ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО ВІДНОВЛЮЮЧОГО ЧИСЛА ДЛЯ ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ

Чернявська Карина

Травень 2023

Вступ

Мета роботи.

Дослідити спектральні відновлюючі числа для обраних класів зважених графів, знайти оцінки.

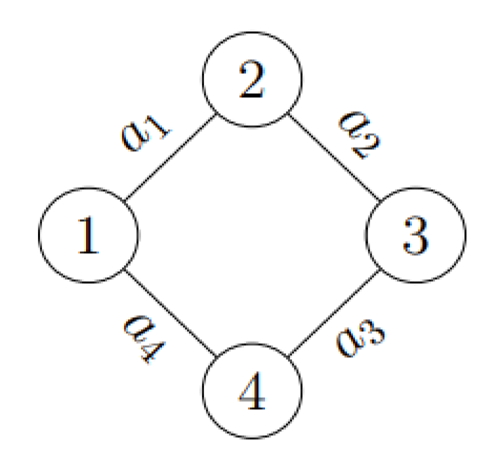
Задачі для дослідження:

1. Знаходження відновлюючого спектрального числа для циклу на чотирьох вершинах з перегородкою.
2. Знаходження різних наборів підспектрів для циклу на чотирьох вершинах з перегородкою, за якими відновлюється вагова функція цього графу.
3. Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біциклічного графа.

Основні означення з теорії графів

Означення.

- *Реберно-зваженим графом* **G** називається така пара (G, w),
  - де G – це граф,
  - $w\colon E \to (0, +\infty)$ – вагова функція, відображення множини $E(G)$ у множину додатних дійсних чисел.



Реберно-зважений граф **G**

Основні означення з спектральної теорії зважених графів

Означення.

- *Точки спектра* – це власні значення матриці суміжності.

Означення.

Спектр графа $\sigma(\boldsymbol{G})$ – спектр матриці суміжності.

Для характеристичного многочлена матриці суміжності зваженого графа будемо використовувати таке позначення :

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$$

Додаткові позначення для теореми Захса

Лінійний підграф графа **G** – підграф, компонентами зв'язності якого є тільки ребра та цикли. Позначимо через H_k, де $k = |H_k|$, тобто дорівнює кількості вершин.

- $r(H_k)$ — загальна кількість компонент зв'язності H_k.
- $c(H_k)$ — кількість компонент зв'язності H_k, що є циклами.
- $w(H_k)$ — вага H_k, яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності.

Теорема Захса[1]

Якщо $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n$

— характеристичний многочлен графа **G** = (*G*,*w*), то

- $c_1 = 0$;
- $c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2$
- $\mathrm{c_k} = \sum_{H_k} (-1)^{\mathrm{r}(H_k)} 2^{\mathrm{c}(H_k)} \mathrm{w}(H_k)$ для $k = 1, \ldots, n$,

де *n* – кількість вершин в графі *G*

Теорема Швенка[2]

Теорема

Нехай v — вершина зваженого графа **G**, через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v. Тоді

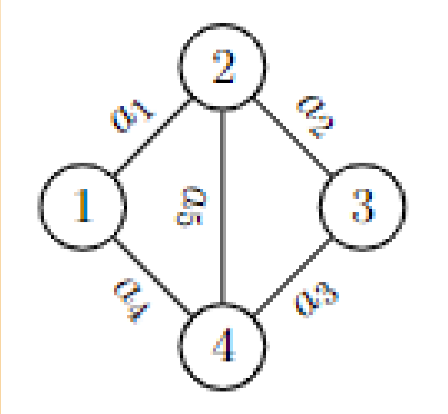
- $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-\{v\}}(\lambda) - \sum_{u\sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-\{v,u\}}(\lambda) - 2\sum_{Z\in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-Z}(\lambda)$

Наслідок (Розклад за висячою вершиною).

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-\{v\}}(\lambda) - w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-\{v,u\}}(\lambda)$$

Постановка задачі

Нехай нам відомий граф $\mathbf{G} = (G, w)$ і нумерація його вершин. Ми хочемо однозначно відновити ваги кожного ребра графа $\mathbf{G}$, тобто його вагову функцію w, за спектрами його породжених підграфів.



Відновлююче спектральне число *Srn*(G)

Означення

- *Відновлююче спектральне число* $Srn(\mathrm{G})$ — мінімальна кількість підспектрів, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа.
- Нижня границя $Srn(\boldsymbol{G})$ дорівнює 1, тобто спектр вихідного графа відновлює свої ж ваги.
- Верхня границя для довільного графа **G**: $Srn(\mathrm{G})$ дорівнює $E(G)$, бо будь-який зважений граф можна відновити знаючи спектри підграфів на двох вершинах, тобто ребер.

Відновлення ваг за характеристичним многочленом

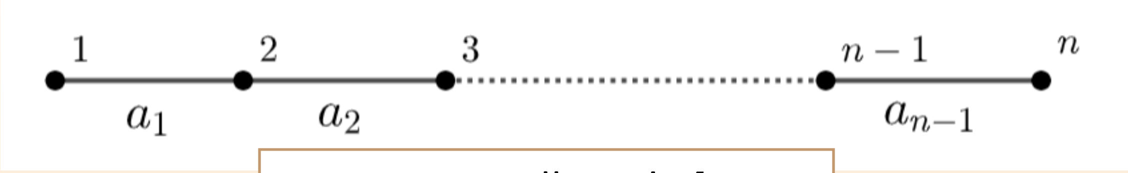
Лема

Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа **G** за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.

Нехай $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ – спектр зваженого графа **G**, то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

Задача відновлення ваг для ланцюга



Зважений граф $\boldsymbol{A_n}$

Для $\mathbf{A_2}$: $\sigma(\mathbf{A_2}) = \{-a_1, a_1\}$ і $P_{\boldsymbol{A_2}} = \lambda^2 - a_1^2$. З такого спектру однозначно відновлюються ваги, оскільки $a_1^2 = b$, де b – коефіцієнт многочлена, який відомий нам за умовою, то $a_1 = \sqrt{b}$, $a_1 > 0$.

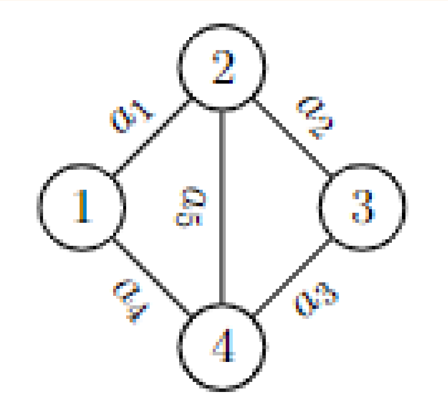
Твердження

Для будь-якого $n \geq 3$ можна відновити зважений граф A_n за спектром всього графа $\sigma(A_n)$ і підспектром $\sigma(A_{n-\{1\}})$.

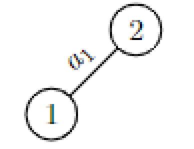
Отже, $Srn(\boldsymbol{A_2}) = 1$ і $Srn(\boldsymbol{A_n}) = 2$.

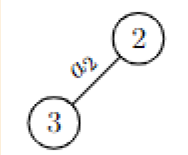
Задача відновлення ваг для циклу K_4- e

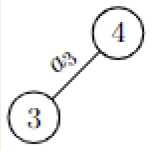
Чи можна відновити ваги графа K_4-e
за чотирма підспектрами?

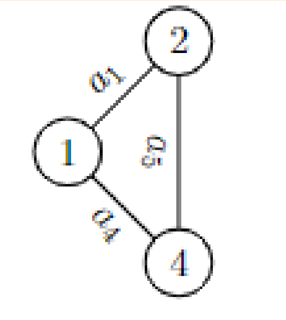


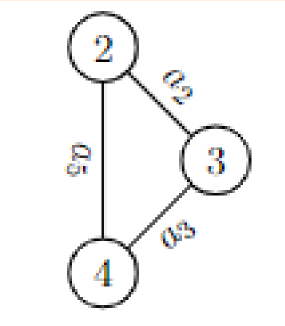
Твердження: За спектрами H_1^3 та H_2^3 і будь-якими трьома породженими підграфами на двох вершинах, які в об'єднанні не є H_1^3 та H_2^3 відновлюється вагова функція графа K_4-e







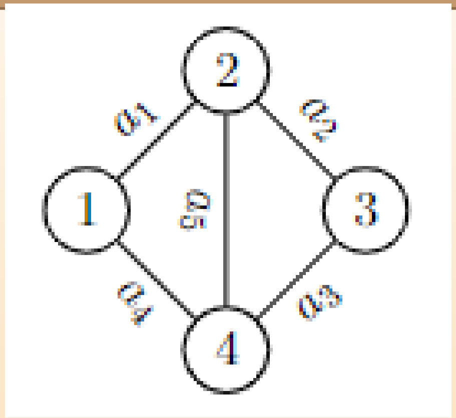




1. Запишемо характеристичний многочлен графа K_4-e .

$$P_G(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda^2 - 2(a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5)\lambda + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 - 2a_1 a_2 a_3 a_4$$

Задача відновлення ваг для циклу K_4-e



Чи можна відновити ваги графа K_4-e
за чотирма підспектрами?

2. Запишемо систему рівнянь, що в нас вийшла.

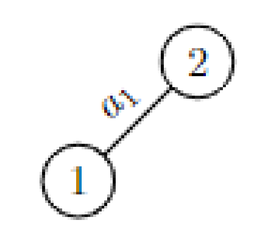
$$\begin{cases} a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = k_1 \\ a_1 a_4 a_5 = k_2 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = k_3 \\ a_2 a_3 a_5 = k_4 \\ a_1 = k_5 \\ a_2 = k_6 \\ a_3 = k_7. \end{cases}$$

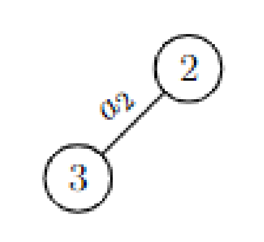
- Спочатку знайдемо a_5
- Потім відновлюємо a_4

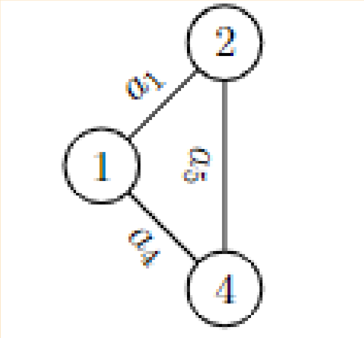
Задача відновлення ваг для циклу K_4- e

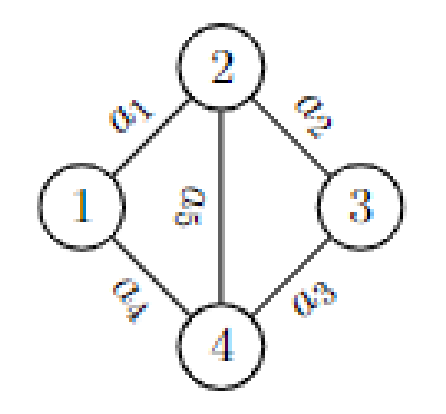
Чи можна відновити ваги графа K_4- e
за чотирма підспектрами?

Твердження 4: Вагову фунцкію графа **K_4-e**, можемо відновити за спектрами самого графа K_4- e
, підграфа H_1^3 та підграфів H_1^1
та H_2^1



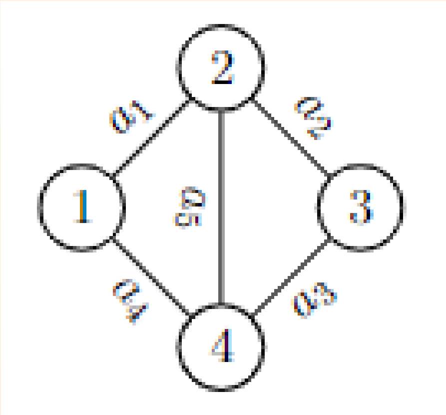






Задача відновлення ваг для циклу K_4- e

Чи можна відновити ваги графа K_4-e *за трьома підспектрами?*



Маємо наступну систему рівнянь:

$$
\begin{cases}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = k_1 \\
a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5 = k_2 \\
a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 - 2a_1 a_2 a_3 a_4 = k_3 \\
a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 = k_4 \\
a_1 a_4 a_5 = k_5 \\
a_1 = k_6 \\
a_2 = k_7
\end{cases}
$$

Спочатку знайдемо a_3

Потім відновлюємо a_5

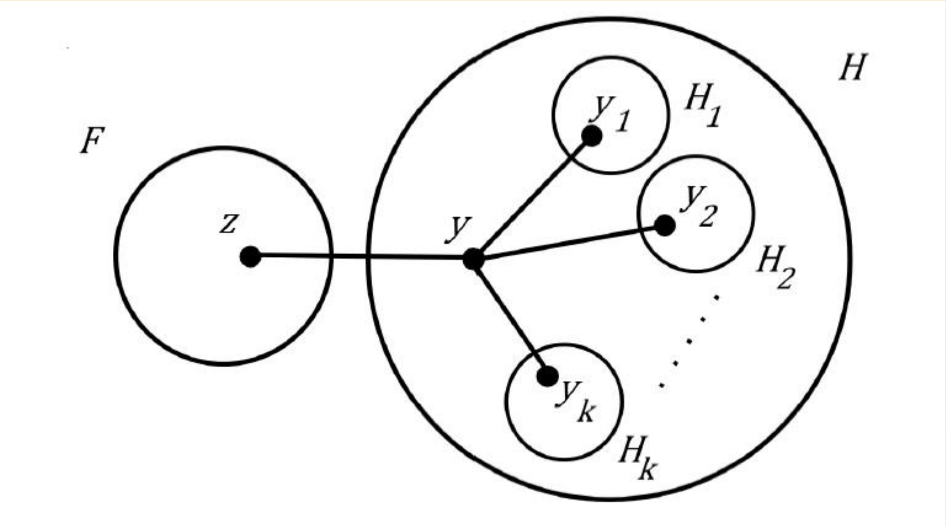
Ця система дає змогу відновити усі ваги графа в додатних числах.

$Отже,\ Srn(C'_4) \le 4$

Верхня оцінка Srn(G)

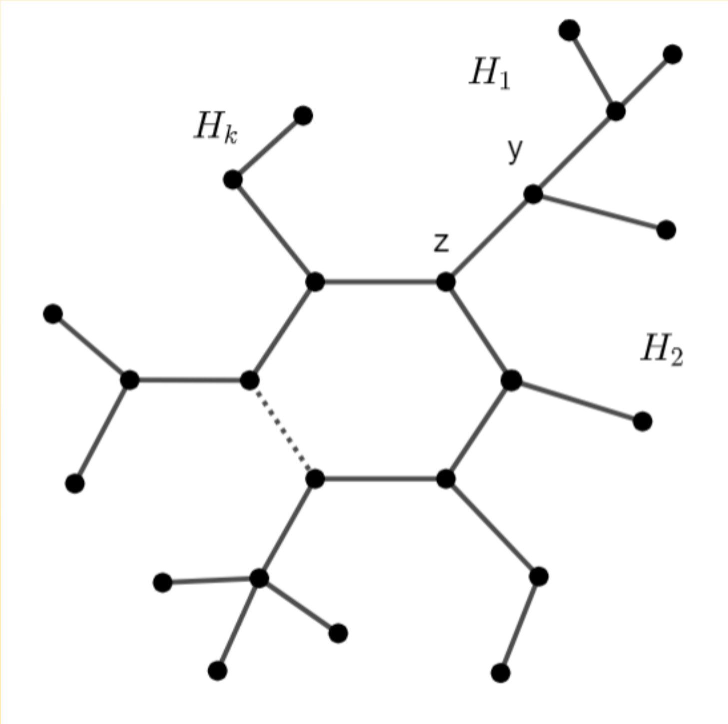
Теорема

Нехай F – довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H – дерево з коренем y. Граф G – об'єднання графів F, H та ребра, що з'єднує вершини z та y. Тоді за спектрами **G** та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - \mathrm{v}$, де v пробігає $CV(H)$ – множина висячих вершин, можна відновити ваги на ребрах графа $\boldsymbol{H}$, вагу на ребрі (z, y), а також $P_{\boldsymbol{F}}$, $P_{\boldsymbol{F}-\{z\}}$.



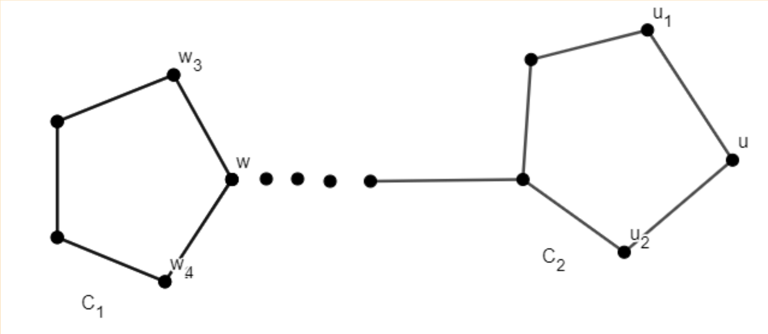
Верхня оцінка *Srn*(G) для уніциклічного графа G [2]

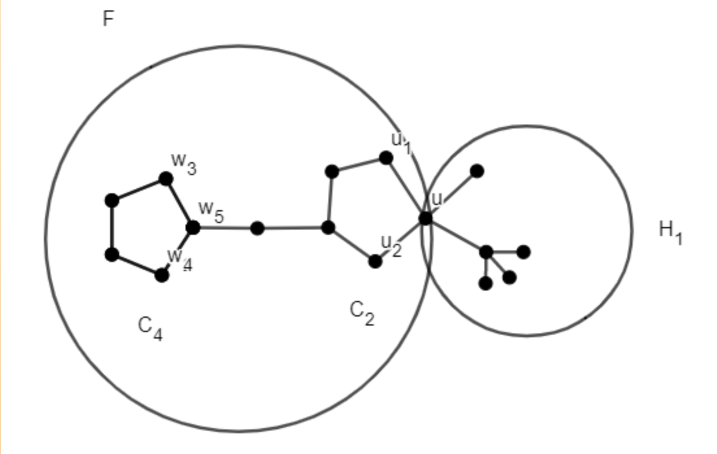
$Srn(G) \leq cv(G)$*+3, де G – уніциклічний граф.*

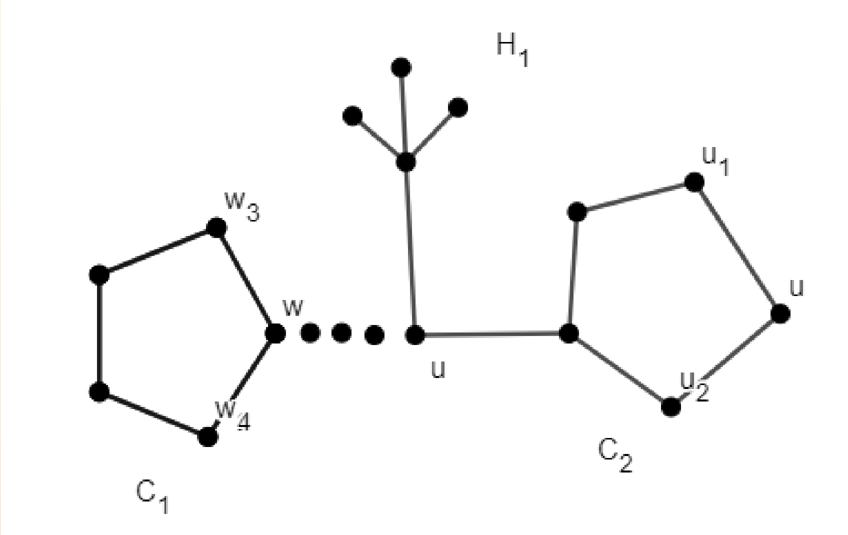


Верхня оцінка *Srn*(G) для біциклічного графа G

Теорема: $Srn(G) \le cv(G)$*+6, де G – біциклічний граф. Біциклічний граф - це граф-кактус, циклічний ранг якого дорівнює 2 (тобто містить рівно два простих цикли.)*







Список літератури

- 1. *H. Sachs*, Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964), 119–134.
- 2. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, Graphs and Combinatorics, volume 406 of Lecture Notes in Mathematics, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- 3. *Тимошкевич Лариса Миколаївна*, Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера.- Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 44 с.
- 4. *Пилипіва О. В., Тимошкевич Л. М.*, ОБЕРНЕНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ, Могилянський математичний журнал 2022 , том 5 – с.26 - 32

Дякую за увагу !