

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Факультет інформатики
Кафедра інформатики

ПОБУДОВА КУБІЧНОЇ КРИВОЇ БЕЗЪС ЗА 4 ТОЧКАМИ
Текстова частина до курсової роботи
за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології»

Керівник курсової роботи
к.ф.-м.н Дяченко С.М.
(прізвище та ініціали)

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконав студент Молоденков К.П.
(прізвище та ініціали)

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. Кафедри математики,

_____ Б.В.Олійник
(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

Студенту Молоденкову Костянтину Петровичу факультету інформатики 4 курсу
ТЕМА Побудова кубічної кривої Безьє за 4 точками

Вихідні дані:

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Календарний план

Вступ

Частина 1: Інформаційна частина

Частина 2: Основна частина

Частина 3: Практична частина

Висновки

Список використаної літератури

Додатки

Дата видачі “ _____ ” _____ 2019 р. Керівник _____

(підпис)

Завдання отримала _____

(підпис)

Тема: Побудова кубічної кривої Безьє за 4 точками

Календарний план виконання роботи:

| № | Назва етапу | Термін виконання | Примітка |
|-----|---|------------------|----------|
| 1. | Отримання теми курсової роботи | 08.10.2019 | |
| 2. | Пошук тематичної літератури | 05.11.2019 | |
| 3. | Ознайомлення з літературою | 05.12.2019 | |
| 4. | Визначення частин курсової роботи | 20.12.2019 | |
| 5. | Написання текстової частини | 20.03.2020 | |
| 6. | Виконання практичної частини | 03.04.2020 | |
| 7. | Подання першої версії записки науковому керівнику | 09.04.2020 | |
| 8. | Перегляд змісту роботи керівником | 09.04.2020 | |
| 10. | Створення презентації | 09. 04.2020 | |
| 11. | Захист роботи | 17.04.2020 | |

Студент Молоденков К.П.

Керівник Дяченко С.М.

“ ”

Зміст

| | |
|---|-----------|
| ЧАСТИНА 1 Інформаційна частина | 6 |
| 1.1 Визначення кривої Безьє | 6 |
| ЧАСТИНА 2. Основна частина..... | 8 |
| 2.1 Постановка задачі..... | 8 |
| 2.2 Розв'язання | 8 |
| ЧАСТИНА 3 Практична частина..... | 19 |
| Додаток А..... | 20 |
| Список використаної літератури | 20 |

ВСТУП

Дана курсова робота присвячена дослідженню побудови кубічних кривих Безьє.

Криві Безьє так популярні через те, що їх математичний опис дуже компактний, інтуїтивний та зрозумілий. Крім того, афінні перетворення кривої (перенесення, масштабування, обертання та ін.) також можуть бути виконані через застосування відповідних перетворень до опорних точок.

Тему : ПОБУДОВА КУБІЧНОЇ КРИВОЇ БЕЗЬЄ ЗА 4 ТОЧКАМИ

Мета: Побудувати криву за 4 точками

Об'єкт дослідження: кубічні параметричні криві

Предмет дослідження: криві Безьє

Для досягнення зазначеної мети розглянемо наступні завдання :

1. Що таке кубічна крива Безьє
2. Постановка задачі та її розв'язання
3. Програма, яка ілюструє результат

ЧАСТИНА 1 Інформаційна частина

1.1 Визначення кривої Безьє

Крива Безьє – це параметрична крива вигляду :

$$V(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t)P_i, t \in [0, 1], \text{ де}$$

P_i – опорні вершини.

$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ – поліном Бернштейна, вони є базисними функціями кривої Безьє.

Види кривих Безьє:

Лінійна крива Безьє:

$$V(t) = (1-t)P_0 + tP_1.$$

Квадратична крива Безьє:

$$V(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2.$$

Кубічна крива Безьє:

$$V(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3.$$

Властивості:

- а) безперервність заповнення сегмента між початковою та кінцевою точками;
- б) крива завжди розташовується всередині фігури, утвореної лініями, що з'єднують контрольні точки;
- в) при наявності лише двох контрольних точок сегмент являє собою пряму лінію;
- г) пряма лінія утворюється лише тоді, коли контрольні точки розташовані на одній прямій;
- д) крива Безьє симетрична, тобто обмін місцями між початковою та кінцевою точками (зміна напрямку траєкторії) не впливає на форму кривої;

- е) масштабування та зміна пропорцій кривої Безьє не порушує її стабільності, оскільки вона з математичної точки зору «афінно інваріантна»;
- ж) зміна координат хоча б однієї з точок веде до зміни форми всієї кривої Безьє;
- з) будь який частковий відрізок кривої Безьє також є кривою Безьє;
- и) степінь кривої завжди на одиницю менший від кількості контрольних точок. Наприклад, при трьох контрольних точках форма кривої — парабола;
- і) коло не може бути описане параметричним рівнянням кривої Безьє;
- ї) неможливо створити паралельні криві Безьє, за винятком тривіальних випадків (прямі лінії та однакові криві), хоча існують алгоритми, що будують наближену паралельну криву Безьє з прийнятною для практики точністю.

ЧАСТИНА 2. Основна частина

2.1 Постановка задачі

Задано довільні 4-и точки:

$$A_1(a_{1x}; a_{1y}) A_2(a_{2x}; a_{2y}) A_3(a_{3x}; a_{3y}) A_4(a_{4x}; a_{4y})$$

та задано ще 2 вектори напрямку кривої при точках початковій та кінцевій точках:

$$V(v_x; v_y) W(w_x; w_y)$$

За допомогою цих даних побудувати кубічну криву Безьє вигляду:

$$f_{(x,y)} = \begin{cases} x(t) = P_{1x}(1-t)^3 + 3 P_{2x}t(1-t)^2 + 3 P_{3x}(1-t)t^2 + P_{4x}t^3 \\ y(t) = P_{1y}(1-t)^3 + 3 P_{2y}t(1-t)^2 + 3 P_{3y}(1-t)t^2 + P_{4y}t^3 \end{cases}$$
$$t \in [0; 1].$$

2.2 Розв'язання

Крива Безьє базується на чотирьох точках :

$$P_1(P_{1x}, P_{1y}).$$

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}).$$

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}).$$

$$P_4(P_{4x}, P_{4y}).$$

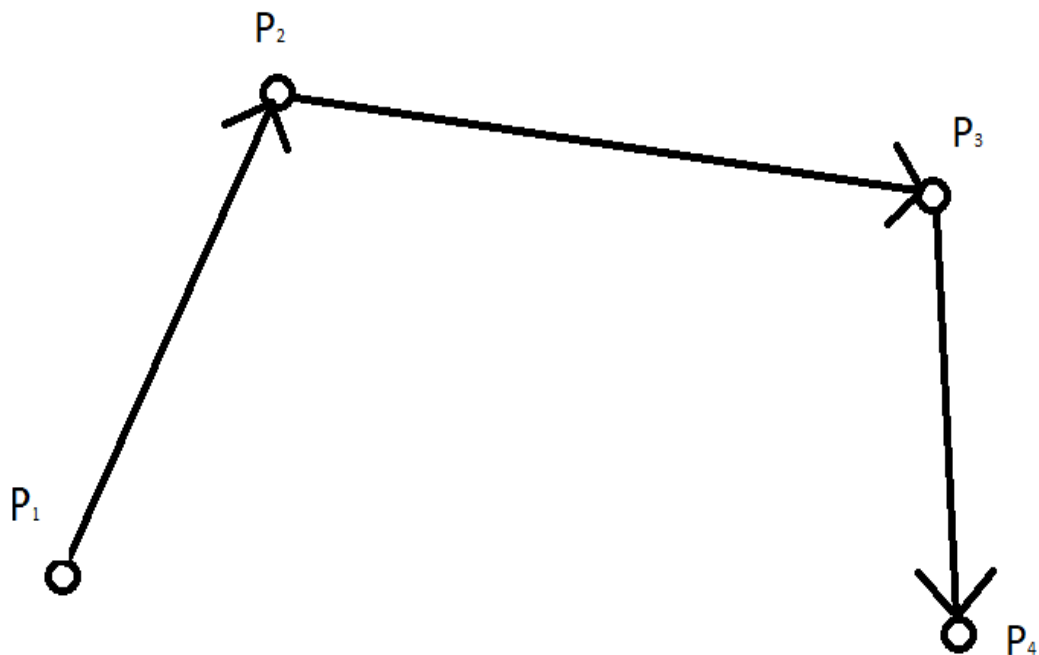


Рисунок 2.1

$$A_1(a_{1x}; a_{1y}) = P_1(P_{1x}, P_{1y}).$$

$$A_4(a_{4x}; a_{4y}) = P_4(P_{4x}, P_{4y}).$$

Тобто задача зводиться до відшукування двох точок:

$$P_2(P_{2x}, P_{2y}).$$

$$P_3(P_{3x}, P_{3y}).$$

В точці A_2

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2x}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_1)t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \\ a_{2y} = a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2y}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_1)t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{cases}$$

В точці A_3

$$\begin{cases} a_{3x} = a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2x}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_2)t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \\ a_{3y} = a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2y}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_2)t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{cases}$$

Виходить 4 рівняння 6 невідомих:

$$t_1, t_2, P_{2x}, P_{2y}, P_{3x}, P_{3y}$$

Отже нам не вистачило даних, візьмемо ще

А саме: вектри напрямку

$$V(v_x; v_y) \quad W(w_x; w_y)$$

Оскільки вектор $V(v_x; v_y)$ направлений в тому напрямку що і $\overrightarrow{P_1 P_2}$

Та $W(w_x; w_y)$ направлений в тому напрямку що і $\overrightarrow{P_3 P_4}$, то

Ці вектори є колінеарні

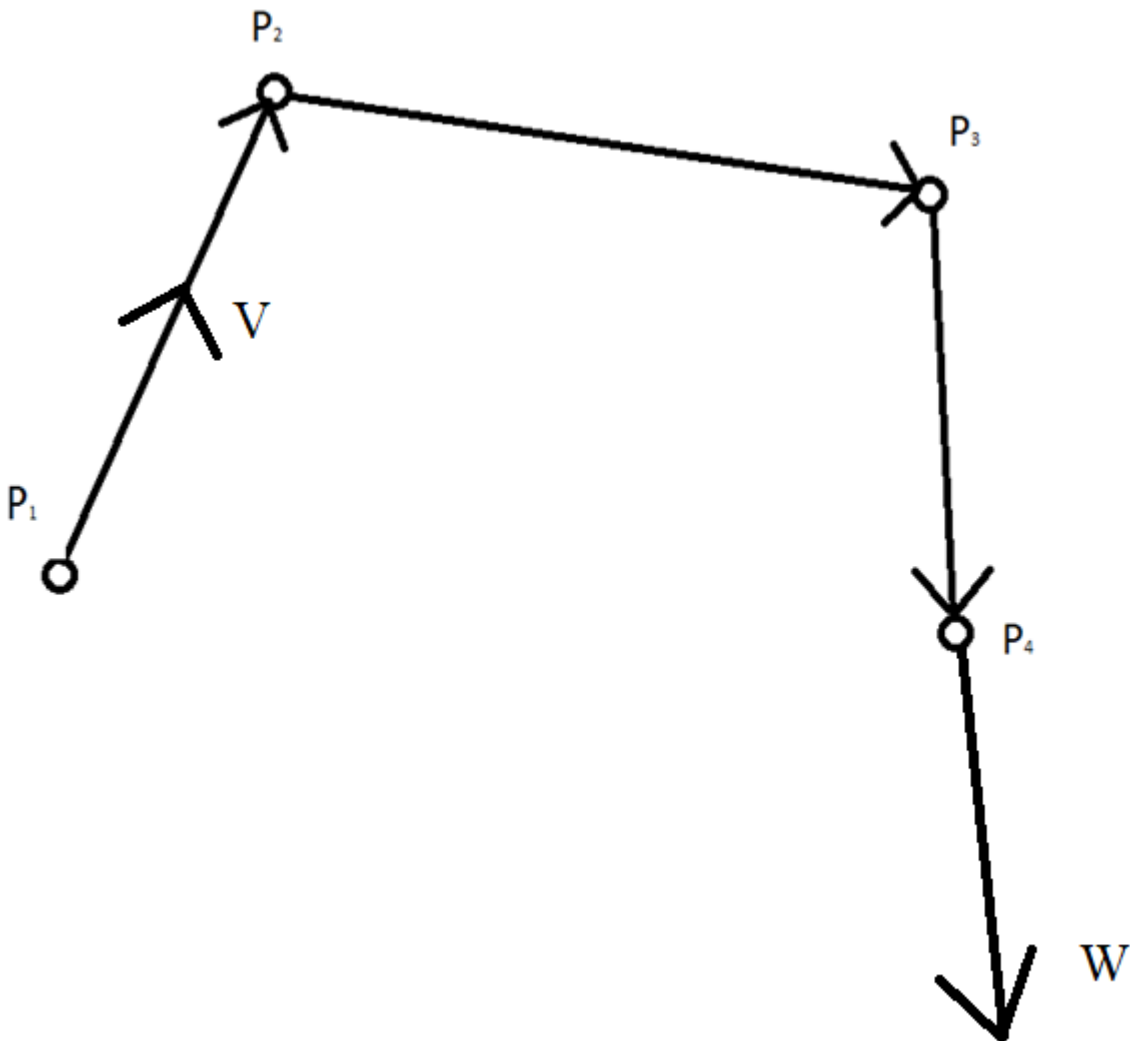


Рисунок 2.2

$$P_2 = P_1 + \alpha * V(v_x; v_y)$$

$$P_3 = P_4 + \beta * W(w_x; w_y)$$

Тепер маємо 8 рівнянь 8 невідомих:

В точці A_2

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2x}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \\ a_{2y} = a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2y}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{cases}$$

В точці A_3

$$\begin{cases} a_{3x} = a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2x}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \\ a_{3y} = a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2y}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{cases}$$

$$P_{2x} = P_{1x} + \alpha * v_x$$

$$P_{2y} = P_{1y} + \alpha * v_y$$

$$P_{3x} = P_{4x} + \beta * w_x$$

$$P_{3y} = P_{4y} + \beta * w_y$$

Підставимо:

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1 - t_1)^2 + \\ \quad + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \\ a_{2y} = a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1 - t_1)^2 + \\ \quad + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3x} = a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1 - t_2)^2 + \\ \quad + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \\ a_{3y} = a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1 - t_2)^2 + \\ \quad + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& t_1^3 (a_{4x} - 3\beta W_x - 3a_{4x} + 3\alpha V_x + 3a_{1x} - a_{1x}) + \\
& + t_1^2 (3\beta W_x + 3a_{4x} - 6\alpha V_x - 6a_{1x} + 3a_{1x}) + \\
& + t_1 (3\alpha V_x + 3a_{1x} + 3a_{1x}) + (a_{1x} - a_{2x}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t_1^3 (-3\beta W_x - 2a_{4x} + 3\alpha V_x + 2a_{1x}) + \\
& + t_1^2 (3\beta W_x + 3a_{4x} - 6\alpha V_x - 3a_{1x}) + \\
& + t_1 (3\alpha V_x + 6a_{1x}) + (a_{1x} - a_{2x}) = 0
\end{aligned}$$

Зробимо заміну:

$$m = -3\beta W_x - 2a_{4x} + 3\alpha V_x + 2a_{1x}$$

$$n = 3\beta W_x + 3a_{4x} - 6\alpha V_x - 3a_{1x}$$

$$p = 3\alpha V_x + 6a_{1x}$$

$$q = a_{1x} - a_{2x}$$

Маємо рівняння:

$$t_1^3 m + t_1^2 n + p t_1 + q = 0$$

Поділимо на m ($m \neq 0$)

$$t_1^3 + t_1^2 \frac{n}{m} + \frac{p}{m} t_1 + \frac{q}{m} = 0$$

Зробимо заміну:

$$\frac{n}{m} = a \quad \frac{p}{m} = b \quad \frac{q}{m} = c$$

Маємо:

$$t_1^3 + t_1^2 a + b t_1 + c = 0$$

Заміна : $t_1 = y - \frac{a}{3}$

$$\left(y - \frac{a}{3}\right) \left(y^2 - \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9} + ay - \frac{a^2}{3} + b\right) + c = 0$$

Розкриємо дужки:

$$y^3 - \frac{ay^2}{3} - \frac{2ay^2}{3} + \frac{2ay^2}{9} + \frac{ay^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{ya^2}{3} - \frac{ya^2}{3} + \frac{a^3}{9} + yb - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Спростимо:

$$y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

Зробимо заміну:

$$\left(-\frac{a^2}{3} + b\right) = k$$

$$\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = l$$

Маємо:

$$y^3 + ky + l = 0$$

За формулою Кардано маємо :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{k^3}{27}}}$$

далі потрібно повернутися до заміни, але ми вже на даному етапі бачимо, що це занадто громісткий вираз, тому ми його пропустимо і зробимо висновок, що даний підхід не раціональний!

Повернемося до системи вигляду:

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2x}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \\ a_{2y} = a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 P_{2y}t_1(1 - t_1)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3x} = a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2x}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3x}(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \\ a_{3y} = a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 P_{2y}t_2(1 - t_2)^2 + 3 P_{3y}(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{cases}$$

$$P_{2x} = P_{1x} + \alpha * v_x$$

$$P_{2y} = P_{1y} + \alpha * v_y$$

$$P_{3x} = P_{4x} + \beta * w_x$$

$$P_{3y} = P_{4y} + \beta * w_y$$

Розв'яжемо систему за допомогою МНК (метод найменших квадратів)

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 (a_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1 - t_1)^2 + \\ \quad + 3 (a_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \\ a_{2y} = a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 (a_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1 - t_1)^2 + \\ \quad + 3 (a_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{3x} = a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 (a_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1 - t_2)^2 + \\ \quad + 3 (a_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \\ a_{3y} = a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 (a_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1 - t_2)^2 + \\ \quad + 3 (a_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{cases}$$

Для цього запишемо функцію фвох змінних :

$$\begin{aligned}
 S(\alpha; \beta) = & \left(a_{2x} - \left(a_{1x}(1-t_1)^3 + 3(P_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1-t_1)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3(P_{4x} + \beta * w_x)(1-t_1)t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \right) \right)^2 + \\
 & + \left(a_{2y} - \left(a_{1y}(1-t_1)^3 + 3(P_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1-t_1)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3(P_{4y} + \beta * w_y)(1-t_1)t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \right) \right)^2 + \\
 & + \left(a_{3x} - \left(a_{1x}(1-t_2)^3 + 3(P_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1-t_2)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3(P_{4x} + \beta * w_x)(1-t_2)t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \right) \right)^2 + \\
 & + \left(a_{3y} - \left(a_{1y}(1-t_2)^3 + 3(P_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1-t_2)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3(P_{4y} + \beta * w_y)(1-t_2)t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \right) \right)^2
 \end{aligned}$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dS}{d\beta} = 0$$

$$\begin{aligned}
0 = & 2 \left(a_{2x} - \left(\begin{array}{l} a_{1x}(1-t_1)^3 + 3(P_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1-t_1)^2 + \\ + 3(P_{4x} + \beta * w_x)(1-t_1)t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \end{array} \right) \right) \\
& (-3t_1(1-t_1)^2)V_x + \\
& + 2 \left(a_{2y} - \left(\begin{array}{l} a_{1y}(1-t_1)^3 + 3(P_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1-t_1)^2 + \\ + 3(P_{4y} + \beta * w_y)(1-t_1)t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{array} \right) \right) \\
& (-3t_1(1-t_1)^2)V_y + \\
& + 2 \left(a_{3x} - \left(\begin{array}{l} a_{1x}(1-t_2)^3 + 3(P_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1-t_2)^2 + \\ + 3(P_{4x} + \beta * w_x)(1-t_2)t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \end{array} \right) \right) \\
& (-3t_{12}(1-t_2)^2)W_x + \\
& + 2 \left(a_{3y} - \left(\begin{array}{l} a_{1y}(1-t_2)^3 + 3(P_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1-t_2)^2 + \\ + 3(P_{4y} + \beta * w_y)(1-t_2)t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{array} \right) \right) \\
& (-3t_2(1-t_2)^2)W_y
\end{aligned}$$

Скорочуємо на 2.

Маємо:

$$\begin{aligned} 0 = & (-3 t_1 (1 - t_1)^2) \left(\right. \\ & \left. \left(a_{2x} - \left(\begin{array}{l} a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1 - t_1)^2 + \\ + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \end{array} \right) \right) V_x + \right. \\ & \left. + \left(a_{2y} - \left(\begin{array}{l} a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1 - t_1)^2 + \\ + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \end{array} \right) \right) V_y \right) + \\ & + (-3 t_2 (1 - t_2)^2) \left(\right. \\ & \left. \left(a_{3x} - \left(\begin{array}{l} a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1 - t_2)^2 + \\ + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \end{array} \right) \right) W_x + \right. \\ & \left. + \left(a_{3y} - \left(\begin{array}{l} a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1 - t_2)^2 + \\ + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \end{array} \right) \right) W_y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0 = (-3 t_1^2 (1 - t_1)) (\\
& \left(a_{2x} - \left(a_{1x}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_1(1 - t_1)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4x}t_1^3 \right) \right) V_x + \\
& + \left(a_{2y} - \left(a_{1y}(1 - t_1)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_1(1 - t_1)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_1) t_1^2 + a_{4y}t_1^3 \right) \right) V_y) + \\
& + (-3 t_2^2 (1 - t_2)) (\\
& \left(a_{3x} - \left(a_{1x}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1x} + \alpha * v_x)t_2(1 - t_2)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 (P_{4x} + \beta * w_x)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4x}t_2^3 \right) \right) W_x + \\
& + \left(a_{3y} - \left(a_{1y}(1 - t_2)^3 + 3 (P_{1y} + \alpha * v_y)t_2(1 - t_2)^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3 (P_{4y} + \beta * w_y)(1 - t_2) t_2^2 + a_{4y}t_2^3 \right) \right) W_y)
\end{aligned}$$

ЧАСТИНА 3 Практична частина

Напишемо невеличку програму для спрощення обрахунків:

Приклад при:

$var t1 = 1/3; var t2 = 2/3;$

$var Vx = 2; var Vy = 1; var Wx = -7.5; var Wy = 75;$

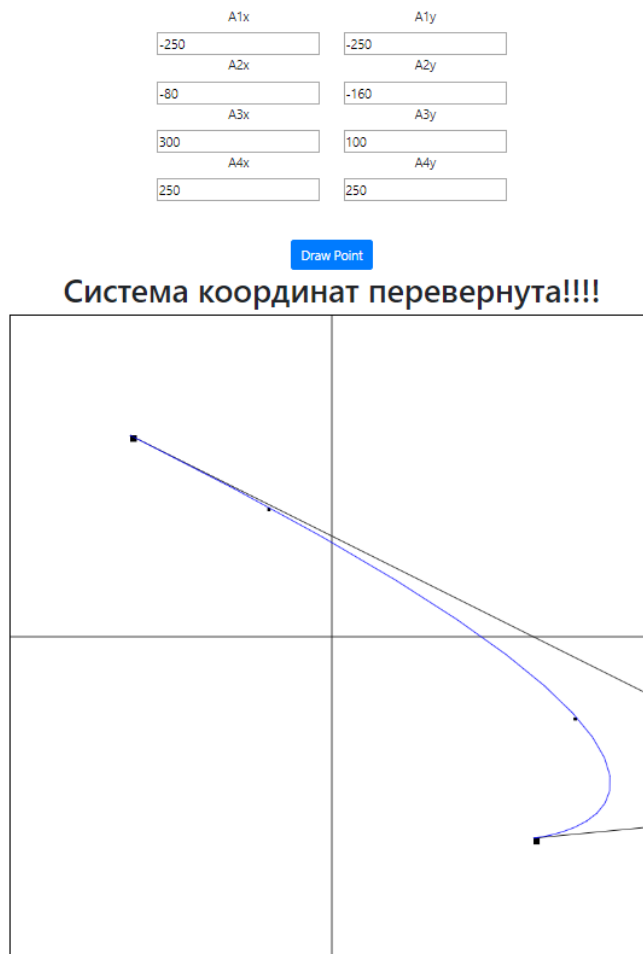


Рисунок 3.1

До курсової роботи надається код програми

Додаток А

Список використаної літератури

1. <https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D0%91%D0%B5%D0%B7%D1%8C%D1%94>
2. <http://3d-orange.com.ua/bezier-curves-for-your-games-tutorial/>
3. David Salomoon, Curves and Surfaces for Computer Graphics