АНІГІЛЯТОРИ В ГРАФАХ

Юр-Любомисл Дехтяр Сергій Козеренко

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

22 травня 2023 р.

Анігілятори. Основні означення

Означення

Метричним відрізком $[a, b]$ у графі G між вершинами $a, b \in V(G)$ називається множина вершин $c \in V(G)$ таких, що:

$$d(a, c) + d(c, b) = d(a, b).$$

Означення

Анігілятором $\lceil a, b \rceil$ графа G, де $a, b \in V(G)$, називається множина $\{x \in V(G) \mid b \in [a, x]\}$ [Nie88a].

Анігілятори. Приклад

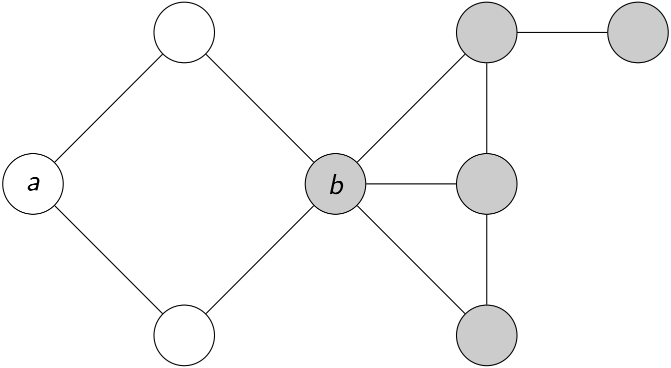

Рис.: Вершини анігілятора $\lceil a, b \rceil$ позначено чорним кольором

Анігілятори. Основні означення

Означення

Анігілятор $\lceil a, b \rceil$ у графі G називається простим, якщо $\lceil a, b \rceil \sqcup \lceil b, a \rceil = V(G)$.

Якщо анігілятор $\lceil a, b \rceil$ - простий, то $ab \in E(G)$.

Означення

Множина A вершин графа G називається опуклою, якщо $\forall a, b \in A : \ \lceil a, b \rceil \subset A$. A називається простою, якщо множина $V(G) \backslash A$ - також проста.

Анігілятори. Основні означення

Означення

Граф G називається графом перетинів простих анігіляторів, якщо довільний анігілятор графа G, опріч тривіальних анігіляторів $\lceil a, a \rceil$, $a \in V(G)$, можна представити як перетин простих.

Означення

Граф G називається графом перетинів простих опуклих множин, якщо усі опуклі множини графа G є перетином простих.

Анігілятори. Основні факти

Твердження

Якщо граф G є двочастковим, то він є графом перетинів простих анігіляторів [Nie88a].

Твердження

Якщо граф G є графом перетинів простих опуклих множин тоді і лише тоді, коли він є графом перетинів простих анігіляторів [Nie88a].

Анігілятори. Основні факти

Припущення

Граф G є графом перетинів простих анігіляторів тоді і лише тоді, коли G - двочастковий.

Твердження

Якщо для графа G виконується, що $|V(G)| \leq 10$, то G є графом перетинів простих анігіляторів тоді і лише тоді, коли він двочастковий.

Анігілятори. Основні факти

Алгоритм

Для перевірки гіпотези було розроблено алгоритм перевірки на те, чи є заданий граф графом перетинів простих анігіляторів. Складність роботи алгоритму - $\mathcal{O}(v^3 e)$, де v - кількість вершин графа, а e - кількість його ребер. Се суттєве покращення щодо наївного алгоритму, який просто перевіряє за означенням, адже його складність була б експоненційна.

Реалізацію алгоритму можна подивитися тут.

Прості опуклі множини

Твердження

Графи, у яких кожне ребро є протою опуклою множиною, це повні графи K_n, а також ланцюг P_3, та цикли C_4 й C_5.

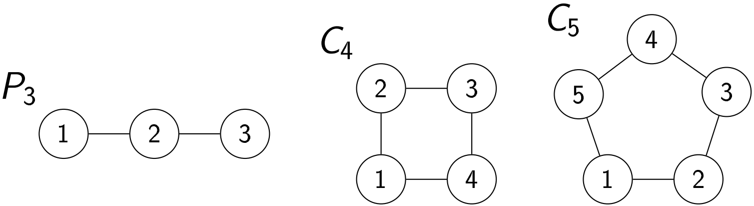

Рис.: Неповні графи, для яких кожне ребро є простим опуклим

Прості опуклі множини

Теорема

Графи бльоків є графами перетинів простих опуклих множин [Nie88b, Nie89].

Теорема

Медіянні графи є графами перетинів простих опуклих множин [BH83].

Для обох теорем було знайдено оригінальні доводи, що принципово відрізняються від авторських.

Означення

Лінійне відображення

Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається **лінійним**, якщо $\forall a, b \in V(G): \; f([a, b]_G) \subset [f(a), f(b)]_H$.

$$\updownarrow$$

Означення

Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається **анігіляторно-лінійним**, якщо
$\forall a, b \in V(G): \; f(\lceil a, b \rceil_G) \subset \lceil f(a), f(b) \rceil_H$.

Лінійні відображення

Твердження

Най G, H - зв'язні графи, а $f : V(G) \to V(H)$ - відображення між ними. Тоді f - лінійне $\implies$ прообрази зв'язних множин відносно f - зв'язні [Nic04].

Теорема

Най G - зв'язний граф. Тоді G - граф бльоків $\iff$ $(\forall H,\ f : V(G) \to V(H)$: прообрази зв'язних множин відносно f - зв'язні $\implies$ f - лінійне$)$.

Анігіляторні відображення

Означення

Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається неперервним, якщо
$\forall a, b \in V(G): \;\; f([a, b]_G) \supset [f(a), f(b)]_H$.

Означення

Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між двома зв'язними графами G та H називається анігіляторно-неперервним, якщо
$\forall a, b \in V(G): \;\; f(\lceil a, b \rceil_G) \supset \lceil f(a), f(b) \rceil_H$.

На відміну від лінійности, неперервність не еквівалентна анігіляторній неперервності!

Анігіляторні відображення

Твердження

Най $f : V(G) \to V(H)$ - бієкція між зв'язними графами G та H. Тоді f - неперервна тоді і лише тоді, коли f - анігіляторно-неперервна.

Зокрема, звідси випливає, що бієктивні анігіляторно-неперервні відображення є гомоморфізмами - себто відображеннями, що зберігають ребра - а також вкладеннями.

Анігіляторні відображення. Приклад

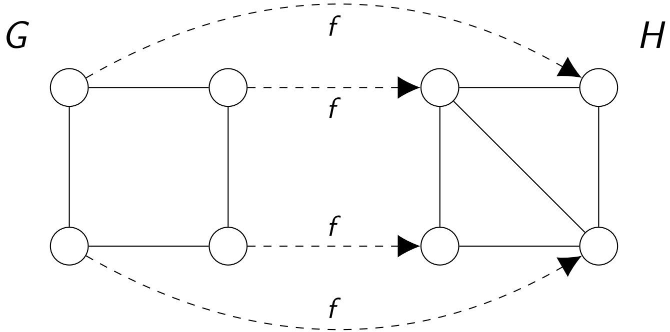

Рис.: Вкладення графа G у граф H є неперервним, а отже й анігіляторно-неперервним, відображенням

Анігіляторні відображення

Теорема

Най G - дерево, а $H \neq K_1$ - зв'язний граф. Тоді будь-яке анігіляторно-неперервне відображення $f : V(G) \to V(H)$ є ін'єктивним.

Наслідок

Най G, H - дерева, а $f : V(G) \to V(H)$ - анігіляторно-неперервне відображення між ними. Тоді або $H \simeq K_1$, або f - ізоморфізм.

Анігіляторні відображення

Твердження

Для кожного зв'язного графа G існує зв'язний граф G' та анігіляторно-неперервне відображення $f : V(G') \to V(G)$, яке не є ін'єктивним.

Анігіляторні відображення. Приклад

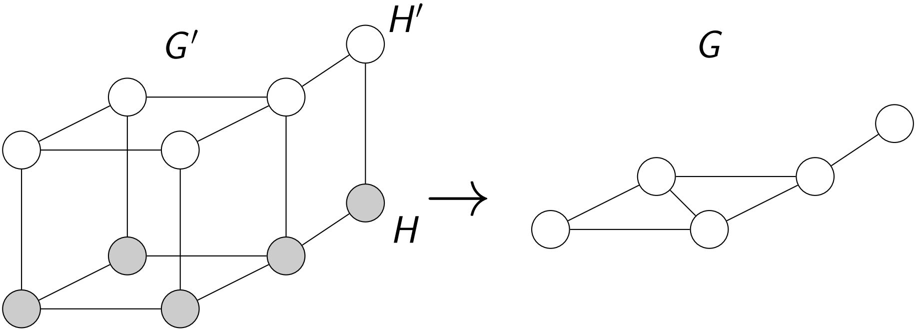

Рис.: Основи циліндра неперервно вкладаються у граф G

Анігіляторні відображення

Припущення

Кожне анігіляторно-неперервне відображення є неперервним.

Література

H.-J. Bandelt and J. Hedlikova, *Median algebras*, Discrete Mathematics **24** (1983), 1–30.

Bogdan Nica, *Cubulating spaces with walls*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 297–309.

J. Nieminen, *Annihilators in graphs*, Results in Mathematics **13** (1988), no. 1–2, 140–146.

______, *Join space graphs*, Journal of Geometry **33** (1988), no. 1-2, 99–103.

______, *Chordal graphs and join spaces*, Journal of Geometry **34** (1989), no. 1-2, 146–151.

Дякую за увагу!