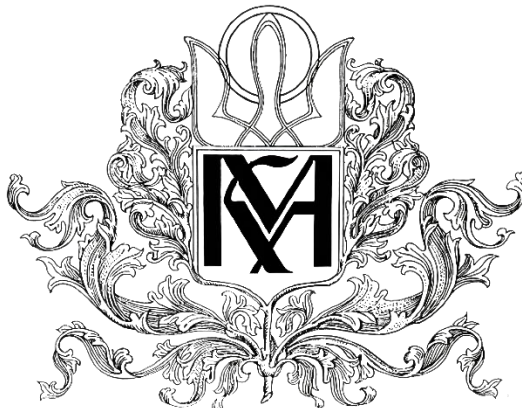


Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Факультет інформатики

Кафедра математики



## **Задача інвестора як задача стохастичної оптимізації**

Текстова частина до курсової роботи  
за спеціальністю «Прикладна математика» 113

Керівник курсової роботи  
к.ф.-м.н., доц. Щестюк Н.Ю.

\_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

Виконала студентка 3-го курсу  
спеціальності «Прикладна математика»

Засуха Д.В.

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2022 р.

## Зміст

	стор.
<b>Анотація .....</b>	<b>3</b>
<b>ВСТУП.....</b>	<b>4</b>
<b>РОЗДІЛ 1: Ймовірнісні функціонали VAR, CVAR і їхні властивості .....</b>	<b>5</b>
1.1 Value at risk (VAR) .....	5
1.2 Conditional value at risk (CVAR) .....	7
<b>РОЗДІЛ 2: Задача інвестора і її розв’язок в термінах VAR, CVAR .....</b>	<b>8</b>
2.1 Постановка задачі інвестора.....	8
2.2 Її розв’язок (з поясненнями).....	8
<b>РОЗДІЛ 3: Розв’язок задачі інвестора на основі реальних даних компанії Tesla.....</b>	<b>10</b>
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>14</b>
<b>Список використаної літератури.....</b>	<b>15</b>
<b>Додаток А. Код мовою програмування Python для розв’язку задачі .....</b>	<b>16</b>

## Анотація

Ця курсова робота складається з трьох розділів. У першому розділі описано, що таке ймовірнісні функціонали VAR, CVAR та їхні властивості. У другому розділі розглянуто основну задачу інвестора та надано її розв'язок в термінах VAR, CVAR. У третьому розділі було розв'язано задачу інвестора на основі реальних історичних даних компанії Tesla.

## ВСТУП

У наш час фінансові ринки займають дуже важливе місце у сучасній світовій економіці. І однією з найголовніших задач є саме складання оптимального портфеля інвестора (максимізація прибутку, мінімізація втрат). Коли інвестор приймає рішення щодо інвестування, часто використовуються різні економетричні та математичні моделі для прогнозування.

Ця курсова робота була проведена на основі реальних даних про опціони компанії Tesla Inc. (американська автомобільна компанія-стартап).

Для вирішення практичної задачі було використано оцінки ризику VaR та CVaR (також зустрічаються назви ES, AVaR, TVaR). Увесь аналіз проводився за допомогою мови програмування Python та інтерактивної середовища розробки JupyterLab. Були взяті дані ринкових цін акцій за період з 13.05.2021 по 12.05.2022, а також для значення strike price було взяте середнє значення для даних по травню 2022 року (strike price = \$ 776.45).

Мета даної курсової роботи – знайти оптимальне рішення щодо суми інвестицій, застосувавши оцінки VaR та CVaR. Отже, завдання курсової роботи складається з таких частин:

- розглянути ймовірнісні функціонали для вимірювання ризиків VaR та CVaR і їхні властивості
- розглянути задачу інвестора та її розв'язок в термінах VaR, CVaR
- розв'язати задачу інвестора на основі реальних даних, якщо припустити, що дохід отримується від торгівлі опціонами

З літератури, для проведення дослідження, було використано книгу “Modeling, Measuring and Managing Risk ” автора Georg Ch Pflug.

# РОЗДІЛ 1: Ймовірнісні функціонали VAR, CVAR і їхні властивості

## 1.1 Value at risk (VAR)

Загальноприйнятою основною величиною для вимірювання ринкових ризиків є VAR. «Це виражена в грошових одиницях оцінка величини, яку не перевищать очікувані протягом даного періоду часу втрати з заданою ймовірністю» [2].

Величина VAR характеризується трьома параметрами: довірчий інтервал, базова валюта та часовий горизонт. Зазвичай, використовують такі значення для параметрів: довірчий інтервал – 95%, 99%; базова валюта – \$(долар США); часовий горизонт – 1 день.

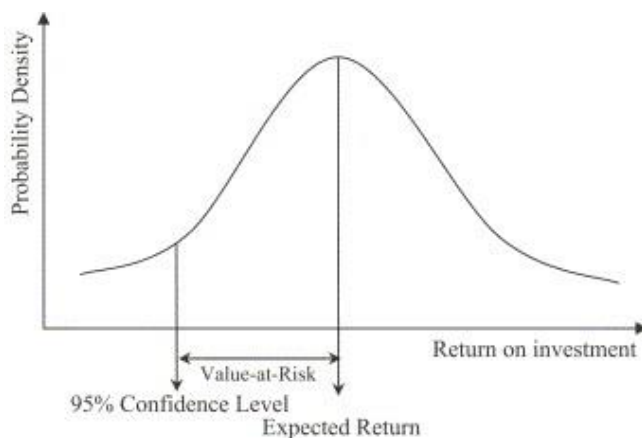


Рис. 1 – графік щільності розподілу з величиною VAR для 95% рівня довіри

У випадку показаному на рис.1, при нормальному розподілі ймовірностей, величину VAR можна розрахувати за формулою:

$$VAR = P * \lambda * \sigma,$$

де  $P$  – це поточна вартість акцій,  $\lambda$  – квантиль нормального розподілу дохідності акцій,  $\sigma$  – стандартне відхилення дохідності акцій.

Отже, можемо, для прикладу, розрахувати величину VAR для 95% рівня довіри ( $\lambda = 1.645$ ):

$$VAR = 1.645 * \sigma * P$$

А для 99% довіри будемо мати ( $\lambda = 2.326$ ):

$$VAR = 2.326 * \sigma * P$$

Загалом, можна сказати, що величина VAR відповідає на питання: «Яку максимальну суму втрат можна очікувати протягом конкретного відрізка часу з заданим рівнем довіри?»

Наприклад, VAR 300\$ з рівнем довіри 99% означає, що:

- з ймовірністю 1% ми можемо втратити суму, яка більше або дорівнює 300\$ протягом одного дня
- з ймовірністю 99% ми не можемо втратити суму, яка більше за 300\$ протягом одного дня

Але у величини VAR є недоліки: вона не є когерентною ризик-метрикою; вона не може оцінити розмір збитків (для цього використовують CVAR)

## 1.2 Conditional value at risk (CVAR)

«CVAR(зустрічаються назви Expected Shortfall, Average value at risk, Tail value at risk) – оцінка очікуваних втрат; зважене по ймовірності математичне сподівання втрат у хвості розподілу за граничним значенням VAR» [3].

Загалом, можемо це записати такою формулою:

$$CVAR_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} VAR_{\gamma}(X) d\gamma$$

де  $X$  – це можлива величина збитків портфеля в майбутньому,  $0 < \alpha < 1$ .

Отже, інакше можна сказати, що CVAR визначає очікувані витрати, які можуть виникнути за межею величини VAR. Conditional value at risk має більш консервативний підхід до оцінювання ризику інвестицій, бо враховує найгірші(найменш прибуткові) випадки.

Умовна вартість ризику(CVAR) має такі основні властивості:

- $CVAR_{\alpha}(Y) = \max\{x - \frac{1}{\alpha} M([Y - x]^{-}) : x \in R\}$
- $CVAR_{\alpha}(Y) = \min \left\{ M(YZ) : M(Z) = 1, 0 \leq Z \leq \frac{1}{\alpha} \right\}$
- $CVAR_{\alpha}(Y) = G^{-1}(\alpha) - \frac{1}{\alpha} M([Y - G^{-1}(\alpha)]^{-}) = G^{-1}(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \int_{\infty}^{G^{-1}(\alpha)} (G^{-1}(\alpha) - u) dG(u)$

## РОЗДІЛ 2: Задача інвестора і її розв'язок в термінах VAR, CVAR

### 2.1 Постановка задачі інвестора

Припустимо, що інвестор повинен вирішити, яку суму інвестувати, знаючи який був попередній фактичний доступний дохід. Необхідно знайти таку суму для інвестицій, аби загальний прибуток був максимальним (поточна вартість кожної одиниці інвестицій дорівнює 1).

### 2.2 Її розв'язок (з поясненнями)

Нехай сума інвестування =  $x$ , а фактичний доступний дохід =  $Y$ . Поточна вартість кожної одиниці інвестицій = 1 (з умови). Тоді, якщо фактичний дохід виявиться меншим за суму  $x$ , то потрібно буде заплатити  $u[Y - x]^-$ , причому  $u > 1$ . У іншому випадку, коли фактичний дохід буде більшим за  $x$ , то залишок  $[Y - x]^+$  буде мати значення  $l[Y - x]^+$ , де  $l < 1$ .

Отже, функція загального прибутку буде мати такий вигляд:

$$H(x, Y) = x - u[Y - x]^- + l[Y - x]^+$$

$$[Y - x]^- = \begin{cases} x - Y, & \text{якщо } Y < x \\ 0, & Y \geq x \end{cases}, [Y - x]^+ = \begin{cases} Y - x, & \text{якщо } Y > x \\ 0, & Y \leq x \end{cases}$$

Зводимо задачу до розв'язку у терміні CVAR. Отже матимемо:

$$\begin{aligned} H(x, Y) &= x - u[Y - x]^- + 0 = x - u[Y - x]^- + l[Y - x]^- - l[Y - x]^- = \\ &= x - (u - l)[Y - x]^- - l(x - Y) = x - (u - l)[Y - x]^- - lx + lY \\ &= (1 - l)x - (u - l)[Y - x]^- + lY = \\ &= (1 - l) \left( x - \frac{u - l}{1 - l} [Y - x]^- \right) + lY \end{aligned}$$



Оптимальне значення  $x$  має максимізувати очікуваний результат, а отже має максимізувати математичне сподівання функції загального прибутку

$M[H(x, Y)]$ . За формулою  $CVAR_{\alpha}(Y) = \max\{x - \frac{1}{\alpha}M([Y - x]^{-}) : x \in R\}$

можемо записати максимальне значення очікуваного прибутку. Воно буде дорівнювати  $(1 - l)CVAR_{\alpha}(Y) + lM(Y)$ , де  $\alpha = \frac{1 - l}{u - l}$ .

Спираючись на той факт, що

$G^{-1}(\alpha) \in \operatorname{argmax}\{x - \frac{1}{\alpha}M([Y - x]^{-}) : x \in R\}$ , можемо зробити висновок, що оптимальне рішення щодо суми інвестування буде дорівнювати  $G^{-1}(\alpha)$ , тобто  $x^* = G^{-1}(\alpha)$ , причому  $G$  – це функція розподілу випадкової величини  $Y$ .

### РОЗДІЛ 3: Розв’язок задачі інвестора на основі реальних даних компанії Tesla.

Для розв’язку задачі було взято дані ринкових цін акцій компанії Tesla за період з 13.05.2021 по 12.05.2022, а також для значення strike price було взяте середнє значення для даних по травню 2022 року (strike price = \$ 776.45).

На початку було знайдено значення  $Y$  (фактичний доступний дохід). Це різниця між ринковими цінами акцій  $S$  та strike price  $K$ , якщо  $S > K$ . Інакше, коли  $S < K$ , будемо мати  $Y = 0$ . Побудували гістограму для випадкової величини  $Y$ , показану на рисунку 2.

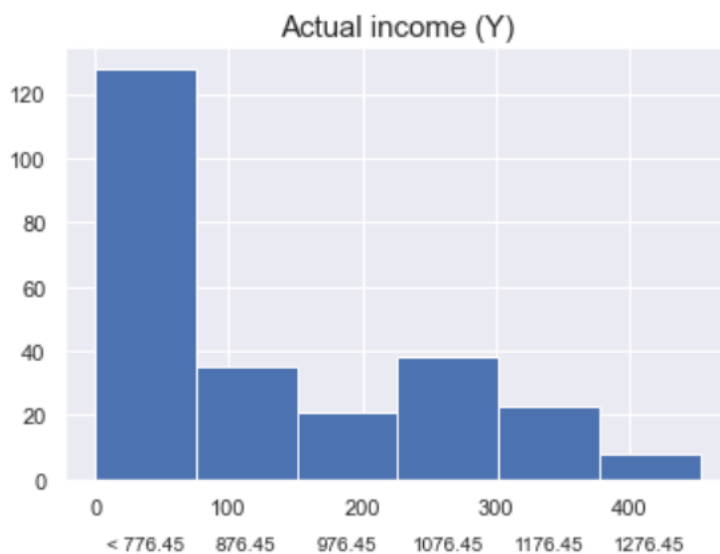


Рис. 2 – гістограма для випадкової величини  $Y$  (під віссю  $Ox$  вказано значення  $S$ , які показують зв’язок між тим, який маємо дохід, і значенням ринкової ціни акції)

З рис.2 бачимо, що маємо велику кількість значень  $Y = 0$ , тобто маємо велику кількість значень ринкових цін акцій, що менше за strike price ( $< 776.45$ ).

Аби знайти оптимальне значення суми інвестування  $x$ , перш за все, потрібно побудувати емпіричну функцію розподілу випадкової величини  $Y$ . Вона показана на рис. 3.

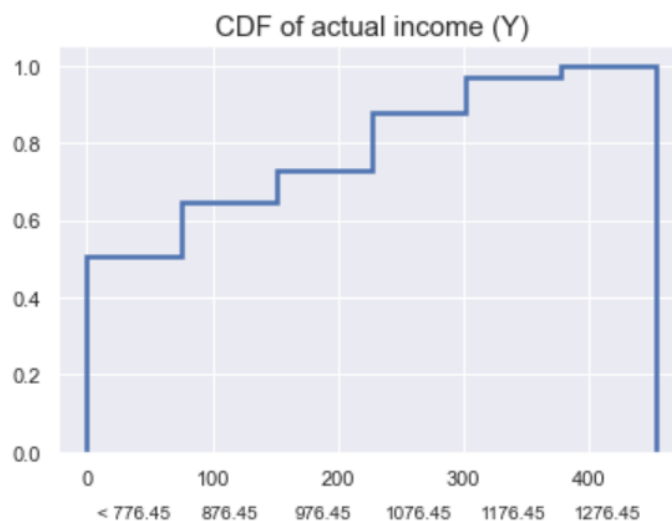


Рис. 3 – розподіл випадкової величини  $Y$  (під віссю  $Ox$  вказано значення  $S$ , які показують зв'язок між тим, який маємо дохід, і значенням ринкової ціни акції)

Наступним кроком було знайдено оцінки  $VaR$  та  $CVaR$  з рівнем довіри 95% для значень фактичного доступного доходу. Отримано такі значення:

- $VaR = 347.95$  (з ймовірністю 95% ми не можемо втратити суму, яка більше за \$347.95)
- $CVaR = 398.93$  (ми можемо втратити \$398.93 у найгіршому випадку, коли перевищимо значення  $VaR$ )

Для наочності побудуємо гістограму і щільність розподілу для випадкової величини  $Y$  та зобразимо на графіку значення VaR та CVaR. (рис. 4)

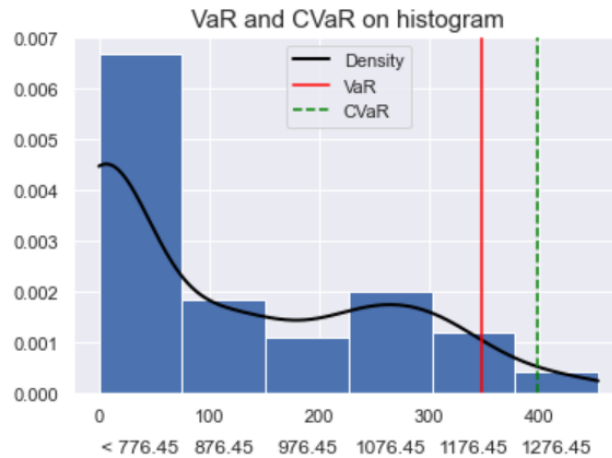


Рис. 4 – значення VaR та CVaR, щільність на гістограмі випадкової величини  $Y$  (під віссю  $Ox$  вказано значення  $S$ , які показують зв'язок між тим, який маємо дохід, і значенням ринкової ціни акції)

Також варто зобразити оцінки VaR та CVaR на емпіричній функції розподілу випадкової величини  $Y$  (рис. 5)

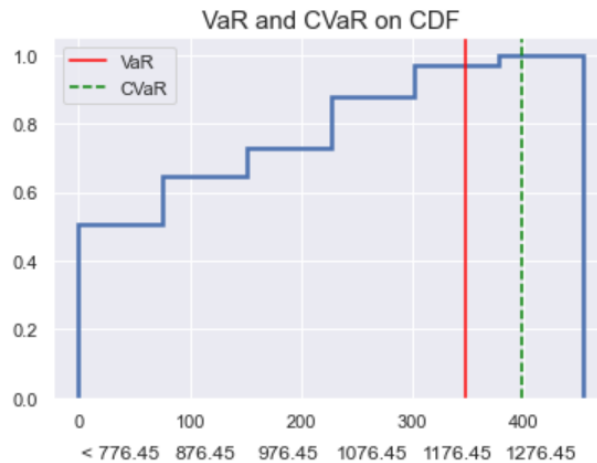


Рис. 4 – значення VaR та CVaR на графіку емпіричної функції розподілу випадкової величини  $Y$  (під віссю  $Ox$  вказано значення  $S$ , які показують зв'язок між тим, який маємо дохід, і значенням ринкової ціни акції)

Виходячи зі значень оцінок VaR, CVaR та гістограми  $Y$ , можемо зробити висновок, що акції компанії Tesla за минулий рік не є достатньо стабільними і тому маємо великий ризик втрат. Але, якщо казати про оптимальну суму інвестування, то, спираючись на історичні дані, її мінімальне значення буде  $x \sim 1175.38$ . Таким чином, у найгіршому випадку через 1 рік після інвестиції фактичний дохід або буде мінімальним, або буде дорівнювати 0 (тобто інвестор не втратить нічого).

## ВИСНОВКИ

У даній курсовій роботі було проведено аналіз фінансових ризиків, що є вкрай важливим для складання оптимального портфеля інвестора. Саме використання оцінок ризику VaR та CVaR дає змогу розв'язати цю практичну задачу ґрунтовним чином і дійти рішення щодо оптимальної суми інвестицій.

В результаті виконання задач даної курсової роботи було знайдено оптимальне рішення щодо суми інвестицій у акції компанії Tesla Inc. з використанням ймовірнісних функціоналів VaR та CVaR.

Було написано код мовою програмування Python, який, на основі історичних даних, дозволяє порахувати фактичний доступний дохід, оцінки VaR та CVaR і візуалізувати отримані результати.

## Список використаної літератури

1. «Modeling, Measuring and Managing Risk». Georg Ch Pflug, Werner R misch. World Scientific, 2007. — 55-56с.
2. Вікіпедія – Value At Risk [Електронний ресурс]  
[https://uk.wikipedia.org/wiki/Value\\_At\\_Risk](https://uk.wikipedia.org/wiki/Value_At_Risk)
3. Вікіпедія – Стоимость под риском [Електронний ресурс]  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/Стоимость\\_под\\_риском](https://ru.wikipedia.org/wiki/Стоимость_под_риском)
3. Вікіпедія – Tesla [Електронний ресурс]  
[https://uk.wikipedia.org/wiki/Tesla\\_Inc.](https://uk.wikipedia.org/wiki/Tesla_Inc.)
4. Історичні дані ринкових цін акцій взяті з сайту nasdaq.com  
<https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/tsla/historical>

## **Додаток А. Код мовою програмування Python для розв'язку задачі**

До курсової додано окремий файл з розширенням .pdf, у якому наведено код та його результати.