Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь — бакалавр

на тему: **“Операція перемикання Зейделя на неорієнтованих графах”**

Виконав студент
4-го року навчання спеціальності
113 “Прикладна математика”
Лозовой Олексій Володимирович
(ПІБ)

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

Рецензент ______________________
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ______________________

Секретар ЕК ______________________
(підпис)
“______”____________________ 2021 р.

Київ – 2021

Зміст

Вступ

Операція перемикання була запропонована Зейделем та ван Лінтом у їх спільній роботі [6] по еліптичній геометрії. Її суть полягає в тому, щоб взати певну вершину графу, прибрати всі ребра, які вона має, а такжо додати ребра між тими вершинами, з якими вона не була суміжна. Цей граф і буде перемиканням даного по вершині. В одночас Зейделем було виявлено зв'язок між класами перемикань та так званими два-графами [4] [5]. Потім дослідженням класів перемиканнь, зокрема питання циклічності графів у класах, займався Хейдж [1]. Пізніше, у 2015, Козеренко [3] дослідив властивості так званих s-максимальних графів. Це такі графи, кількість ребер яких, найбільша серед усіх, в його класі перемикань.

У першому розділі розглядаються основі властивості операції перемикання, та s-максимальних графів. Також розглянуто твердження про еквівалентність класів перемикань та два-графів.

У другому розділі увага спрямована на властивості саме класів перемикань. Наведено більш просте доведення одного з результатів отриманих Хейджем у своїй докторській роботі [1].

Також робота містить алгоритми, для того щоб перемкнути граф за вершиною чи множиною вершин і для того, щоб перевірити два графи на s-еквівалентність.

1 Основні означення, приклади та результати

1.1 Перемикання Зейделя

Означення 1.1. Перемиканням вершини u графу G називається граф $S = S(G, u)$, такий що $V(S) = V(G)$ та

$$E(S) = E_G(V \setminus \{u\}) \cup \{uv \mid v \in V \setminus \{u\}, uv \notin E(G)\}$$

Можна узагальнити поняття до перемикання довільної множини вершин графа.

Означення 1.2. Нехай є граф G і $U \subseteq V(G)$. Перемиканням U буде граф $S = S(G, U)$ з $V(S) = V(G)$ та

$$E(S) = E_G(U) \cup E_G(V \setminus U) \cup \{uv \mid u \in U, v \in V \setminus U, uv \notin E(G)\}$$

Лема 1.3. *Нехай є граф $G = (V, E)$ і $U, U_1, U_2 \subseteq V$. Тоді*

1. $S(G, U) = S(G, V \setminus U)$;
2. $S(S(G, U_1), U_2) = S(G, U_1 \triangle U_2)$;
3. *якщо* $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$, *тоді* $G_m = S(G, U)$, *причому* $G_0 = G$ *і* $G_i = S(G_{i-1}, u_i), 1 \leq i \leq m$;
4. $\overline{S}(G, U) = S(\overline{G}, U)$.

Доведення. (1). За означенням

$$E(S(G, U)) = E_G(U) \cup E_G(V \setminus U) \cup \{uv \mid u \in U, v \in V \setminus U, uv \notin E(G)\}.$$

Якщо застосуємо його до $S(G, V \setminus U)$, то отримаємо:

$$E(S(G, V \setminus U)) = E_G(V \setminus U) \cup E_G(U) \cup \{uv \mid u \in V \setminus U, v \in U, uv \notin E(G)\},$$

що, з точністю до перейменування u і v у третій множині, є одним й тим самим, тобто $S(G, U) = S(G, V \setminus U)$.

(2). Позанчимо $S_1 = S(G, U_1)$ та $S_2 = S(S_1, U_2)$ і розглянемо характеристичні функції ребер відповідних графів. Якщо переписати означення перемикання через характерестичні функції, то для $u, v \in V$ матимемо:

$$\begin{aligned} E(S_2)(uv) &= U_2(u) + E(S_1)(uv) + U_2(v) \\ &= U_2(u) + U_1(u) + E(G)(uv) + U_1(v) + U_2(v) \\ &= (U_1 \triangle U_2)(u) + E(G)(uv) + (U_1 \triangle U_2)(v) \\ &= E(S(G, U_1 \triangle U_2))(uv). \end{aligned}$$

Тобто множини ребер $E(S_1)$ та $E(S(G, U_1 \triangle U_2))$ співпадають.

(3). Зауважимо, що для двох неперетинних множин вершин U, V з пункту (2) слідує $S(S(G,U),V) = S(G, U\triangle V) = S(G, U\cup V)$, зокрема для $U = \{u\}, V = \{v\}$: $S(S(G,u),v) = S(G,\{u,v\})$. Тоді матимемо $G_1 = S(G,u_1)$, $G_2 = S(G_1,u_2) = S(S(G,u_1),u_2) = S(G,\{u_1,u_2\})$, …, $G_m = S(G,\{u_1,\ldots,u_m\}) = S(G,U)$.

(4). Позначимо $S_1 = \overline{S}(G,U)$ і $S_2 = S(\overline{G},U)$. Тоді для $u, v \in V$:

$$\begin{aligned} E(S_1)(uv) &= 1 + (U(u) + E(G)(uv) + U(v)) \\ &= U(u) + (1 + E(G)(uv)) + U(v) \\ &= U(u) + E(\overline{G})(uv) + U(v) \\ &= E(S_2)(uv). \end{aligned}$$

□

1.2 s-максимальні графи

Означення 1.4. Два графи G_1, G_2 називаються s-еквівалентними, якщо існує множина $U \subseteq V(G_1)$ така, що $S(G_1,U) \simeq G_2$. Позначення: $G_1 \sim_s G_2$.

Лема 1.5. *Відношення s-еквівалентності є відношенням еквівалентності.*

Доведення. Рефлексивність. Якщо є граф G, то $S(G,\emptyset) = G \implies G \sim_s G$.

Симетричність. Нехай є два s-еквівалентні графи $G_1 \sim_s G_2$. Отже існують множина $U_1 \subseteq V(G_1)$ і ізоморфізм графів $f\colon S(G_1,U_1) \simeq G_2$. Якщо застосуємо перемикання до обох графів знову, от отримаємо $S(S(G_1,U_1),U_1) = S(G_2, f(U_1))$. Тобто для $U_2 = f(U_1)$, $S(G_2,U_2) = G_1 \implies G_2 \sim_s G_1$.

Транзитивність. Нехай є графи $G_1 \sim_s G_2 \sim_s G_3$. Тоді існують множини $U_1 \subseteq V(G_1), U_2 \subseteq V(G_2)$ такі, що $f_1\colon S(G_1,U_2) \simeq G_2$ і $f_2\colon S(G_2,U_2) \simeq G_3$. Тоді якщо перший граф послідовно перемкнути спочатку на U_1, а потім на $f_1^{-1}(U_2)$, то отримаємо $S(S(G_1,U_1), f_1^{-1}(U_2)) = S(G_1, U_1 \triangle f_1^{-1}(U_2)) \simeq S(G_2,U_2) \simeq G_3 \implies G_1 \sim_s G_3$. □

Наслідок 1.6. *Перемикання не змінює парність кількості ребер між довільними 3-ма вершинами графу.*

Лема 1.7. *Для будь-якого графу на 4-х вершинах кількість підграфів на 3-х вершинах, які мають непарну кількість ребер, парна.*

Лема 1.8. *Графи $G_1 = (V, E_1)$ та $G_2 = (V, E_2)$ будуть s-еквівалентними, якщо для довільних 3-ох вершин з V парність кількості ребер між ними буде однакова для обох графів.*

Доведення. Зафіксуємо деяку вершину $u \in V$ і розглянемо множину $U \subseteq V$, яка складається з вершин з різною суміжністю з u, тобто в одному графі вони суміжні, а в іншому ні. Розглянемо перемикання $S(G_2, U)$, у ньому u має такі самі суміжності як і у G_1. За припущенням, суміжності усіх інших вершин збігається в обох графах, отже $G_1 \simeq S(G_2, U)$. Тоді $G_1 \sim_s G_2$ за означенням. □

Означення 1.9. Граф G називається s-максимальним, якщо для будь-якого графу H такого, що $G \sim_s H$, виконується нерівність $|E(H)| \leq |E(G)|$.

Лема 1.10. *Граф G є s-максимальним тоді і тільки тоді, коли для будь-якої $U \subseteq V(G)$ виконується*

$$2l(U) \geq |U|(|V(G)| - |U|)$$

Теорема 1.11. *Нехай G - s-максимальний граф на n вершинах. Тоді:*

1. $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$;
2. $\Delta(G) \geq \frac{n+\omega(G)}{2} - 1$;
3. $|E(G)| \geq \frac{n(n-1)+\omega(G)(\omega(G)-1)}{4}$;
4. *G зв'язний і $diam(G) \leq 2$;*
5. *у G є гамільтоновий шлях;*
6. *множина $\{u \in V(G) \colon d(u) = \frac{n-1}{2}\}$ незалежна;*
7. *якщо $M \subseteq \{u \in V(G) \colon d(u) = n-1\}$ і $|M| < \frac{n}{3}$, тоді $G - M$ зв'язний.*

Доведення.

1. Для кожної вершини $u \in V(G)$ застосувати лему 1.10 для $U = \{u\}$.

2. Покладемо $\omega = \omega(G)$ і нехай . Тоді маємо

$$\sum_{u \in U} d(u) = l(u) + 2e(U) = l(U) + \omega(\omega - 1)$$
$$\geq \frac{\omega(n-\omega)}{2} + \omega(\omega - 1)$$
$$= \omega(\frac{n+\omega}{2} - 1)$$

Отже $\Delta(G) \geq \frac{1}{\omega} \sum\limits_{u \in U} d(u) \geq \frac{n+\omega}{2} - 1$.

3. Нехай $U \subseteq V(G)$ породжує найбільшу кліку. Тоді

$$\begin{aligned} 2|E(G)| &= \sum_{u \in U} d(u) + \sum_{u \notin U} d(u) \\ &\geq \omega(\frac{n+\omega}{2} - 1) + (n-\omega)\frac{n-1}{2} \\ &= \frac{n\omega + \omega^2 - 2\omega + n^2 - n - n\omega + \omega}{2} \\ &= \frac{n(n-1) + \omega(\omega - 1)}{2} \end{aligned}$$

4. Нехай є дві несуміжні вершини $u, v \in V(G)$. З першого пункту ми знаємо, що $d(u)+d(v) \geq n-1$. Тоді $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$ і отже $diam(G) \leq 2$.

5. Знов таки, ми знаємо, що для будь-яких двох вершин $u, v \in V(G)$ виконується нерівність $d(u) + d(v) \geq 1$. Але відомим є той факт[13], що граф G в такому випадку є гамільтоновим.

6. Нехай є дві суміжні вершини $u, v \in V(G)$ такі, що $d(u) = d(v) = \frac{n-1}{2}$.

$$2l(\{u, v\}) = 2(\frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} - 2) = 2(n-3) < 2(n-2)$$

Суперечність з лемою 1.10.

7. Припустимо від супротивного, що $G - M$ незв'язний і H_1 - його компонента зв'язності. Покладемо $H_2 = (G - M) - H_1$ і $a = |V(H_1)|, b = |V(H_2)|, m = |M|$. Оскільки G є s-максимальним, то $2am = 2l(V(H_1)) \geq a(n-a) = a(m+b)$. Звідси слідує, що $m \geq b$. Аналогічно $m \geq a$. Тоді $2m \geq a + b = n - m$, звідки $m \geq \frac{n}{3}$. Але це суперечить з умовою.

□

Твердження 1.12. *Нехай G граф із $\delta(G) \geq \frac{3n}{4} - 1$. Тоді він s-максимальний.*

Доведення. Візьмемо деяку $U \subseteq V(G)$. Оскільки $l(U) = l(V(G) \setminus U)$, то без втрати загальності можемо припустити, що $|U| \leq \frac{n}{2}$. Маємо

$$
\begin{aligned}
2l(U) &= 2(\sum_{u \in U} d(u) - 2e(U)) \geq 2(|U|\delta(G) - |U|(|U|-1)) \\
&\geq |U|(\frac{3n}{2} - 2) - 2|U|(|U|-1) = |U|(\frac{3n}{2} - 2|U|) \\
&= |U|(n - |U| + \frac{n}{2} - |U|) \geq |U|(n - |U|)
\end{aligned}
$$

і отже G є s-максимальним за лемою 1.10. □

Твердження 1.13. *Нехай G_1 і G_2 два s-максимальні графи. Тоді $G_1 + G_2$[join] також s-максимальний.*

Доведення. Покладемо $G = G_1 + G_2, V = V(G), V_1 = V(G_1), V_2 = V(G_2)$ і $n_1 = |V_1|, n_2 = |V_2|$.

Розглянемо непорожню $U \subseteq V$ і покладемо $a = |U \cap V_1|, b = |U \cap V_2|$.

$$
\begin{aligned}
2l_G(U) &= 2(e_G(U \cap V_1, V_1 \setminus U) + e_G(U \cap V_2, V_2 \setminus U) \\
&\quad + e_G(U \cap V_2, V_1 \setminus U) + e_G(U \cap V_1, V_2 \setminus U)) \\
&= 2(l_{G_1}(U \cap V_1) + a(n_2 - b) \\
&\quad + b(n_1 - a) + l_{G_2}(U \cap V_2)) \\
&\geq a(n_1 - a) + 2a(n_2 - b) + 2b(n_1 - a) + b(n_2 - b) \\
&= a(n_1 - a + 2(n_2 - b)) + b(n_2 - b + 2(n_1 - a)) \\
&\geq a(n_1 - a + n_2 - b) + b(n_2 - b + n_1 - a) \\
&= (a+b)(n_1 + n_2 - a - b) = |U|(|V| - |U|)
\end{aligned}
$$

Отже G є s-максимальним за лемою 1.10. □

Лема 1.14. *Нехай G s-максимальний і H такий граф, що $|V(H)| \leq |V(G)| + 1$. Тоді $G + H$ s-максимальний.*

Доведення. Нехай $n = |V(G)|, k = |V(H)|$, маємо $k \leq n + 1$. Також покладемо $K = G + H$. Для деякої $U \subseteq V(K)$ покладемо $a = |U \cap V(G)|$ і $b = |U \cap V(H)|$.

Якщо $b = 0$, то $2l(U) \geq a(n-a) + ak = a(n+k-a) = |U|(|V(K)| - |U|)$. Отже K є s-максимальним за лемою 1.10.

Розглянемо тепер випадок, коли $b \geq 1$. Оскільки $l(U) = l(V(K) - U)$, то без втрати загальності можемо сказати, що $k \geq 2b$. Тоді маємо

$$\begin{aligned}
2l(U) &= 2(e_G(U \cap V_G, V_G \setminus U) + e_G(U \cap V_G, V_H \setminus U) \\
&\quad + e_G(U \cap V_H, V_G \setminus U) + e_G(U \cap V_H, V_H \setminus U)) \\
&\geq a(n-a) + 2a(k-b) + 2b(n-a) \\
&= (a+b)(n+k-a-b) + a(k-2b) + b(b+n-k) \\
&\geq (a+b)(n+k-a-b) + b(b-1) \\
&\geq (a+b)(n+k-a-b) = |U|(|V(K)| - |U|)
\end{aligned}$$

і знов-таки за лемою 1.10 граф K є s-максимальним. □

Теорема 1.15. *Нехай є $m \geq 2$ графів $G_1, \ldots, G_m$ таких, що $||V(G_1)| - |V(G_2)|| \leq 1$ для всіх $1 \leq i, j \leq m$. Тоді $\sum\limits_{i=1}^{m}$ s-максимальний.*

Доведення. Застосуємо індукцію.

База: $m = 2$. Розглянемо два графи G_1 і G_2 і позначимо $n_i = |V(G_i)|, i = 1, 2$. Нехай виконується умова $|n_1 - n_2| \leq 1$. Позначимо $G = G_1 + G_2$. Для всіх $U \subseteq V(G)$ покладемо $a_i = |U \cap V(G_i)|, i = 1, 2$.

Якщо $a_1 = 0$, то

$$\begin{aligned}
2l(U) - |U|(|V(G)| - |U|) &= 2a_2n_1 - a_2(n_1 + n_2 - a_2) \\
&= 2a_2n_1 - a_2n_1 + a_2n_2 - a_2^2 \\
&= a_2(n_1 - n_2) + a_2^2 \\
&\geq a_2(a_2 - 1) \geq 0.
\end{aligned}$$

Тепер, без втрати загальності, припустимо що $a_1 \geq a_2 \geq 1$. Маємо

$$\begin{aligned}
2l(U) - |U|(|V(G)| - |U|) &\geq 2(a_1(n_2 - a_2) + a_2(n_1 - a_1)) \\
&\quad - (a_1 + a_2)(n_1 + n_2 - a_1 - a_2) \\
&= (n_2 - n_1)(a_1 - a_2) + (a_1 - a_2)^2 \\
&\geq (a_2 - a_1) + (a_1 - a_2)_2 \\
&= (a_1 - a_2)(a_1 - a_2 - 1) \geq 0
\end{aligned}$$

Крок індукції: розглянемо $m + 1$ графів $G_1, \ldots, G_{m+1}$, які задовольняють умові $||V(G_1)| - |V(G_2)|| \leq 1, 1 \leq i, j \leq m + 1$ і припустимо, що $G = \sum_{i=1}^{m} G_i$ - s-максимальний. Ми знаємо, що $|V(G_{m+1})| \leq |V(G)| + 1$, отже за лемою 1.14 $G + G_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} G_i$ також s-максимальний. □

Лема 1.16. *Кожне ребро в s-максимальному графі або домінуюче, або лежить в трикутнику.*

Доведення. Нехай G s-максимальний граф і $e = uv \in E(G)$. Покладемо $U = \{u, v\}$. Тоді $d(u) + d(v) - 2 = l(U) \geq n - 2$. Отже $d(u) + d(V) \geq n$. Якщо $N(u) \cap N(v)$ порожня, тоді e домінуюче. Інакше ж, для будь-якої вершини $x \in N(u) \cap N(v)$ трійка (u, v, x) утворює трикутник. □

Теорема 1.17. *Нехай G s-максимальний граф без трикутників. Тоді або $G \simeq K_{n,n}$ або $G \simeq K_{n,n+1}$.*

Доведення. Якщо $|V(G)| = 1$, то $G \simeq K_1 = K_{1,0}$. Так само, якщо $|V(G)| = 2$, тоді $G \simeq K_2 = K_{1,1}$. Тепер розглянемо випадок, коли $|V(G)| \geq 3$. З пункта 3 теореми 1.11 слідує, що $E(G) \geq 1$.

Розглянемо деяке ребро $e = uv \in E(G)$. Оскільки граф G не містить трикутників, то з леми 1.16 слідує, що ребро e домінуюче. Отже $N(u) \cup N(v) = V(G)$.

Для кожної вершини $x \in N(u) \setminus \{v\}$ ребро $e' = ux$ теж домінуюче. При цьому $(N(v) \setminus \{u\}) \cap N(u)$ порожня, інакше утвориться трикутник. Отже $N(v) \setminus \{v\} \subseteq N(x)$. Так само $N(x) \setminus \{u\} \subseteq N(v)$.

Тоді для всіх $x \in N(u)$ виконується $N(x) = N(v)$. Отже $(N(v) \cup \{u\}, N(u) \cup \{v\})$ є розбиттям повного двочасткового графа.

Покладемо $G \simeq K_{a,b}$ з розбиттям (A, B) і $a = |A|, b = |B|$. Припустимо, що $a \geq b + 2$. Тоді для всіх $x \in A$ ми маємо

$$\frac{|V(G)| - 1}{2} = \frac{a + b - 1}{2} \geq \frac{b + 2 + b - 1}{2} = b + \frac{1}{2} > b = d(x),$$

а це суперечить s-максимальності графу G(теорема 1.11, пункт 1). Отже $a \leq b + 1$, і аналогічно $b \leq a + 1$. Отже $|a - b| \leq 1$, що і потрібно було показати. □

Теорема 1.18. *Нехай G не гамільтоновий s-максимальний граф. Тоді $G \simeq K_2$ або $G \simeq \overline{K}_{k+1} + H$ для деякого графа H з $k \geq 0$ вершинами.*

Доведення. Покладемо $n = |V(G)|$. Якщо $n = 1$, то $G \simeq \overline{K}_{k+1} + H$, де $k = 0$ і $H \simeq K_0$.

Розглянемо випадок, коли $n \geq 2$ і припустимо, що G ациклічний. Використовуючи пункт 3 теореми 1.11 ми отримаємо

$$\frac{n(n-1) + 2}{4} \leq |E(G)| \leq n - 1.$$

Звідси отримали $2 \le n \le 3$. Якщо $n = 2$, тоді $G \simeq K_2$. Якщо ж $n = 3$, тоді $G \simeq \overline{K}_{k+1} + H$, де $k = 1$ і $H \simeq K_1$.

Тепер припустимо, що G має цикл. Зафіксуємо найдовший цикл C і позначимо $c = |V(C)|$. Ще позначимо $V(C) = \{u_1, \ldots, u_c\}$, причому $\{u_i u_{i+1} \colon 1 \le i \le c-1\} \cup u_c u_1 \subseteq E(G)$.

Зазначимо, що оскільки G не гамільтоновий, множина $U = V(G) - V(C)$ не порожня.

Твердження 1: для всіх $v \in U$ виконуєтсья $|N(v) \cap V(C)| = \frac{c}{2}$.

Для початку припустимо, що існує вершина $v_0 \in U$, така що $|N(v_0) \cap V(C)| > \frac{c}{2}$. Тоді можна знайти дві різні вершини $x, y \in N(v_0) \cap V(C)$ такі, що $xy \in E(C)$. Це значить, що v_0 можна додати до циклу C, щоб отримати довший цикл, що суперечить тому, що C вже найдоший. Отже $|N(v) \cap V(C)| \le \frac{c}{2}$ для всіх $v \in U$.

З іншої сторони, якщо існує вершина $v_0 \in U$ така, що $|N(v_0) \cap V(C)| < \frac{c}{2}$, то

$$2l(U) = 2\sum_{v \in V} |N(v) \cap V(C)| < |U|c = |U|(n - |U|),$$

що суперечить s-максимальності графа G.

Твердження 2: множина U незалежна.

Припустимо існують вершини $v_1, v_2 \in U$ такі, що $v_1 v_2 \in E(G)$.

Оскільки для будь-якої $v \in U$ множина $N(v) \cap V(C)$ є незалежною, бо інакже ми могли б додати v до циклу C, кардинальності $\frac{c}{2}$. Без втрати загальності можемо припустити, що $N(v_1) \cap V(C) = \{u_1, u_3, \ldots, u_{c-1}\}$.

Якщо $N(v_2) \cap V(C) = N(v_1) \cap V(C)$, тоді

$$v_1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_{c-1} - v_2 - v_1$$

цикл довший ніж C, що суперечить умові.

Аналогічно, якщо $N(v_2) \cap V(C) \neq N(v_1) \cap V(C)$, тоді легко побачити, що $N(v_2) \cap V(C) = \{u_2, \ldots, u_c\}$. В такому випадку

$$v_1 - u_1 - u_2 - \ldots - u_c - v_2 - v_1$$

цикл дожвий за C, що теж суперечить умові.

Твердження 3: $|U| = 1$.

З попереднього твердження слідує, що для кожної вершини $v \in U$ маємо $d(v) = |N(v)| = |N(v) \cap V(C)| = \frac{c}{2}$. Оскільки G i-максимальний і U непорожня, то для всіх $v \in U$ маємо

$$\frac{n-1}{2} \le d(v) = \frac{c}{2} = \frac{n - |U|}{2}.$$

Отже $|U| = 1$ і отже існує вершина $v_0 \in V(G)$ така, що $U = \{v_0\}$. Зауважимо, що $d(v_0) = \frac{n-1}{2}$.

Твердження 4: множина $M = V(C) \setminus N(v_0)$ є незалежною.

Без втрати загальності можна припустити, що $N(v_0) = N(v_0) \cap V(C) = \{u_2, \ldots, u_c\}$. Якщо припустити, що існує ребро $u_{2k+1}u_{2l+1} \in E(G)$, де $k < l$. Тоді

$$v_0 - u_{2k+2} - \ldots - u_{2l} - u_{2l+1} - u_{2k+1} - u_{2k} - \ldots - u_{2l+2} - v_0$$

цикл довший ніж C, що суперечить умові.

Твердження 5: Для всіх вершин $u \in M$ виконується умова $N(u) = N(v_0)$.

З минулого твердження слідує те, що $N(u) \subseteq N(v_0)$. Але з s-максимальності графа G маємо $d(u) \geq \frac{n-1}{2} = d(v_0)$. Отже $N(u) = N(v_0)$. З цього всього маємо

$$G = G[M \cup \{v_0\}] + G[N(v_0)] \simeq \overline{K}_{k+1} + H,$$

де $k = d(v_0) = \frac{c}{2} = \frac{n-1}{2}$. □

Наслідок 1.19. *Кожний s-максимальний граф з парним числом вершин $n \geq 4$ є гамільтоновим.*

Наслідок 1.20. *Нехай G не гамільтоновий s-максимальний граф з більше ніж однією вершиною. Тоді існує вершина $v \in V(G)$ така, що $G - v$ теж s-максимальний.*

Доведення. З теореми 1.18 слідує, що $G \simeq K_2$ або $G \simeq \overline{K}_{k+1} + H$ для деякого графа H з $k \geq 0$ вершин. Якщо $G \simeq K_2$, То для всіх вершин $v \in V(G)$ маємо $G - v \simeq K_1$ і тому $G - v$ s-маскимальний. Якщо ж $G \simeq \overline{K}_{k+1} + H$, тоді існує вершина $v \in V(G)$ така, що $G - v \simeq \overline{K}_k + H$. Але оскільки $|V(H)| = k$ граф $G - v$ буде s-максимальним за теоремою 1.15. □

Теорема 1.21. *Нехай G s-максимальний граф на n вершинах. Якщо $\delta(G) = \frac{n-1}{2}$, тоді існує вершина $v \in V(G)$ така, що $G - v$ теж s-максимальний.*

Доведення. Візьмемо точку $v \in V(G)$ така, що $d(v) = \frac{n-1}{2}$ і припустимо, що $G - v$ не s-максимальний. Тоді існує $U \subseteq V(G)$ така, що $l_{G-v}(U) < \frac{m(n-1-m)}{2}$, де $m = |U|$.

Оскільки G из s-максимальний, маємо $l_G(U) \geq \frac{m(n-m)}{2}$ і для $U' = U \cup \{v\}$ $l_G(U') \geq \frac{(m+1)(n-m-1)}{2}$.

Розглялнемо дві рівності:

$$l_G(U) = l_{G-v}(U) + |N_G(v) \cap U|$$
$$l_G(U') = l_{G-v}(U) + |N_G(v) \cap (V(G) \setminus U)|$$

Додавши ці два отримаємо

$$l_G(U) + l_G(U') = 2l_{G-v}(U) + d_G(v).$$

Отже

$$\begin{aligned} d_G(v) &= l_G(U) + l_G(U') - 2l_{G-v}(U) \\ &> \frac{m(n-m)}{2} + \frac{(m+1)(n-m-1)}{2} - m(n-m-1) \\ &= \frac{n-1}{2}, \end{aligned}$$

що суперечить умові. □

Теорема 1.22. *[1] Нехай G граф на $n \geq 3$ вершинах. Тоді G s-еквівалентний s-максимальному панциклічному графу тоді і тільки тоді, коли G не s-еквівалентний $\overline{K}_n$.*

1.3 Два-графи та їх еквівалентність класам перемикань

Означення 1.23. Нехай V деяка скінченна множена, тоді визначимо

$$E_3(V) = \{\{u, v, w\} \mid u, v, w \in V, u \neq v, u \neq w, v \neq w\}$$

Означення 1.24. Два-графом називається пара (V, F), де $F \subseteq E_3(V)$ і будь-яка підмножина V кардинальності 4 містить парну кількість елементів F.

Теорема 1.25. *Кожному два-графу на V відповідає клас перемикань на V і навпаки.*

Доведення. Нехай $G = (V, E)$ довільний граф. Множина F 3-ох елементних підмножин V, які містять непарну кількість ребер з E інваріантна під перемиканнями графа G за наслідком 1.6. З леми 1.7 випливає, що (V, F) - два-граф.

Тепер, нехай є довільний два-граф (V, F). Зафіксуємо деяку вершину $u \in V$ та розіб'ємо $V \setminus \{u\}$ довільним чином на дві непересічні множини V_1 та V_2. Побудуємо E таким чином:

- $uv_1 \in E$ для всіх $v_1 \in V_1$;
- $v_1w_1 \in E$ для всіх $v_1, w_1 \in V_1$ таких що $\{u, v_1, w_1\} \in F$;
- $v_2w_2 \in E$ для всіх $v_2, w_2 \in V_2$ таких що $\{u, v_2, w_2\} \in F$;
- $v_1v_2 \in E$ для всіх $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ таких що $\{u, v_1, v_2\} \notin F$.

Таким чином ми з два-графа (V, F) отримали клас графів (V, E). За побудовою, множиною 3-ох елементних підмножин V, які містять непарну кількість ребер з E, буде знов F. За лемою 1.8, клас таких графів є класом перемикань і різні класи перемикань дають різні два-графи. $\square$

2 Деякі властивості класів перемикань

Лема 2.1. *Класи перемикань $[\overline{K}_V]$ складається з усіх повних двочасткових графів на множині вершин V.*

Доведення. Довільний повний двочастковий граф $K_{U,V\setminus U}$ можна отримати з $\overline{K}_V$ перемиканням по U. Тобто $S(\overline{K}_V, U) = K_{U,V\setminus U}$. □

Означення 2.2. Для двох графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ позначимо $G = G_1 \oplus G_2$, де $V(G) = V$, а $E(G) = E_1 \triangle E_2$.

Лема 2.3. $S(G, U) \oplus G = K_{U,V\setminus U}$.

Лема 2.4. *Клас перемикань на V містить рівно $2^{|V|-1}$ граф.*

Доведення. Кількість підмножин V дорівнює $2^{|V|}$, але для будь-якої підмножини U множина $V \setminus U$ дає таке саме перемикання. □

Цікавою властивістю класів перемикань є те, що ми можемо змусити деяку вершину мати заданий набір сусідів

Лема 2.5. *Нехай є граф $G = (V, E), u \in V$ і $A \subseteq V \setminus \{u\}$. Тоді існує єдиний граф $H \in [G]$ такий що сусідами вершини u є вершини з множини A.*

Доведення. Існування. Вершина u є ізольованою в графі $G_u = S(G, N(u))$, тоді перемкнув його по A отримаємо граф H, де u з'єднана лише з вершниами з A.

Унікальність. Нехай існує ще один такий граф H', що у ньому сусідами u є вершини з A. Оскільки H і H' в одному s-класі, то за лемою 2.3 $H \oplus H'$ є повним двочастковим графом $K_{U,V\setminus U}$, для деякої множини $U \subseteq V$. Оскільки в обох графів сусіди вершини u одні й ті самі, то у $H \oplus H'$ вона ізольована, тобто $K_{U,V\setminus U}$ - дискретний граф, отже $H = H'$. □

Наслідок 2.6. *Для будь-якої вершини $u \in V(G)$, $S(G, N_G(u))$ - унікальне перемикання графу G, в якому u - ізольована вершина.*

Наслідок 2.7. *$H \in [G]$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої вершини $u \in V(G)$, $S(H, N_H(u)) = S(G, N_G(u))$.*

Означення 2.8. Введемо доповненя до класу перемикань графу G як

$$\overline{[G]} = \{\overline{H} \mid H \in [G]\}.$$

Лема 2.9. *Для графу* $G = (V, E)$, $[\overline{G}] = \overline{[G]}$. *Більш того, коли* $|V| \geq 3$, $[G] \cap [\overline{G}] = \emptyset$.

Доведення. Будь-який елемент класу $\overline{[G]}$ має вигляд $\overline{S}(G, U)$ для деякої $U \subseteq V$. За пунктом 4 леми 1.3 це те саме що і $S(\overline{G}, U)$, тобто елемент $[\overline{G}]$.

Коли $|V| \geq 3$, виберемо якусь трійку $T \subseteq V$. Очевидно, що парності кількості ребер серед цієї трійки в G і $\overline{G}$ відрізняються. Тоді їх класи перемикань неперетинні за лемою 1.8. □

Означення 2.10. Граф G називається (не)парним, якщо усі його вершини (не)парного степеня.

Наприклад, будь-який ейлеровий граф є зв'язним парним графом і навпаки.

Теорема 2.11. *Нехай граф* G *непарного порядку. Тоді* $[G]$ *містить унікальний парний граф.*

Доведення. Візьмемо множину U вершин з непарним степенем і перемикнемо за нею граф G. Нехай вершина u непарного степеня. Тоді є два варіанти: перна кількість її сусідів має парний степінь, або непарна. У першому випадку після перемикання u втрачає парну кількість сусідів, але отримує непарну, адже всього вершин з парним степенем непарна кількість. У другому - вона втрачає непарну кількість сусідів, а набуває парну. Отже в обох випадках u стає парного степеня. Аналогічно розглядається, коли степінь парний. Тобто $S(G, U)$ - парний граф.

Нехай у класі існує відмнінний від H парний граф, позначимо його H'. Розглянемо граф $H \oplus H'$. За побудовою, він теж має бути парним. Але за лемою 2.3 це є повним двочастковим графом $K_{U', V \setminus U'}$ для деякої $U \subseteq V$. Причому, оскільки всього вершин непарна кількість, то одна з множин U' і $V \setminus U'$ містить непарну кількість, а інша парну. І тоді всі вершини з "парної" частки мають непарний степінь. Суперечність. □

Зауважимо, що друга частина доведення є більш простою, ніж та, що наведена у джерелі [1].

Твердження 2.12. *Якщо повний* k*-частковий граф на* n *вершинах є* s*-максимальним, то кількість вершин у найбільшій частці не більша ніж* $\frac{n+1}{2}$.

Доведення. Нехай $G = K_{n_1,\ldots,n_k}$. Без втрати загальності будемо вважати, що набор чисел впорядкований, тобто $n_1 \leq \ldots \leq n_k$. За теоремою 3.1[On graphs with maximum size in their switching classes], $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$. За побудовою графу, $\delta(G) = n - n_k$.

$$\begin{aligned} n - n_k &\geq \frac{n-1}{2} \\ 2n - 2n_k &\geq n - 1 \\ 2n_k &\leq n + 1 \\ n_k &\leq \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

□

Теорема 2.13. *Нехай G граф парного порядку такий, що $[G]$ містить парний граф. Тоді якщо $[G]$ не містить повний граф, то він містить ейлеровий граф.*

Доведення. Можемо припустити, що граф G парний, а якщо ж це не так, то просто перемкнемо за довільною вершиною. Але він може бути не зв'язним, тобто нам потрібно знайти таке перемикання, щоб воно було парним і зв'язним. Для цього спочатку візьмемо довільну вершину u графа і покладемо $V = V(G)$ та $O = V \setminus (\{u\} \cup N_G(u))$. Зауважимо, що $|O|$ - непарна. Перемкнемо G за $O \setminus \{v\}$ для довільної вершини $v \in O$, $H = S(G, O \setminus \{v\})$. Отриманий граф знов є парним, хоча він знову може бути незв'язним, але його підграф на $V \setminus \{v\}$ є зв'язним. Якщо цей підграф не є повним, то ми можемо обрати вершину $w \in V \setminus \{u, v\}$ таку, що не з'єднана з усіма вершинами з $V \setminus \{v\}$. Перемкнувши за $\{v, w\}$ ми отримаємо зв'язний парний граф, тобто він буде ейлеровим графом. □

Лема 2.14. *Нехай G граф з $\chi(G) = k$. Тоді для будь-якого $H \in [G]$, $k/2 \leq \chi_(H) \leq 2k$.*

Доведення. Нехай $X_1, \ldots, X_k$ - розбиття G для розфарбування на k кольорів. Тоді переминакання за U розбиває кожне X_i на не більш ніж дві множини: $X_i \cap U$ і $X_i \setminus U$. Тобто $\chi(H) \leq 2\chi(G) = 2k$ і за симетрією $\chi(H) \geq \chi(G)/2 = k/2$. □

Наслідок 2.15. *Якщо клас пеермикань містить граф з хроматичним числом більше ніж 4, то він не містить двочасткових графів.*

Теорема 2.16. *Нехай* m *і* M *є мінімальним і макисмальним хроматичними числами в* $[G]$. *Для будь-якого* $k\colon m \leq k \leq M$ *існує* $H \in [G]$ *такий, що* $\chi(H) = k$.

Доведення. Нехай $\chi(G_0) = m$ і $G_{i+1} = H(G_i, v_i)$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$, та $\chi(G_k) = M$. Маємо $\chi(G_{i+1}) \leq \chi(G_i) + 1$ для всіх i, бо в найгіршому випадку ми маємо змінити колір вершини, яку ми перемкнули. Тобто існує така підпослідовність $G_{i_0}, G_{i_1}, \ldots, G_{i_{M-m}}$ така що $\chi(G_{i_j}) = m + j$. $\square$

3 Алгоритми

Будемо вважати, що граф на n вершинах зберігається у вигляді матриці суміжності розміром $n \times n$. Якщо пронумеровати вершини від 1 до n, то у клітинці ij буде 1, якщо між вершинами i та j є ребро, і 0 – якщо нема.

Матриця суміжності графа G

Нижче наведено алгоритм перемикання вершини під номером u.

Algorithm 1 Switch vertex

```
procedure SwitchVertex(G, u)
    S ← G
    for i ← 1, n do
        S_uj ← ¬S_uj
        S_ju ← ¬S_ju
    return S
```

Слід зауважити, що оскільки в роботі розглядаються прості неорієнтовані, то M_{ii} завжди дорівнює 0 і даний алгоритм не "ламає" цю властивість, адже коли $i = u$, відбувається подвійне заперечення.

Для того щоб перемкнути граф за множиною вершин достатньо, за лемою 1.3(3), перемкнути його послідовно по всім вершинам даної множини, тож алгоритм буде виглядати наступним чином.

Algorithm 2 Switch vertices

```
procedure SwitchVertices(G, U)
    S ← G
    for u ← U do
        S ← SwitchVertex(S, u)
    return S
```

Цей алгоритм можна трошки покращити у випадку, коли $|U| > \frac{n}{2}$. З властивості премикання зазначеній у лемі 1.3(1) ми знаємо, що у $S(G,U) = S(G, V \setminus U)$. Таким чином виконавши перевірку на розмір U на початку алгоритму, можна зменшити кільксть потрібних операцій.

Algorithm 3 Switch vertices

```
procedure SwitchVertices(G, U)
    if |U| > |V|/2 then
        U_1 ← V \ U
    else
        U_1 ← U
    S ← G
    for u ← U_1 do
        S ← SwitchVertex(S, u)
    return S
```

Тепер, за допомогою цих алгоримтів і результату 2.7 реалізуюмо перевірку, чи належить граф H класу перемикань графа G.

Algorithm 4 Check two graphs for being s-equivalent

Require: $V(H) = V(G)$

```
procedure CheckSEquiv(H, G)
    for u ← V do
        S_1 ← SwitchVertex(H, N_H(u))
        S_2 ← SwitchVertex(G, N_G(u))
        if S_1 ≠ S_2 then
            return false
    return true
```

Література

[1] J. Hage, Structural Aspects of Switching Classes, 2001

[2] V. Jelínek, E. Jelinkova, J. Kratochvíl, On the Hardness of Switching to a Small Number of Edges, 2016, Conference: International Computing and Combinatorics Conference

[3] S. Kozerenko, On graphs with maximum size in their switching classes, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Volume 56, 2015, pp. 51-61

[4] J. J. Seidel, A survey of two-graphs, Geometry and Combinatorics, 1991, pp. 146-176

[5] J. J. Seidel, More About Two-Graphs, Annals of Discrete Mathematics, Volume 51, 1992, pp. 297-307

[6] J. H. Van Lint, J. J. Seidel, Equilateral point sets in elliptic geometry, Geometry and Combinatorics, 1991, pp. 3-16