

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНОГО
ВІДНОВЛЮЮЧОГО ЧИСЛА ДЛЯ ЗВАЖЕНИХ ГРАФІВ»**

Виконала: студентка 4-го року
навчання
освітньої програми «Прикладна
математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Чернявська Карина Сергіївна

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Робота виконана з оцінкою

Київ - 2023

Зміст

1	Вступ	3
1.1	Актуальність	3
1.2	Мета, завдання дослідження	3
2	Основні поняття реберно-зважених графів	5
2.1	Основні означення з теорії графів	5
2.2	Основні означення з спектральної теорії зважених графів	6
2.3	Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності	8
2.4	Знаходження характеристичного полінома	10
3	Обернені спектральні задачі на зважених графах	14
4	Оцінка відновлюючого спектрального числа для графа діаманта $K_4 - e$	16
5	Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біциклічного графа.	18
6	Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для графів-кактусів	21
7	Висновки	23
8	Література	24

1 Вступ

1.1 Актуальність

У сучасному світі теорія графів є важливою галуззю математики та комп'ютерних наук, яка знаходить застосування в різних областях, таких як транспортні мережі, соціальні мережі, біологія та інші. Важливим аспектом теорії графів є аналіз властивостей та характеристик графів, що може бути корисним у багатьох практичних задачах.

Спектральна теорія графів — сучасна розвинена область математики з чисельними у результатами та широкими можливостями застосувань. Вона вивчає властивості графів, характеристичних многочленів, власних векторів і власних значень матриць, пов'язаних з графом. Детальніше про цю теорію ви можете знайти, наприклад, у класичній монографії 12,а про її застосування у 13. Однією з характеристик є спектральне відновлююче число для зважених графів, яке є важливим показником стійкості графу та може бути використане для різноманітних завдань, таких як класифікація графів, розробка ефективних алгоритмів маршрутизації у мережах, аналіз властивостей криптографічних протоколів та багато інших. Цей напрям у теорії графів виник в 1950 – 1960 роках.

У своїй роботі я працюю зі спектральною теорією графів, досліджуючи спектральне відновлююче число для зважених графів.

1.2 Мета, завдання дослідження

Мета роботи. Дослідити спектральні відновлюючі числа для обраних класів зважених графів, знайти оцінки.

Задачі для дослідження:

1. Знаходження відновлюючого спектрального числа для циклу на чотирьох вершинах з перегородкою.
2. Знаходження різних наборів підспектрів для циклу на чотирьох вершинах з перегородкою, за якими відновлюється вагова функція цього графу.

3. Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біциклічного графа.

2 Основні поняття реберно-зважених графів

2.1 Основні означення з теорії графів

На початку роботи хочу ввести базові поняття теорії графів, а саме: граф, вершини та ребра графа, суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро, степінь вершини.

Означення 1: Простий неорієнтований граф — впорядкована пара $G = (V, E)$, в якій V — деяка непорожня скінченна множина і E — множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів V .

Означення 2: Множина V називається *множиною вершин графа G* .

Означення 3: Множина E називається *множиною ребер графа G* .

Коли необхідно підкреслити, про вершини та ребра якого графа йде мова, будемо використовувати наступні позначення $V(G)$ та $E(G)$. Ребро, що з'єднує вершини w та v будемо коротко позначати (v, w) або vw .

Означення 4: Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть, що вершини v і w суміжні, інакше вершини v і w несуміжні.

Означення 5: Якщо $E = (v, w)$ ребро графа, то вершини v і w називають кінцями ребра E .

Приклад ми можемо побачити на рисунку 1. Множина вершин графа $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Множина ребер графа $E(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ складається із зв'язків між цими вершинами.

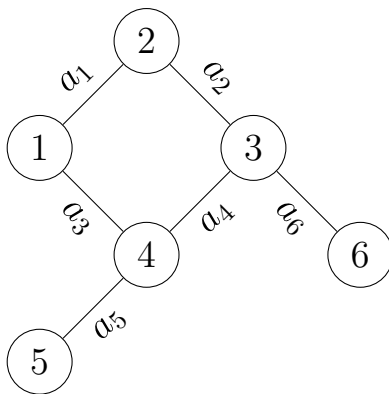


Рис. 1: G - граф

Означення 6: Коли вершина графа є кінцем деякого ребра, то ця вершина і ребро називаються інцидентними.

Означення 7: Кількість ребер, інцидентних вершині v графа G називаються степенем вершини і позначається $degv$.

Означення 8: Реберно-зважений граф \mathbf{G} — це пара (G, w) , в якій G — граф і w — вагова функція, тобто відображення множини ребер R цього графа G в множину додатніх дійсних чисел $w : E \rightarrow (0, +\infty)$.

Означення 9: w_e буде позначати число $w(e)$, яке називатимемо вагою ребра e .

2.2 Основні означення з спектральної теорії зважених графів

Означення 10 [5]: Матрицею суміжності графа G , який має n вершин — є квадратна матриця $A(G)$ розміру n

$$A(G) = \left(a_{ij} \right)_{n \times n}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$n = |G|,$$

$a_{ij} = a_{ji} = w_{ij} > 0$ - елементи матриці, що є вагою ребер, якщо вершини i та j сполучені ребром, і $a_{ij} = 0$ для несуміжних вершин.

Матриця суміжності простого неорієнтованого графа є симетричною і містить 0 на головній діагоналі. Її вигляд залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Оскільки матриця $A(G)$ симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її спектр дійсний.

Приклад:

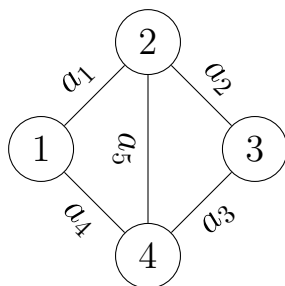


Рис. 2: G_1 - граф

Матриця суміжності графа G_1 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_4 \\ a_1 & 0 & a_2 & a_5 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Означення 11: Індекс графа — максимальне власне значення G , позначення символ — $indG$.

Означення 12: Характеристичний многочлен матриці суміжності позначається:

$$P_G(x) = |xI - A(G)|.$$

Власні значення матриці — корені характеристичного многочлена.

Означення 13: Спектр матриці суміжності позначається $\sigma(G)$ та називається спектром графа. Спектр графа не залежить від способу нумерації вершин.

Означення 14: Точками спектра називають власні значення матриці суміжності.

Теорема Фробеніуса для матриці суміжності графа $G = (G, w)$ має наступний вигляд:

Теорема 1 (Фробеніуса):

Нехай $G = (G, w)$ — зв'язний зважений граф та $\lambda_G = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — власні значення графа розташовані в порядку не зростання. Тоді:

1. $\lambda_G > 0$, де λ_G — індекс графа;

2. $|\lambda_i| \leq \lambda_G$ для всіх i ;
3. алгебраїчна кратність власного значення λ_G дорівнює одиниці;
4. існує додатній власний вектор, який відповідає власному значенню λ_G .

Ця теорема описує властивості власних значень та власних векторів матриці суміжності графа. Зокрема, вона стверджує, що індекс графа є найбільшим власним значенням матриці суміжності, а додатній власний вектор, що відповідає цьому значенню, може бути використаний для знаходження оптимального розташування вершин у графі.

2.3 Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності

Введемо деякі означення для подальшої роботи.

Означення 14: Лінійний підграф графа G — підграф, компонентами зв'язності якого є тільки ребра та цикли. Позначимо через L_k , де k - кількість вершин.

Означення 15: Каркасний підграф графа G — лінійний підграф, що містить усі вершини вихідного графа.

Позначення, які будуть використовуватись у теоремах Харарі та Захса:

– $p(L_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа L_k , що мають парну кількість вершин.

– $r(L_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа L_k .

– $c(L_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа L_k , що є циклами.

– $w(L_k)$ — вага L_k , яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності.

Якщо компонента зв'язності є ребром (i, j) , то його вага дорівнює w_{ij}^2 .

У компонент зв'язності, що є циклом, вага дорівнює добутку значень w_{ij} по всім його ребрах (i, j) :

$$w_{\text{цикл}} = \prod_{(i,j) \in \text{цикл}} w_{ij}$$

Теорема 2 (Харарі) : Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа G можна порахувати за такою формулою:

$$\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{L_n\}} (-1)^{p(L_n)} 2^{c(L_n)} w(L_n)$$

Теорема 3 (Захса) : Якщо $P_{\mathbf{G}}(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{n-k} = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n$, — характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G, w)$, то

$$(1) c_1 = 0;$$

$$(2) c_2 = - \sum_{e \in E(G)} w(e)^2$$

$$(3) c_k = \sum_{\{L_k\}} (-1)^{r(L_k)} 2^{c(L_k)} w(L_k) \text{ для } k = 1, \dots, n.$$

Теорема 4 [5]: Нехай v — вершина графа G , через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v . Тоді

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - \sum_{u \sim v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda).$$

Наслідок 1 (Розклад за висячою вершиною) [5] : Якщо v — вершина графа G та u —вершина суміжна з v , то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - w(uv)^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda)$$

2.4 Знаходження характеристичного полінома

Знайдемо характеристичний поліном для графа G_1 , застосовуючи теорему Харарі та Захса.

Приклад 1:

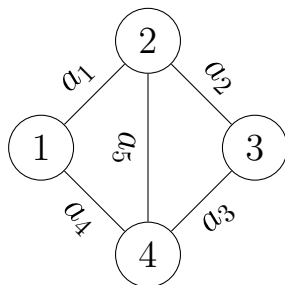


Рис. 3: G_1 - граф

Випишемо всі лінійні каркасні підграфи графа G_1 .

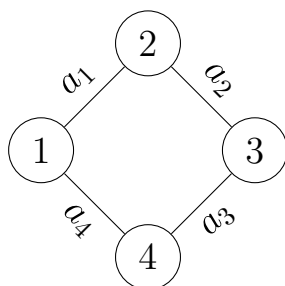


Рис. 4: H_1^4

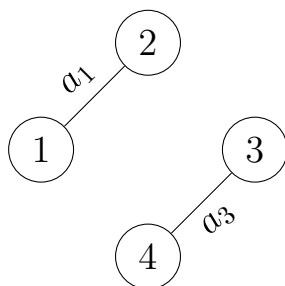


Рис. 5: H_2^4

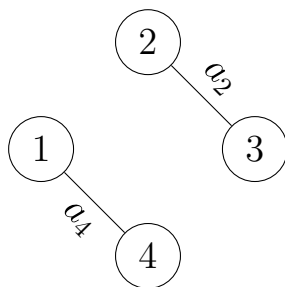


Рис. 6: H_3^4

Отримали три каркасні підграфи. Обчислимо $p(H_k)$.

$$p(H_1^4) = 1$$

$$p(H_2^4) = p(H_3^4) = 2$$

Обчислимо $c(H_k)$.

$$c(H_1^4) = 1$$

$$c(H_2^4) = c(H_3^4) = 2$$

Використовуємо формулу $\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n)$

$$\det A(\mathbf{G}) = (-1)^1 2^1 a_1 a_2 a_3 a_4 + (-1)^2 2^0 a_1^2 a_3^2 + (-1)^2 2^0 a_2^2 a_4^2$$

За теоремою Захса:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = -\sum_{e \in E(G)} w(e)^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$$

$$c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k) \text{ для } k = 1, \dots, n.$$

Випишемо всі лінійні підграфи, кількість вершин у яких дорівнює 3 та обчислимо c_3 .

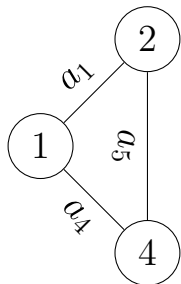


Рис. 7: H_1^3

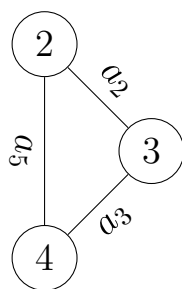


Рис. 8: H_2^3

Маємо два лінійні підграфи, де $H_2^3 = H_1^3$

$$r(H_2^3) = r(H_1^3) = 1$$

$$c(H_2^3) = c(H_1^3) = 1$$

$$c_3 = -2(a_1a_4a_5 + a_5a_3a_2)$$

$$c_4 = \det A(\mathbf{G})$$

Отже, отримуємо

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^4 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda^2 - 2(a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5)\lambda + a_1^2a_3^2 + a_2^2a_4^2 - 2a_1a_2a_3a_4$$

Тепер знайдемо характеристичні многочлени породжених підграфів.

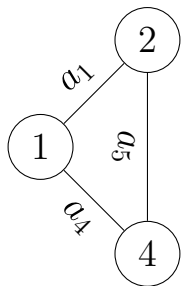


Рис. 9: H_1^3

$$P_{H_1^3}(\lambda) = \lambda^3 - (a_1^2 + a_4^2 + a_5^2)\lambda - 2a_1a_4a_5$$

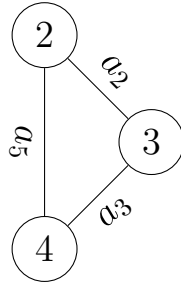


Рис. 10: H_2^3

$$P_{\mathbf{H}_2^3}(\lambda) = \lambda^3 - (a_2^2 + a_3^2 + a_5^2)\lambda - 2a_2a_3a_5$$

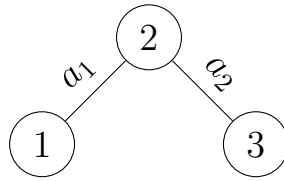


Рис. 11: H_1^2

$$P_{\mathbf{H}_1^2}(\lambda) = \lambda^3 - (a_1^2 + a_2^2)\lambda$$

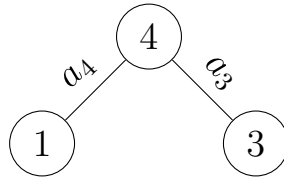


Рис. 12: H_2^2

$$P_{\mathbf{H}_2^2}(\lambda) = \lambda^3 - (a_3^2 + a_4^2)\lambda$$

3 Обернені спектральні задачі на зважених графах

Відновлююче спектральне число будемо позначати $Srn(G)$. Введемо деякі означення.

Означення 16: Породжений або індукований підграф графа G — підграф, утворений підмножиною вершин графа G і усіма ребрами, що з'єднують ці вершини.

Означення 17: Підспектр графа G — спектр підграфа.

Означення 18: Відновлююче спектральне число $Srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів породжених підграфів, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа.

Нижня границя $Srn(G)$ дорівнює 1, тобто спектр вихідного графа відновлює свої ж ваги. Єдиним прикладом такого графа є A_2 , тобто ребро, спектр якого дорівнює $\sigma(A_2) = \{-w, w\}$ і однозначно відновлює вагу на ребрі. Отже, для довільного графа відмінного від A_2 : $Srn(G) \geq 2$.

Верхня границя для довільного графа G : $Srn(G)$ дорівнює n , бо будь-який зважений граф можна відновити знаючи спектри підграфів на двох вершинах, тобто ребрах.

Тобто $1 \leq Srn(G) \leq n$.

Теорема 5 (оцінка Srn для дерев) :

Нехай $G = (G, w)$ і граф G — дерево, тоді $Srn(G) \leq cv(G)$ та для відновлення вагової функції w достатньо знати спектри таких підграфів: G та всіх підграфів вигляду $G - v$, де v пробігає множину $CV(G)$.

Лема 1:[5] Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для дерев.

Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y . Граф Γ — об'єднання графів F , H та ребра, що з'єднує вершини z та y . Тоді за спектрами Γ та всіх підграфів виду $\Gamma - v$, де v пробігає $CV(H)$ — множина висячих вершин відмінних від кореня, можна відновити ваги на ребрах графа H , вагу на ребрі (z, y) , а також P_F, P_{F-z} .

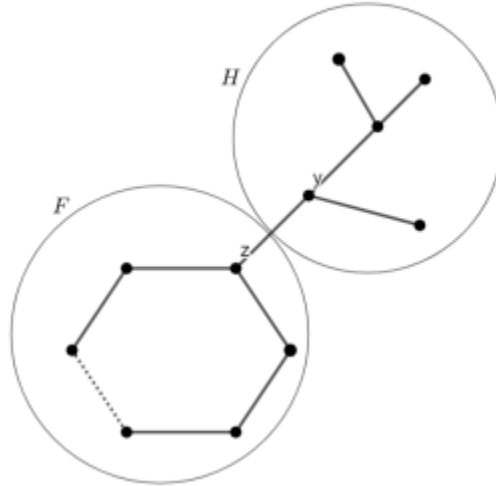


Рис. 13: граф Γ

Твердження 1. [5]

Для будь-якого $n \geq 3$ можна відновити зважений граф \mathbf{A}_n за спектром всього графа $\sigma(\mathbf{A}_n)$ і підспектром $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.

Твердження 2 [5] :

Для відновлення \mathbf{C}_n , $n \geq 5$ достатньо таких трьох підспектрів: $\sigma(\mathbf{C}_n - 2)$, $\sigma(\mathbf{C}_n - 2, 3)$, $\sigma(\mathbf{C}_n - 5, \dots, n)$.

4 Оцінка відновлюючого спектрального числа для графа діаманта $\mathbf{K}_4 - \mathbf{e}$

Твердження 3 : За спектрами \mathbf{H}_1^3 та \mathbf{H}_2^3 і будь-якими трьома породженими підграфами на двох вершинах, які в об'єднанні не є H_1^3 та H_2^3 відновлюється вагова функція графа $\mathbf{K}_4 - \mathbf{e}$

Доведення : маємо графи H_1^3, H_2^3 та підграфи H_1^1, H_1^2, H_1^3

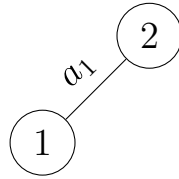


Рис. 14: H_1^1

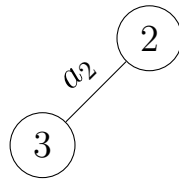


Рис. 15: H_1^2

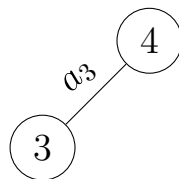


Рис. 16: H_1^3

Тоді відомі значення алгебраїчних виразів від ваг графу $\mathbf{K}_4 - \mathbf{e}$, записані в

лівих частинах рівняння наступної системи:

$$\begin{cases} a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = k_1 \\ a_1 a_4 a_5 = k_2 \\ a_2^2 + a_3^2 + a_5^2 = k_3 \\ a_2 a_3 a_5 = k_4 \\ a_1 = k_5 \\ a_2 = k_6 \\ a_3 = k_7. \end{cases} \quad (1)$$

Спочатку знаходимо a_5 через рівність $a_2 a_3 a_5 = k_4$, а потім відновлюємо a_4 через $a_1 a_4 a_5 = k_2$.

Такими чином, для ребер $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_5\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_3, a_5\}$, $\{a_3, a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4, a_5\}$, $\{a_4, a_2, a_5\}$ аналогічний розв'язок.

Твердження 4: Вагову функцію графа $\mathbf{K}_4 - \mathbf{e}$ можемо відновити за спектрами графа на трьох вершинах H_1^3 та двох графів на двох вершинах H_1^1 та H_2^1 .

Доведення: маємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = k_1 \\ a_1 a_4 a_5 + a_2 a_3 a_5 = k_2 \\ a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2 - 2a_1 a_2 a_3 a_4 = k_3 \\ a_1^2 + a_4^2 + a_5^2 = k_4 \\ a_1 a_4 a_5 = k_5 \\ a_1 = k_6 \\ a_2 = k_7 \end{cases} \quad (2)$$

За допомогою цієї системи рівнянь спочатку знаходимо a_3 , потім a_5 і a_4 .

5 Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біциклічного графа.

Для знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біциклічного графа введемо наступні означення і теореми.

Означення 19: Граф-кактус — це зв'язний граф, в якому будь-які два прості цикли мають не більше, ніж одну спільну вершину. Еквівалентно, будь-яке ребро в такому графі належить максимум одному простому циклу.

Означення 20: Біциклічний граф - це граф-кактус, циклічний ранг якого дорівнює 2 (тобто містить рівно два простих цикли).

Теорема 6 [5]: Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y . Граф G — об'єднання графів F , H та ребра, що з'єднує вершини z та y .

Тоді за спектрами \mathbf{G} та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$ — множина висячих вершин, можна відновити ваги на ребрах графа \mathbf{H} , вагу на ребрі (z, y) , а також $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.

Теорема 7: Нехай $G = (G, w)$ і граф G — біциклічний, тоді $Srn(G) \leq cv(G) + 6$

Доведення:

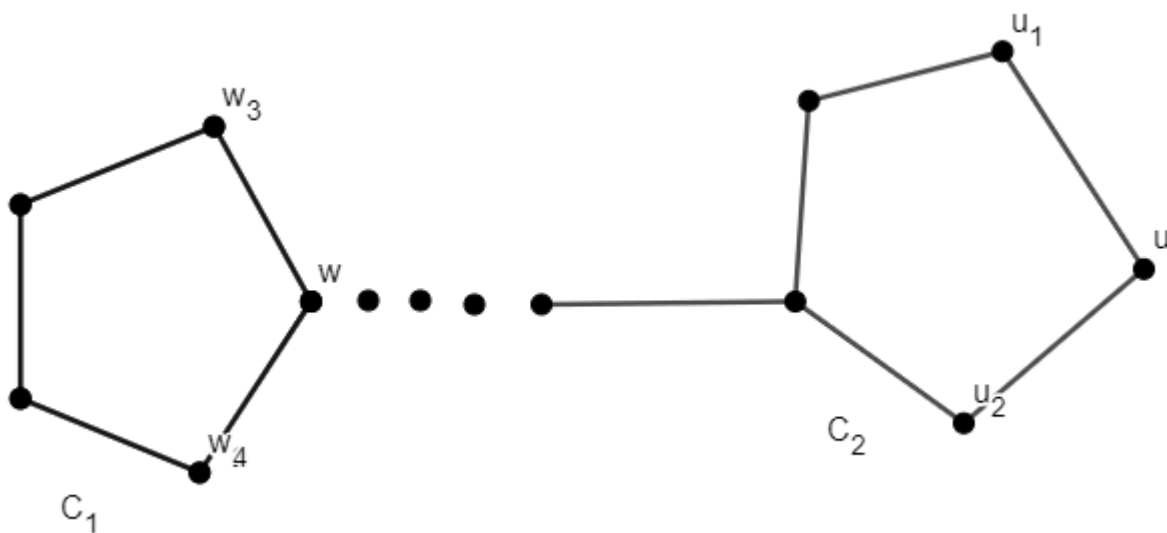


Рис. 17: граф G до бази індукції $n=0$

База індукції : $n = 0$

Розглянемо граф G (див. рисунок 17) без вершин u_2 та w_4 , тобто ланцюг. За допомогою Твердження 1 [3] $\sigma(G-w_4-u_2)\sigma(G-w_4-u_2-u_1)$ відновлюємо вагову функцію графа G без вершин u_2 та w_4 . Тоді нам достатньо додати спектри $\sigma(G), \sigma(w_4w), \sigma(u_1u), \sigma(u_2u)$.

Тоді $srn(G) \leq cv(G) + 6$

База індукції: $n = 1$ (не втрачаючи загальності будемо вважати, що дерево прикріплено до C_2) Позначимо цикли графа G через C_1 та C_2 . Розглянемо дерева, які прикріплені до вершин циклів C_1, C_2 або ланцюга, який їх з'єднує. Позначимо їх через H_1, H_2, \dots, H_n . Будемо доводити методом математичної індукції за n .

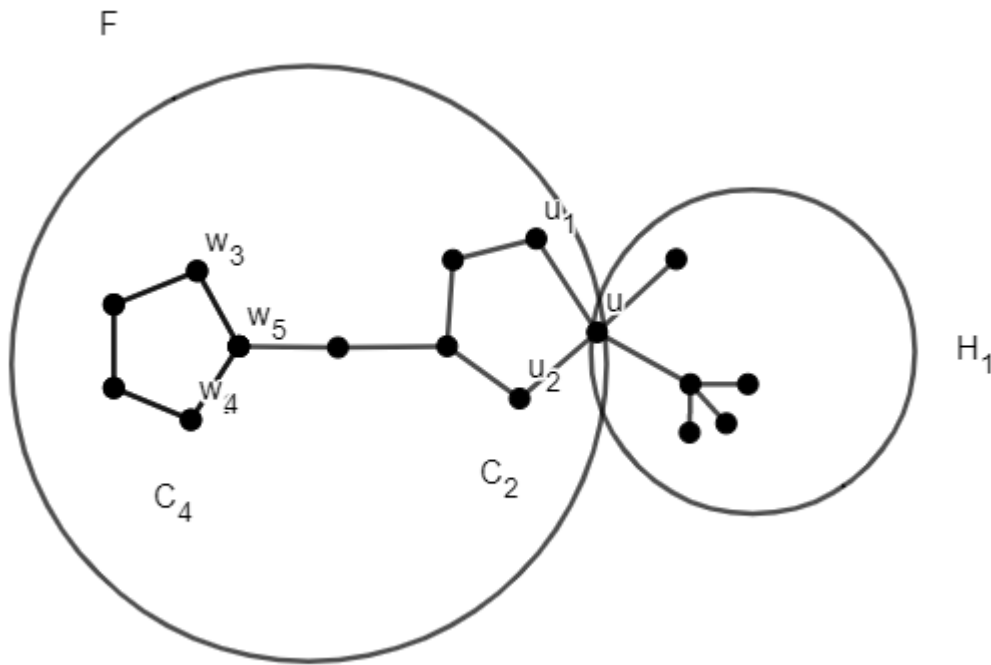


Рис. 18: граф G до бази індукції $n=1$, випадок 1

Позначимо вершину циклу C_2 , до якої прикріплено дерево H_1 через u .

За теоремою 6, знаючи спектри графів \mathbf{G} та $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множини $cv(H_1)$, можна відновити ваги графу $H_1, \sigma(\mathbf{F}), \sigma(\mathbf{F} - u)$.

Позначимо суміжні у циклі C_2 вершини до вершини u через u_1 та u_2 . Граф $\mathbf{F} = \mathbf{G} - H_1 \setminus u$. За теоремою 6, застосованою до $\mathbf{F} - u$, за $\sigma(\mathbf{F} - u), \sigma(\mathbf{F} - u - u_1)$,

$\sigma(\mathbf{F} - u - u_2)$, відновлюються всі ваги на ланцюгу, що з'єднує цикли, а також всі ваги циклу C_2 , окрім ваг на ребрах uu_1, uu_2 , а також $\sigma(C_1), \sigma(C_1 - w)$.

За спектрами $\sigma(C_1), \sigma(C_1 - w), \sigma(C_2 - w - w_1)$ та $\sigma(w_1w_2)$ можна відновити ваги на C_1 .

Отже, ми використали $cv(G) + 1 + 2 + 2 + 1 = cv(G) + 6$

Розглянемо другий випадок, коли дерево прикріплено до ланцюга, що з'єднує цикли. (див. рисунок 19)

За теоремою 6, знаючи спектри графів \mathbf{G} та $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множину $cv(H_1)$, можна відновити ваги графу $H_1, \sigma(\mathbf{F}), \sigma(\mathbf{F} - u), \mathbf{F} = \mathbf{G} - H_1 \setminus u$.

І тоді аналогічно до випадку з біциклічного графа без дерев 5 ми отримуємо, що $srn(G) \leq cv(G) + 6$

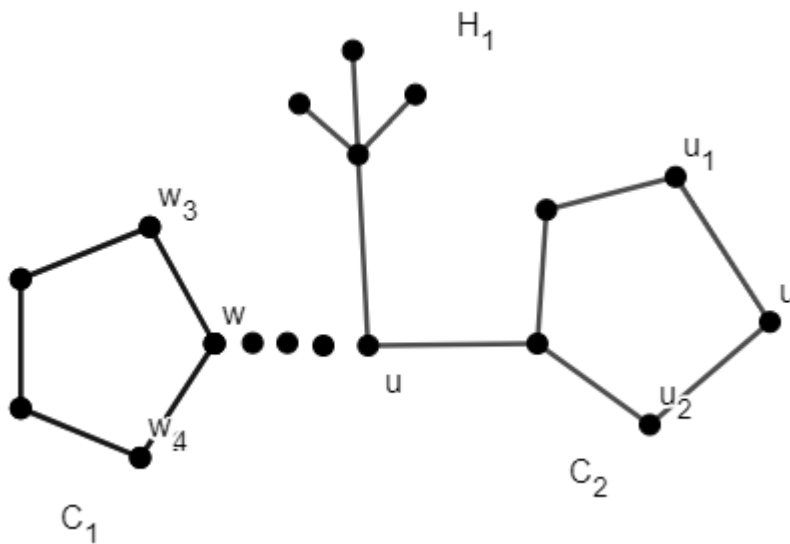


Рис. 19: граф G до бази індукції $n=1$, випадок 2

Індукційний перехід: $n - 1 \rightarrow n$

Розглянемо дерево H_n , прикріплене у вершині u . За теоремою, за спектрами графів \mathbf{G} та $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множину $cv(H_n)$, можна відновити ваги графа H_n , а також спектр графа $\mathbf{G} - H_n \setminus u = G_1$.

Тоді $srn(G) \leq srn(G_1) + cv(H_n) \leq cv(G_1) + 6 + cv(H_n) = cv(G) + 6$

Доведення завершено.

6 Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для графів-кактусів

Теорема 8: Нехай $G = (G, w)$ і граф G — граф-кактус 5, тоді $Srn(G) \leq cv(G) + 3c$, де c - кількість простих циклів у графі-кактусі. За винятком C_4 .

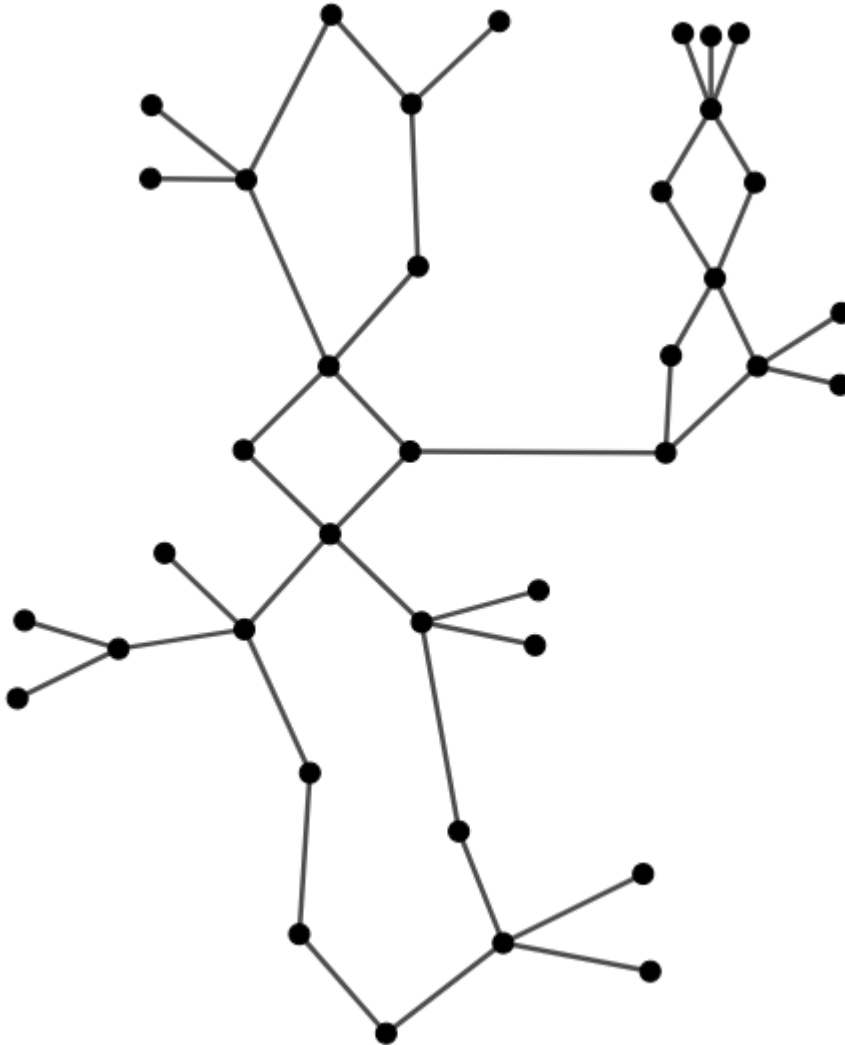


Рис. 20: G - граф-кактус

Доведення: Доводимо за подвійної індукцією по n, t , де n - кількість простих циклів, t - кількість дерев, що прикріплені до вершин циклів і ланцюгів, що з'єднують цикли.

База індукції: t - будь-яке, $n = 0, 1, 2$ вже доведено 3

Індукційний перехід: $n - 1 \rightarrow n$

Розглядаємо граф-кактус \mathbf{G} без висячих вершин з n простими циклами. У цьому випадку беремо C_1 і розглядаємо вершину u , з якої виходить ланцюг, що з'єднує даний цикл з C_2 . Розглянемо суміжну до неї вершину w в цьому циклі. Далі розглядаємо $\mathbf{G} - w$ - граф-кактус з $n - 1$ циклом. За припущенням індукції $Srn(\mathbf{G} - w) \leq 1 + 3(n-1)$

Якщо відомі $\sigma(\mathbf{u}\mathbf{w})$, $\sigma(\mathbf{G})$, то тоді можна відновити всі ваги на \mathbf{G} .

Отже, $Srn(G) \leq Srn(G - w) + 2 \leq 1 + 3(n - 1) + 2 = 3n$

Для загального випадку графа-кактуса з n циклами доводимо індукцією по кількості прикріплених дерев до вершин циклів і ланцюгів, що з'єднують цикли, аналогічно до доведення для біциклічного графу.

Доведення завершено.

7 Висновки

У цій дипломній роботі було проведено дослідження спектрального відновлюючого числа для зважених графів. Було висвітлено теоретичні аспекти цього питання, а саме поняття спектрального відновлюючого числа, його властивості та застосування.

У другому розділі були розглянуті основні поняття реберно-зважених графів 2. У третьому розділі обернені спектральні задачі на зважених графах 3. У четвертому розділі 4 була проведена оцінка відновлюючого спектрального числа для графа діаманта $K_4 - e$. У п'ятому розглянуто знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для біцкилічного графа 5.

Для проведення дослідження було використано різні методи та алгоритми, які дозволили визначити спектральне відновлююче число для зважених графів різного типу та розміру.

Отримані результати свідчать про важливість спектрального відновлюючого числа для зважених графів та його можливих застосувань у різних галузях, таких як мережеве проектування, телекомунікації та інформаційна безпека. Також було виявлено, що розмір та складність графа впливають на значення спектрального відновлюючого числа, що може бути корисно при аналізі та проектуванні різних мереж та систем.

Отже, дослідження спектрального відновлюючого числа для зважених графів є важливим та актуальним напрямом дослідження у теорії графів та мережевої теорії, який має потенціал для подальшого розвитку та застосування у практичних задачах.

8 Література

1. *H. Sachs*, Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964), 119–134
2. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, Graphs and Combinatorics, volume 406 of Lecture Notes in Mathematics, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
3. *Тимошкевич Лариса Миколаївна*, Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера.- Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 44 с.
4. *Chung F.R.K.*, Spectral Graph Theory, AMS, Providence, RI, 1994
5. *Пилупіва О. В., Тимошкевич Л. М.*, Обернені спектральні задачі для зважених графів , Могилянський математичний журнал 2022 , том 5 – с.26 - 32
6. *Bondy J.A., Murty U.S.R.*, Graph Theory with Applications , American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1976
7. *Самойленко Ю., Тимошкевич Л.*, Про спектральну теорію графів Кокстера, “У світі математики” 2009, т.15, вип.3, стор.14-24.
8. *Москалева Ю., Самойленко Ю.*, Введение в спектральную теорию графов, “Центр учебной литературы”, Киев, 2007.
9. *Kinkar Ch. Das, Vapat R. B.*, A sharp upper bound on spectral radius of weighted graphs, Discrete Mathematics, 308 (2008), 3180-3184
10. *Harary F.*, The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev., 4 (1962), 202-210

11. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, *Graphs and Combinatorics*, volume 406 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
12. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.*, Спектры графов, теория и применение Киев, “Наукова думка”, 1984.
13. *Харари Ф.*, Теорія графів, “Мир”, 1973.