УДК 519.711

*В.Т. Матвієнко*

# АЛГОРИТМ СИНТЕЗУ СИСТЕМИ ПО ОПТИМІЗАЦІЇ її КЕРОВАНОСТІ

*Розглядається задача термінального керування для дискретних динамічних систем. У випадку, коли система не повністю керована, заданий фінальний стан точно досягти неможливо. Тому ставиться задача оптимального синтезу структури розподілу керуючих сигналів по переводу системи з початкового стану в найменший окіл фінальної точки або в задану множину кінцевих точок. Пропонується конструктивний алгоритм розв'язання поставленої задачі. Розв'язок наведеної задачі дозволяє підвищити керованість системи.*

Розглянемо лінійну систему з дискретним аргументом:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k)+\mathbf{b}(k)u(k)\,, \qquad \mathbf{(1)}$$

де $u(k)$ – скалярні величини, $x(k)$ – $n$ – вимірні вектори $k=\overline{0,N}$. Тоді відомо [ 1 – 4 ], що розв'язок задачі термінального керування для системи (1) має наступний вигляд:

$\mathbf{u}=\mathbf{W}^{+}\mathbf{x}_{(1)}$, де матриця

$\mathbf{W}=(\mathbf{W}(N+1,0),\ \mathbf{W}(N+1,1),\ \dots\ ,\mathbf{W}(N+1,N))$ розмірності $n\times(N+1)$, вектор

$$\mathbf{W}(N+1,j)=\mathbf{A}(N)\dots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j)$$

розмірності $n$, $x_{(1)}$ – вектор кінцевого стану системи, в який потрібно перевести систему (1), вектор керування:

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u(0)\\u(1)\\\vdots\\u(N)\end{pmatrix}.$$

У випадку відсутності властивості цілком керованості цією системою на множині аргументів $\{k:0,1,2,\ \dots\ ,N\}$, тобто коли не існує керування, яке б перевело систему (1) з початкового стану $\mathbf{x}_{(0)}=0$ в кінцевий стан $\mathbf{x}_{(1)}$, має місце співвідношення:

$$\min_{u(k),k=\overline{0,N}}\|\mathbf{x}(N+1)-\mathbf{x}_{(1)}\|^2=\mathbf{x}'_{(1)}(\mathbf{E}_n-\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^{+}(N+1))\mathbf{x}_{(1)}\,, \qquad \mathbf{(2)}$$

де $\mathbf{W}(N+1)=\sum_{j=0}^{N}\mathbf{W}(N+1,j)\mathbf{W}^{T}(N+1,j)$,

псевдообернена матриця $\mathbf{W}^{+}(N+1)$ – до матриці $\mathbf{W(N+1)}$. Таким чином, оптимальне керування наблизить нашу систему в кінцевий момент часу найближче до точки $\mathbf{x}_{(1)}$.

Запишемо систему рівнянь для матриці **W(N+1):**

$$\mathbf{W}(j+1)=\mathbf{A}(j)\mathbf{W}(j)\mathbf{A}^{T}(j)+\mathbf{b}(j)\mathbf{b}^{T}(j) \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\mathbf{W}(1)=\mathbf{b}(0)\mathbf{b}^{T}(0)\,, \qquad \mathbf{(4)}$$

та розглядаючи для $\mathbf{x}_{(1)}$ множину значень $\{\mathbf{x}_{(1)}:\ \mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\dots,\mathbf{f}_M\}$ для системи (3),(4), складемо функціонал якості:

$$I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N})=\sum_{i=1}^{M}\|\mathbf{x}(n+1)-\mathbf{f}_i\|^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{M}\mathbf{f}_i^{T}\left(\mathbf{E}_n-\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^{+}(N+1)\right)\mathbf{f}_i=$$

$$=tr\left[\left(\mathbf{E}_n-\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^{+}(N+1)\right)\mathbf{F}\right], \qquad \mathbf{(5)}$$

де $\mathbf{F}=\sum^{M}\mathbf{f}_j\mathbf{f}_j^{T}$. Внаслідок того, що мінімізація функціонала (5) еквівалентна максимізації функціонала

$$I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N})=tr\left(\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^{+}(N+1)\mathbf{F}\right), \qquad \mathbf{(6)}$$

то задачу оптимального синтезу системи (1) по максимізації її керованості будемо розглядати як задачу оптимального керування системою (3), (4) при

$$\max_{\substack{\mathbf{b}(j)\in\Omega_\mathbf{b}\\ j=\overline{0,N}}} I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N}). \tag{7}$$

У випадку, коли вектори $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_M$ при M=n є системою ортонормованих векторів, то

$$I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N}) = tr\left(\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^+(N+1)\right). \tag{8}$$

Дана постановка задачі дозволяє вибирати структуру керування не повністю керованої системи для переведення її в задану множину фінальних точок так, щоб якнайбільше наблизити кінцевий стан системи до заданої множини точок. Керування можна забезпечити як однією траєкторією, переводячи її в мінімальний окіл заданих фінальних точок, так і пучком траєкторій.

Для розв'язку задачі оптимального керування (3), (4), (7) можна використати один з двох наступних підходів.

Перший підхід визначається явною залежністю функціонала (6) від вектора b(k) при фіксованих значеннях векторів $j \neq k,\ j=\overline{0,N}$.

Другий підхід полягає в розв'язуванні сформульованої задачі синтезу як задачі оптимального керування (3), (4), (5) з використанням функції Гамільтона [5].

Згідно з результатами дослідження [ 3 ], явна залежність матриці $\mathbf{W}^+(N+1)$ від вектора b(k) має наступний вигляд:

$$\mathbf{W}^+(N+1) = \left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}\mathbf{W}(N+1,\ j)\mathbf{W}^+(N+1,\ j)\right)^+ + \Phi(N+1,\ k,\ \mathbf{b}(k)), \tag{9}$$

де

$$\Phi(N+1,k,\mathbf{b}(k)) = \begin{cases} \frac{1}{r}\mathbf{G}_1(N+1) + \frac{1}{r^2}\mathbf{G}_3, \bullet\ \text{при} \left\|\mathbf{d}^T(k)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\right\|^2 \neq 0 \\ -\frac{1}{r_1}\mathbf{G}_2(N+1), \bullet\ \text{при} \left\|\mathbf{d}^T(k)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\right\|^2 = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{G}_1(N+1) = -\mathbf{W}_k^+(N+1)\mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1)) - \mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)\mathbf{W}_k^T(N+1),$$

$$r = \mathbf{d}^T(k)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{d}(k),$$

$$r_1 = 1 + \mathbf{d}^T(k)\mathbf{W}_k^+(N+1)\mathbf{d}(k),$$

$$\mathbf{d}(k) = \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k),$$

$$\mathbf{G}_3(N+1) = \mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1)),$$

$$\mathbf{G}_2(N+1) = \mathbf{W}_k^+(N+1)\mathbf{d}(k)\mathbf{d}^T(k)\mathbf{W}_k^+(N+1),$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1)) = \mathbf{E}_n - \mathbf{W}_k^+(N+1)\mathbf{W}_k(N+1),$$

$$\mathbf{W}_k(N+1) = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N}\mathbf{W}(N+1,\ j)\mathbf{W}^T(N+1,\ j).$$

Через те, що

$$I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N}) = tr\left[\left(\mathbf{W}_k(N+1) + \mathbf{W}(N+1,k)\mathbf{W}^T(N+1,k)\right)\times \left(\mathbf{W}_k^+(N+1) + \Phi(N+1,k,\mathbf{b}(k))\right)\mathbf{F}\right], \tag{10}$$

то для оптимальних $\mathbf{b}_0(j),\ j=\overline{0,N}$, для яких

$$\max_{\substack{\mathbf{b}(j)\in\Omega_\mathbf{b}\\ j=\overline{0,N}}} I(\mathbf{b}(j),\ j=\overline{0,N}) = I(\mathbf{b}_0(j),\ j=\overline{0,N}),$$

виконується наступна необхідна умова оптимального синтезу (на відміну від принципу максимуму оптимізується структура системи керування):

$$tr\left[\mathbf{A}(N)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}_0(k)\mathbf{b}_0^T(k)\mathbf{A}^T(k+1)\dots\mathbf{A}^T(N)\times\left(\mathbf{W}_k^+(N+1)+\Phi(N+1,k,\mathbf{b}_0(k))\right)\mathbf{F} + \mathbf{W}_k(N+1)\left(\mathbf{W}_k^+(N+1)+\Phi(N+1,k,\mathbf{b}_0(k))\right)\mathbf{F}\right] =$$

$$= \max_{\mathbf{b}(k)\in\Omega_\mathbf{b}} tr\left[\mathbf{A}(N)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k)\mathbf{b}^T(k)\mathbf{A}^T(k+1)\dots\mathbf{A}^T(N)\times\left(\mathbf{W}^+_k(N+1)+\Phi(N+1,k,\mathbf{b}(k))\right)\mathbf{F} + \mathbf{W}_k(N+1)\left(\mathbf{W}^+_k(N+1)+\Phi(N+1,k,\mathbf{b}(k))\right)\mathbf{F}\right].$$

Розглянемо задачу оптимального керування (3), (4), (7) . Тут функція Гамільтона має вигляд:

$$H(\mathbf{W}(j),\Phi(j+1),\mathbf{b}(j),j) = tr\left\{\Psi(j+1)\left[\mathbf{A}(j)\mathbf{W}(j)\mathbf{A}^T(j) + \mathbf{b}(j)\mathbf{b}^T(j)\right]\right\}.$$

Матриця $\Psi(j)$ виводиться з системи матричних рівнянь:

$$\Psi(j) = grad_{\mathbf{W}(j)}H(\mathbf{W}(j),\Psi(j+1),\mathbf{b}(j)) = \mathbf{A}^T(j)\Psi(j+1)\mathbf{A}(j),\ j=\overline{N+1,1}, \tag{11}$$

$$\Psi(N+1) = -grad_{\mathbf{W}(N+1)}\ tr\left(\mathbf{W}(N+1)\mathbf{W}^+(N+1)\mathbf{F}\right). \tag{12}$$

Для віднайдення градієнта в формулі (12) від псевдооберненої матриці скористаємося формулою рекурентного псевдообернення матриць [3]. З цією метою спочатку необхідно знайти *градієнти по векторним рядкам матриці* W(N+1). Тоді матриця у кінцевій точці має вигляд:

$$\Psi(N+1) = \mathbf{F}\,\mathbf{W}^{+}(N+1) + \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{g}_2^{\mathbf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n^{\mathbf{T}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_k^T = \begin{cases} 0, \text{ при } \mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{w}_{(k)} > 0 \\ -\mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{W}_k^{+}(N+1)\overline{\mathbf{F}}_{(k)}\mathbf{V} - \overline{\mathbf{d}}^{\mathbf{T}} - \mathbf{f}_k^T\mathbf{V}, \\ \quad \text{при } \mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{Z}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{w}_{(k)} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{W}_k(N+1)) = \mathbf{W}_k^{+}(N+1)\left(\mathbf{W}_k^T(N+1)\right)^T$$

$$\overline{\mathbf{d}}^T = \frac{\mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{R}^T(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{W}(N+1)\overline{\mathbf{F}}^T(k)}{1+\mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{R}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{w}_{(k)}(N+1)},$$

де $\mathbf{W}_k(N+1)$ – матриця W(N+1) без k–го вектора рядка, $W^T_{(K)}(N+1)$ – k–й вектор рядка матриці W(N+1), $\mathbf{f}_i$ – i–й вектор стовпчика матриці F, $\overline{\mathbf{F}}_{(k)} = (\mathbf{f}_{1(k)}, \mathbf{f}_{2(k)}, \ldots, \mathbf{f}_{n(k)})$, де $\mathbf{f}_{i(k)}$ – вектор без k–ої компоненти,

$$n \geq 0$$

$$r_2 = \mathbf{w}_{(k)}^T(N+1)\mathbf{R}(\mathbf{W}_k(N+1))\mathbf{w}_{(k)}(N+1).$$

Тоді:

$$grad_{\,\mathbf{b}(i)}\, I(\cdot) = -grad_{\,\mathbf{b}(i)}\, H(\mathbf{W}(i), \Psi(i+1), \mathbf{b}(i), i) =$$
$$= -grad_{\,\mathbf{b}(i)}\, tr\left\{\Psi(i+1)\left[\mathbf{A}(i)\mathbf{W}(i)\mathbf{A}^T(i) + \mathbf{b}(i)\mathbf{b}^T(i)\right]\right\} =$$
$$= \left(\Psi^T(i+1) + \Psi(i+1)\right)\mathbf{b}(i), \quad i = \overline{0, N}.$$

А процедура градієнтного спуску має вигляд:

$$\overline{\mathbf{b}}(i) = \mathbf{b}(i) - \beta_i\, grad_{\,\mathbf{b}(i)}\, I(\cdot), \quad i = \overline{0, N}.$$


\. *Ллберт А.* Регрессия, псевдоинверсия, рекуррентное оценивание. - М.: Наука, 1977. - 223 с.

2. *Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П.* Псевдообращение в задачах управления и наблюдения //Автоматика. - 1993. - №5. - С.69-81.

3. *Кириченко Н.Ф.* Псевдообращенис матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления //Проблемы управления и информатики. - 1995. - №1. - С.114- 127.

4. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. - К.: Вища школа, 1978. - 184 с.

5. *Пропой Ф.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - М.: Наука, 1973. - 256 с.



*V.T. Matvienko*


# THE ALGORITHM OF SYNTHESIS SYSTEMS ON OPTIMIZATION CONTROLLABLY


*The task the terminal control is considered. The optimal choice of structure of distribution of controlling signals for discrete-time of linear systems is solvered. The constructive algorithm of the decision of the put task is considered. The constructed decision raises controllably of system.*