, v]_G = \{u, v\} \implies f([u, v]_G) = \{f(u), f(v)\}$. Однак з метричности f слідує, що $d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v) \implies [f(u), f(v)]_H = \{f(u), f(v)\}$, що й потрібно було довести. □

Пригадаємо, що за **твердженням 2.37** існує умова, сильніша за метричність, але слабша за неперервність, а саме - інваріянтність відносно опуклости (себто образом кожної опуклої множини вершин є опукла множина). Тепер можна задати подібне до щойно розглянутого питання, тільки замінивши неперервність (метричність) на інваріянтність відносно опукло-

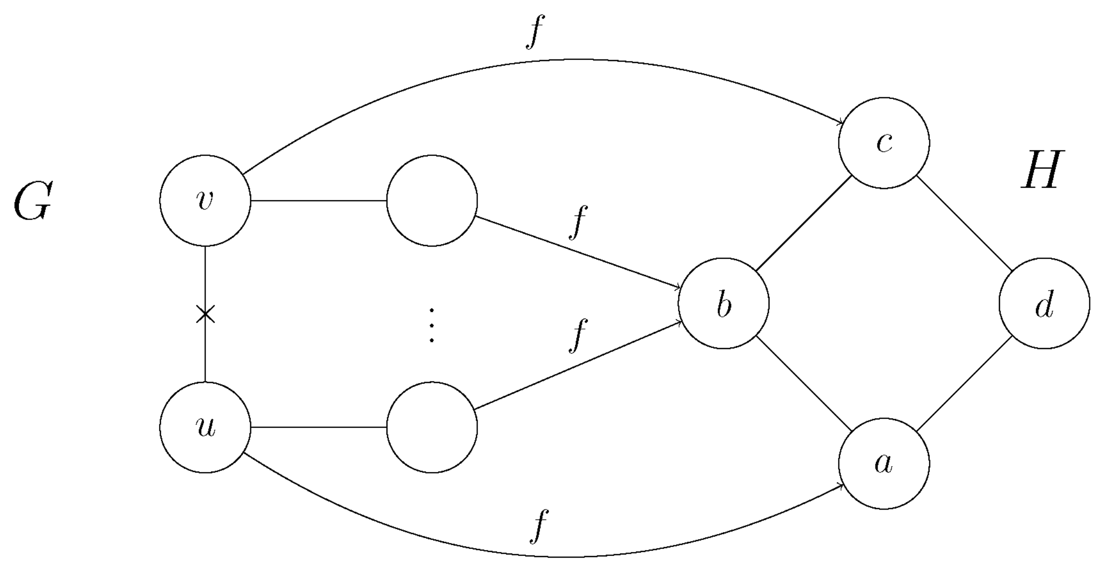

Рис. 14: Приклад метричного відображення графа G у граф H, яке є метричним, та не неперервним

сти. Наприклад, для яких графів G (H) будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є інваріянтним відносно опуклости? Чи ось так: для яких G (H) будь-яке інваріянтне відносно опуклости відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним? Розберемося з цими питаннями по порядку.

Теорема 4.4. *Множина графів H, для яких виконується, що будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є інваріянтним відносно опуклости, це множина графів бльоків.*

Доведення. Твердження теореми виглядає знайомим, адже дуже схоже сформульована **теорема 4.1**. Доведення також є подібним; насправді працює той самий аргумент. Пригадаймо його.
Спершу покажемо, що множина графів бльоків є підмножиною шуканої. Зафіксуємо певний граф бльоків H. Тоді з H можна витягнути підграф H_1, який є бльоком у H, але не є повним (се можна зробити, що випливає із характеризації графів бльоків). Таким чином, $\exists u, v \in V(H_1) : d_{H_1}(u, v) \neq 1$ (H_1 - не повний!). Виберемо вершину $w \in [u, v]_{H_1}$. Оскільки H_1 - бльок, то він не містить точок з'єднання (якщо точно, то його вершини можуть бути точками з'єднання графа H, але не H_1). Тоді w - також не точка з'єднання $\implies$ існує ланцюг $u - k_1 - k_2 - \cdots - k_n - v$, який не містить точки w.

Виберемо граф G як ланцюг $g_0 - g_1 - \cdots - g_n - g_{n+1}$ ($n+2$ вершини, де $n+2$ - довжина $u - k_1 - k_2 - \cdots - k_n - v$), а f: $f(k_i) = g_i, i = 1..n$, $f(u) = g_0$, $f(v) = g_{n+1}$. Легко перекнатися, що f - метричне; втім воно не інваріянтне відносно опуклости. Продемонструємо це на тому самому прикладі, що і у **теоремі 4.1**. Взагалі, доведення повністю віддзеркалює попереднє. Розглянемо опуклу множину $A = V(G)$. Її образ - ланцюг $u - k_1 - k_2 - \cdots - k_n - v$. Однак він не є опуклою множиною! Авжеж, $u, v \in f(A)$, але $[u, v]_H \nsubseteq f(A)$, бо $w \in [u, v]_H \backslash f(A)$. Отже, множина графів бльоків є підмножиною шуканої.
Друга частина полягає в тому, що слід показати, що для для кожного графа бльоків H виконується умова із твердження теореми. Скористаємося **теоремою 4.1**. Вона стверджує, що для будь-якого графа бльоків H з метричности слідує неперервність. За **твердженням 2.37**, у свою чергу, з неперервности слідує інваріянтність відносно опуклости, що й треба було отримати. □

Так вийшло, що з точки зору нашої задачі інваріянтність відносно опуклости та неперервність виявилися одним і тим самим в тому сенсі, що графи H (області значень), так би мовити, "не бачать" між ними ріжниці. Виявляється, графи G (області визначення) "уважнішими" не є. Це підтверджує наступна теорема.

Теорема 4.5. *Множина графів G, для яких виконується, що будь-яке метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є інваріянтним відносно опуклости, це множина повних графів.*

Доведення. Алгоритм доведення цієї теореми такий самий, як і у попередньої. Якщо граф G - не повний, то слід фактично повторити доведення цієї частини **теореми 4.3** із невеликою модифікацією. Я його не наводитиму. Але покажу доведення для повного G, яке також перегукуватиметься з попереднім доведенням. Дійсно, якщо G - повний граф, то за **теоремою 4.3** довільне метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$ (для довільного H) є неперервним. Однак усі неперервні відображення є інваріянтними відносно опуклости (**твердження 2.37**), що завершує доведення. □

Отже, заміна неперервности на інваріянтність відносно опуклости не дала нічого нового. Зате замінивши метричність отримаємо дещо значно цікавіше.

Теорема 4.6. *Множина графів G, для яких виконується, що будь-яке інваріянтне відносно опуклости відображення $f : V(G) \to V(H)$ є неперервним, це множина інтервально монотонних графів.*

Доведення. Нагадаю, що граф називається інтервально монотонним, якщо будь-який його метричний відрізок є опуклою множиною (**означення 2.15**). Припустімо, що G задовольняє сю умову. Чи правда, що для кожного H інваріянтне відносно опуклости відображення $f : V(G) \to V(H)$ обов'язково неперервне? Щоб перевірити істинність твердження, скористаємося означеннями. Най $u, v \in V(G)$. Оскільки G - інтервально монотонний, то $[u, v]_G$ - опукла множина. Тоді $f([u, v]_G)$ - теж опукла, за властивістю f. Залишається помітити, що $f(u), f(v) \in f([u, v]_G)$, звідки прямо випливає результат, адже опукла множина містить метричні відрізки між власними вершинами: $f([u, v]_G) \supset [f(u), f(v)]$ (а се і є означення неперервности).
Тепер припустімо, що G не є інтервально монотонним. Тоді у ньому є метричний відрізок, що не є опуклою множиною: $[x, z]_G$ - не опукла. Се означає, що $\exists u, v \in [x, z]_G \exists y \in [u, v]_G : y \notin [x, z]_G$. Знаючи се, побудуємо інваріянтне відносно опуклости відображенння f, яке втім не є неперервним. В якості H виберемо граф, зображений на рисунку *. f задамо так:

$$f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z', f(u) = u', f(t) = t',$$

де t - будь-яка вершина, окрім x, y, z, u. Зробімо необхідні перевірки:

1. f - інваріянтне відносно опуклости.
   Най $A \subset V(G)$ - опукла. Якщо $z \notin A$, то $z' \notin f(A) \implies H[f(A)]$ - повний, а якщо множина породжує поний підграф, то вона точно опукла (отже, $f(A)$ - опукла). Якщо $x \notin f(A)$, то аналогічні міркування підводять до того самого висновку. Інакше, $x, z \in A \implies [x, z]_G \subset A$, бо A - опукла. Однак тоді $u, v \in [x, z]_G \subset A \implies [u, v]_G \subset A \implies y \in [u, v]_G \subset A$. Таким чином, $x, z, u, v, y \in A \implies \{x', z', u', t', y'\} = V(H) \subset f(A) \implies f(A) = v(H)$ - опукла!

2. f - не неперервне.
   Дійсно, $f([x, z]_G) = \{x', u', z', t'\}$ - не містить $[f(x), f(z)]_H = [x', z']_H$ (адже не містить y').

Відтак, f - інваріянтне відносно опуклости, але не неперервне, що завершує доведення. □

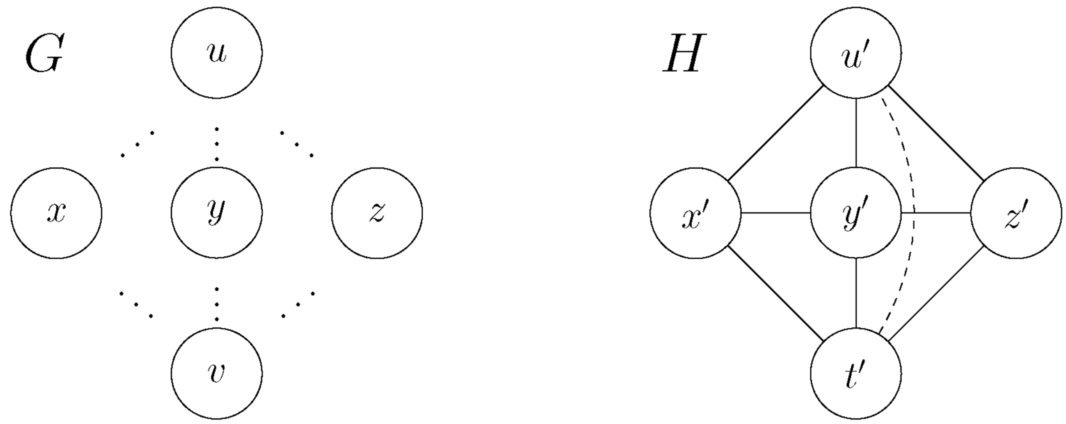

Рис. 15: Приклад інваріянтного відносно опуклости відображення $f : G \to H$, яке не є неперервним; G - не інтервально монотонний

З минулих розділів читач може пригадати, що кожне лінійне відображення є монотонним. Дослідимо аналогічне питання: а для яких графів G (H) кожне монотонне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є лінійним?

Теорема 4.7. *Множина графів G, для яких справджується, що будь-яке монотонне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є лінійним, це множина повних графів.*

Доведення. Дійсно, якщо G - повний, то будь-яке f є лінійним: $f([u,v]_G) = \{f(u), f(v)\} \subset [f(u), f(v)]_H$.
Якщо ж G - не повний, то $\exists u \neq v \in V(G) : uv \notin E(G)$. Покладемо $H := K_n$, де $n = |V(G)|$, f - довільна сюр'єкція (нагадаю, що відображення $\phi : A \to B$ називається сюр'єктивним, якщо $\phi(A) = B$). Тоді $\forall x \in V(H) : |f^{-1}(x)| = 1$ $\implies$ f - монотонне. Однак легко переконатися, що воно не лінійне, адже $|f([u,v])_G| > 2$, а $|[f(u), f(v)]_{K_n}| = |\{f(u), f(v)\}| = 2$. □

Теорема 4.8. *Множина графів H, для яких справджується, що будь-яке монотонне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є лінійним, це множина яка складається з єдиного графа - одноточкового.*

Пропоную читачеві довести сю теорему самостійно.

4.2 Нерухомі точки метричних відображень та ретракти

Те, про що йтиметься надалі, розглянули у своїй роботі "Графи й гомоморфізми" Павол Гел та Ярослав Несетріл [1].

За означенням метричні відображення не можуть збільшити відстань між вершинами. У цьому сенсі вони трохи нагадують відображення стиску. Тому природньо спитати, чи не фіксують вони вершини? Якщо конкретніше, питання можна поставити так: для яких графів кожне метричне відображення в себе має нерухому вершину? На жаль, нескладно показати, що сю умову задовольняє лише тривіяльний одноточковий граф. То послабимо її! До прикладу, для яких графів кожне метричне відображення у себе містить нерухому вершину або нерухоме ребро? Виявляється се дерева. Доведімо се.

По-перше, покажемо, що усі дерева задовольняють сю умову. Зауважу, що надалі користуючись метричністю я матиму на увазі не означення, а властивість (**лема 2.24**), іншими словами метричне відображення відображає ребра у ребра або в точки.

Теорема 4.9. *Най T - дерево. Тоді, якщо $f : V(T) \to V(T)$ - метричне, то воно фіксує вершину або ребро.*

Доведення. Скористаємося методою математичної індукції за кількістю вершин у дереві.
База індукції. розглянемо дерево, що містить єдину вершину. Тоді будь-яке відображення $f : V(T) \to V(T)$ зафіксує її, зокрема метричне.
Крок. Припустимо, що для усіх дерев, що мають менше вершин аніж T, виконується твердження теореми. Звідси випливає, що твердження поширюється й власне на T. Традиційно розглянемо певний листок дерева - вершину l. Позначимо суміжну до нього вершину через m. Для метричного f розглянемо його "звуження" на $T - l$: $f' : V(T - l) \to V(T - l)$ таке, що: $f'(u) = u$, якщо $f(u) \neq l$, та $f'(u) = m$, якщо $f(u) = l$.
Легко переконатися, що f' - метричне. Справді, якщо $uv \in E(T - l)$, то або $f(u) \neq l, f(v) \neq l \implies f'(u)f'(v) = f(u)f(v) \in E(T - l)$, або одне з $f(u), f(v)$ дорівнює l, наприклад $f(u)$. У такому разі або $f(v) = l$, або $f(v) = m$, адже $f(u)f(v) \in E(T)$. Однак у обох ситуаціях $f'(u) = f'(v) = m$, що задовольняє метричність.
$T - l$ має менше вершин ніж T і є деревом. За припущенням індукції f' має нерухому точку або нерухоме ребро:

1. $\exists t \in V(T - l) : f'(t) = t$ (нерухома точка). Якщо $t \neq m$, то $f(t) = f'(t) = t$ і t є нерухомою точкою відображення f. Інакше, може бути, що $t = m$, але $f(t) = l \neq m$. Однак оскільки $f(m) = l$, то з метричности f для ребра lm або $f(l) = f(m) = l$ (нерухома точка),

або $f(l)f(m) = f(l)l \in E(T) \implies f(l) = m \implies f(l)f(m) = lm$ (нерухоме ребро).

2. $\exists tt' \in E(T - l) : f'(t) = t', f'(t') = t$ (нерухоме ребро). Якщо $t \neq m$ і $t' \neq m$, то $f'(t') \neq m$ і $f'(t) \neq m \implies f(t) = f'(t), f(t') = f'(t') \implies f$ також фіксує ребро tt'. Якщо ж наприклад $t' = m$, то $f'(t) = m$ і можливо $f(t) = l$ ($f(t') = f'(t') = t$ як і раніше). Однак тоді з метричности f для ребра tm $f(t)f(m) \in E(T) \implies lt \in E(T)$, що неможливо, адже єдиний сусід l - це m, $t \neq t' = m$.

Отже, для дерева T також виконується твердження умови, що завершує крок індукції. □

Тепер слід розглянути, що ж відбувається для графа G, який не є деревом. Почнемо із простого прикладу.

Приклад 4.10. Най $G \cong C_4$, як на русинку *. Прбудуємо метричне відображення f, яке не містить нерухомих точок і ребер. Для цього виберемо певну орієнтацію циклу (будь-яка з двох підійде), і покладемо образом кожної вершини при відображенні f наступну за обраною орієнтацією. Легко бачити, що таке f не фіксує ні вершин, ні точок, зате є метричним. До речі, ця процедура легко поширюється на проті цикли довільної довжини. Для зручності, дамо такому f назву "відображення ротації циклу", або просто "ротація".

У **прикладі 4.10** викладена ключова ідея доведення того, що якщо G - не дерево, то існує метричне $f : V(G) \to V(G)$, що не містить нерухомих точок і ребер. Однак щоби перейти власне до доведення зручно спершу довести ще одну вельми корисну лему.

Лема 4.11. *Най H - ізометричний підграф графа G, причому H - ланцюг. Тоді існує метричне відображення $f : V(G) \to V(H)$, яке залишає на місці усі вершини H, себто $\forall u \in V(H) : f(u) = u$.*

Доведення. Най H має довжину n. Пронумеруємо його вершини від 0 до n. Побудуємо f наступним чином: $f(u) = min(n, d_G(0, u))$, себто образ вершини відповідає її відстані до 0 (якщо ся відстань більша за n, то не залишиається іншого вибору як відобразити її власне у n, звідки й береться мінімум у формулі). Легко переконатися, що f - метричне, і фіксує H, себто задовольняє умову леми. □

Вправа 4.12. Де у доведенні попередньої леми використано те, що H - *ізометричний* ланцюг?

Hint: Чому відображення f залишає на місці усі вершини із H?

Теорема 4.13. *Най G - довільний граф, який не є деревом. Тоді існує метричне відображення $f : V(G) \to V(G)$, яке не містить ні нерухомих точок, ні нерухомих ребер.*

Доведення. Оскільки G - не дерево, то за означенням він містить цикл. Серед усіх циклів у G розглянемо найкоротший (якщо їх кілька, підійде будь-який). Позначимо його H. Виберемо певне ребро $e \in E(H)$. Помітимо, що $H - e$ - ізометричний ланцюг графа $G - e$. Справді, якби було не так, то існували б $u, v \in V(H)$ такі, що між ними існував би шлях ω коротший ніж той, що у $H - e$ (шлях δ). Проте се суперечить тому, що H - найкоротший цикл графа G, адже можна знайти коротший. Дійсно, у графі H є два ланцюги, що з'єднують u та v. Най θ містить ребро e (тобто θ - доповнення до δ). Тоді $\theta \cup \omega$ коротший за $\delta \cup \omega = H$, а $\theta \cup \omega$ містить цикл! Тоді за **лемою 4.11** існує метричне відображення $g : V(G - e) \to V(H - e)$, яке залишає на місці вершини ланцюга $H - e$. Легко бачити, що відображення g залишається метричним, якщо його розглядати як відображення з $V(G)$ у $V(H)$ (очевидно, $V(G) = V(G - e)$ і $V(H) = V(H - e)$), адже воно відображає ребра у ребра або точки (єдине ребро, що додалося, - ребро e - переходить у себе). А на сьому етапі залишається помітити, що шукане відображення f можна побудувати у вигляді композиції $f = h \circ g$, де $h : V(H) \to V(H)$ - довільна ротація циклу H. $\square$

5 Висновки

У сій роботі я розглянув різні види відображень між графами. Найбільшу увагу, напевно, я приділив метричним відображенням. Зокрема, я розглянув дві характеризіції метричних відображень та їх поведінку при відображенні графа самого у себе. Довів, що метричне відображення графа у себе обов'язково містить нерухому точку чи нерухоме ребро, тільки якщо граф є деревом. Також розглянув неперервні та інваріянтні відносно опуклости відображення. Згадую про них у сьому контексті, адже вони тісно пов'язані: кожне неперервне відображення є інваріянтним відносно опуклости, а кожне інваріянтне відносно опуклости є метричним, що також доведено у роботі. Також описано кляси графів, які, так би мовити, "не розрізняють" сі кляси відображень, у сенсі, що, наприклад, кожне метричне відображення у (з) них є неперервним. Також варто відзначити лінійні й монотонні відображення. Довівши, що усі лінійні відображення є монотонними, я описав кляси графів, які їх не розрізняють; розглянув, як сі відображення поводяться відносно клясмчних понять з теорії графів. До прикладу, довів, що лінійне відображення між медіянними графами зберігає медіяни. Не міг я оминути увагою і гомоморфізми. Се, певна річ, найкраще досліджена кляса графів, тому у сій роботі я розглянув вибіркові питання, пов'язані з циклами, зокрема, показав, що при гомоморфному відображенні непарний обхват графа не може збільшитися. Наостанок, зауважу, що ся робота адресує, але не вирішує, одного цікавого питання: для яких графів H кожне інваріянтне відносно опуклости (див. **означення 2.10**) відображення $f : V(G) \to V(H)$ (для довільного G) є неперервним?

Література

[1] P. Hell, J. Nesetril, *Graphs and Homomorphisms*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **28** (2004), 1—37, 60–61, 71–72.

[2] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley Series in Mathematics (1970), 26–30.