Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет інформатики

Кафедра математики

Курсова робота

освітній ступінь – магістр

на тему: «**ВИКОРИСТАННЯ ПРОЦЕСІВ СУБДИФУЗІЇ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ**»

Виконала: студентка 1-го року навчання

напряму підготовки
124 Системний аналіз

Петренко Оксана Ігорівна

Керівник Щестюк Н. Ю.

к. ф.м. н., доцент

Курсова робота захищена

з оцінкою ________________________

«____» _________________ 20____ р.

Київ – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Вивчення процесів субдифузії для моделювання фінансових ринків є складною та цікавою темою, оскільки діяльність фінансових ринків описуються за допомогою процесів, поведінка яких не являється детермінованою, а отже, майбутні значення можуть бути як і передбачуваними, так і випадковими. На ціну ризикових активів на фондовому ринку впливає багато факторів, які неможливо описати без стохастичних процесів. Для моделювання ризикових активів в класичних моделях ринку застосовується процес дифузії, який має в собі Броунівський рух, що забезпечує випадковість майбутнього значення величини. Деякі вчені займалися розробкою систем для моделювання фінансових ринків, такі як: Луї Башельє, який розробив модель Башельє із застосуванням Арифметичного Броунівського Руху; а також вчені Фішер Блек та Майрон Шоулз, які займалися розробкою моделі із використанням Геометричного Броунівського Руху.

Проте на ринках з неліквідними активами часто спостерігається відносно тривалі періоди без змін. Оскільки процеси Леві та Броунівський рух описують тільки неперервний рух, а також моделювання розривів, спричинених стрибками, тому процеси дифузії не можуть гарантувати успішне моделювання такого аномального процесу, як періоди без будь-якої торгівлі на фінансовому ринку. Тому в даному випадку для комп'ютерного моделювання фінансових ринків потрібно застосовувати процес субдифузії, який гарантує появу сталих проміжків, під час яких ціна активів не змінюється.

Виходячи з міркувань щодо доцільного створення моделі ризикових активів ***за мету даної роботи*** було поставлене використання процесів субдифузії для моделювання фінансових ринків.

Мета роботи зумовила наступне наукове завдання:

1. З'ясувати, як з’являється стохастичне диференціальне рівняння, яке описує Арифметичний і Геометричний Броунівський рух для моделювання цін акцій.
2. Навчитись моделювати за допомогою ітераційної схеми, або ж методом Монте-Карло.
3. З'ясувати, як і чому з’являється стохастичне диференціальне рівняння, яке описує процеси субдифузії.
4. Запропонувати ітераційну схему для процесів субдифузії і здійснити комп'ютерне моделювання процесу.
5. Здійснити аналіз для конкретних фінансових даних

Застосування та симуляція процесу субдифузії дозволяє отримати більш природній графік моделі фінансового ринку, тим самим допомагає розширити інструментарій для прогнозування цін на акції ринку.

Робота складається з двох розділів.

Перший розділ присвячено дослідженню та опису процесів дифузії. Охарактеризовано та змодельовано дві основні моделі Башельє та Блека-Шоулза.

Другий розділ присвячений дослідженню та аналізу процесу субдифузії та проектуванню її на вже наведені моделі в першому розділі.

Створено програмний продукт, який призначений для комп'ютерного моделювання фінансових ринків з використанням процесів дифузії та субдифузії.

І РОЗДІЛ. ПРОЦЕСИ СУБДИФУЗІЇ ТА ЇХНЄ КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Загальна характеристика процесу дифузії

Існує проблема, яка фактично ігнорувалася традиційними підходами в економіці та фінансах, а саме відсутність доказів існування саморегуляції ринків. Фактично ринки ведуть себе більш непередбачувано та нестабільно, ніж в традиційних класичних теоріях. В той час, як традиційна економічна теорія базується на принципах ринкової рівноваги, фінансові ринки демонструють більше стохастичну динаміку. Коли вже вчені-економісти зрозуміли, що в економічному інструментарії недостатньо способів опису певних фінансових процесів, почали досліджувати їх з боку інших наук, таких як фізика. За допомогою утворення такої науки, як еконофізика, було використано концепції статичної фізики при дослідженні фінансових ринків. Одним із таких понять є процес дифузії, який першочергово був описаний та використаний для дослідження фізичних процесів.

У фізиці дифузія - це процес переміщення частинок речовини в напрямку меншої її концентрації. В результаті дифузії відбувається вирівнювання складу речовини і рівномірне заповнення нею всього обсягу. Процеси дифузії протікають в газоподібних, рідких і твердих речовинах; дифундувати можуть як однорідні речовини, так і атоми різнорідних речовин в межах свого обсягу. Дифузія являється процесом на молекулярному рівні та визначається випадковим характером руху окремих молекул.

Вчені ще на початку XX ст. змогли перенести дане фізичне поняття з концепцією “випадкового блукання” на фінансовий світ для аналізу фінансових цін. Відомий французький вчений Луї Башельє разом із своїм учнем А. Пуанкаре у своїй дисертації “Theorie de la speculation” 1900 р. вперше спробував описати еволюцію цін на акції (на Паризькому ринку), опираючись на концепції теорії ймовірностей. В основу вчений взяв процес Броунівського руху, який було описано англійським ботаніком Р. Броуном у 1820 р. на експерименті поведінки частинок пилку в воді, результатом чого стало відкриття процесу хаотичного руху в непередбачуваних траєкторії цих частинок.

1.2 Загальне рівняння дифузії (рівняння Іто)

Координата броунівської частинки в воді або ціна на фінансовому ринку x мають траєкторію з дуже нерегулярними зламами. Найпростішим її описом буде модель адитивного незалежного дискретного випадкового блукання [1]. Уявімо, що початкове значення $x = x_0$, і x відчуває $t = 1, 2,...$ випадкових гаусових змін (іншими словами поштовх), кожен з яких має волатильність σ. Волатильність в математичному світі називається середньоквадратичним відхиленням. Його квадрат σ^2- це дисперсія або варіація. У фінансовому розумінні волатильність - це розкид, відхилення ціни біржового товару за проміжок часу (день, місяць, тиждень, рік) від цінового рівня або основного напрямку ринку. Розраховується волатильність зазвичай у відсотках від ціни активу. На ринку чим сильніше ціна активу скаче то вгору, то вниз, тим вище розмах коливань ціни активу, тим вище його волатильність [2]. І навпаки, коли ринок заспокоюється, спадає і волатильність, оскільки розмах коливань ціни зводиться до мінімуму [1].

В результаті x буде дорівнювати

$$x_t = x_0 + \sigma * (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... + \varepsilon_t),$$

(1.1)

де $\varepsilon \sim N(0, 1)$- гаусові числа з нульовим середнім значенням та одиничною дисперсією. Поки t є цілим числом, проте щоб перейти до неперервного часу, потрібно використати дискретну змінну Вінера

$$W_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_t = \varepsilon\sqrt{t} \quad (1.2)$$

Варто зазначити, що Вінерівський процес - це математична модель Броунівського Руху з неперервним часом. Таким чином W - багатовимірна випадкова величина.

Розглянемо дану дискретну модель блукання, в якій крім випадкових поштовхів ε на кожному кроці ще виникає постійний зсув на величинуμ_0[1]. Через *n* таких кроків в результаті значення х буде [1]

$$x = x_0 + \mu_0 n + \sigma_0 \sqrt{n}\varepsilon \tag{1.3}$$

де μ_0- це параметр зсуву процесу. Якщо μ_0>0, в середньому траєкторія буде рухатися вгорі, інакше - вниз. Накопичені стохастичні зміни $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_t = \varepsilon\sqrt{n}$ пропорційно гаусовій змінній $\varepsilon \sim N(0, 1)$ з середнім нульовим та одиничною дисперсією. Нехай тривалість кроку -Δt. Тоді через проміжок часу t - t_0 x становитиме:

$$x(t) = x(t_0) + \mu * (t - t_0) + \sigma\sqrt{t - t_0}\varepsilon$$

(1.4)

Розглянемо тоді зміну $dx = x(t) - x(t_0)$ за безкінечно малий інтервал $dt = t - t_0$. В даному випадку dx буде

$$dx = \mu dt + \sigma\delta W$$

(1.5)

в якому $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$. Процес, який підчиняється рівнянню (1.5) і є неперервним Вінерівським процесом. Враховуючи те, що розглядається безкінечна кількість адитивних змін ($n \rightarrow \infty$), то гаусовість ε_i незначна. Важливим є факт їх незалежності.

Стохастичне рівняння Іто називають узагальненим вінерівським процесом, в якому параметри a і b являються функціями, які залежать від змінної *x* та часу *t* [4].

Очікувана швидкість дрейфу і дисперсія цього процесу з часом змінюються. За невеликий проміжок часу від t до Δtзмінна x змінюється від x до Δx, де

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (1.6)$$

Загальні процеси Іто представляють собою “деформацію” простого вінерівського блукання за допомогою коефіцієнту зміни першого порядку $a(x, t)$та коефіцієнту другого порядку $b(x, t)$. Тоді зміна dx матиме вигляд [1]

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\delta W \qquad (1.7)$$

де $\delta W = \varepsilon\sqrt{dt}$ - безкінечно малий вінерівський “шум”, а $\varepsilon \sim N(0, 1)$. Функція $a(x, t)$ - є коефіцієнтом зносу, а $b(x, t)$ - коефіцієнтом волатильності, квадрат якого $b^2(x, t)$ називається дифузією.

1.3. Моделювання процесу дифузії

Для того, щоб змоделювати процес в динаміці, необхідно ітераційно застосувати відношення зміни х до його попереднього значення в часі. Рівняння Іто (1.6) дозволяє легко моделювати часову динаміку довільного стохастичного процесу за допомогою ітераційної схеми [1]

$$x_{k+1} = x_k + a(x_k, t_k)\Delta t + b(x_k, t_k)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_k \qquad (1.8)$$

Ітераційна схема полягає в наступному: для цього обирається малий інтервал часу Δtта початкове значення x_0. Потім генерується розподілена випадкова величина ε_1та розраховується наступне число x_1. Далі значення x_1 підставляється в x_0, і час посувається до $t_1 \Rightarrow t_0 + \Delta t$. В результаті отримаємо послідовність випадкових чисел x_0, x_1, ... Даний графік має характерну ламаність, типову для Броунівської частинки або динаміки цін на фінансовому ринку.

Для дослідження дифузії в даній роботі було обрано ітераційну схему Ейлера. Проведемо одну ітерацію. В якості нульового наближення обрано початкову умову x_0. Тоді постійні величини будуть дорівнювати $a_0 = a(x_0)$і $b_0 = b(x_0)$, а перша ітерація матиме вигляд [1]:

$$x_1(t) = x_0 + a_0 t + b_0 W_t$$

(1.9)

Так як $W_t = \varepsilon\sqrt{t}$, при $t \to 0$, отримаємо ітераційну схему Ейлера для стохастичного диференціального рівняння для першої ітерації:

$$x_1(t) = x_0 + a_0 t + b_0 \varepsilon\sqrt{t}$$

Відповідно зрозуміло, що вона працює краще у тому випадку, якщо пройшло якомога менше часу *t* від начального моменту $t_0 = 0$.

Для загального стохастичного диференціального рівняння (1.6), знос та волатильність якого не залежать від часу:

$$dx = a(x)dt + b(x)\delta W,$$

(1.10)

базова ітераційна схема Ейлера на основі рівняння (1.7) матиме вигляд :

$$x_{k+1} = x_k + a_k \Delta t + b_k \varepsilon_k \sqrt{\Delta t}, \qquad (1.11)$$

де $\varepsilon_k \sim N(0, 1)$, а $a_k = a(x_k)$, $b_k = b(x_k)$, $\varepsilon_k\sqrt{\Delta t} = W_{\Delta t}$.

Для моделювання процесу дифузії також можливо застосувати схему Мілстейна. Вона трохи відрізняється від ітераційної схеми Ейлера та базується на методі послідовних наближень, проте в даному дослідженні буде застосовуватись саме ітераційна схема Ейлера.

1.4 Моделювання процесу дифузії для Арифметичного Броунівського Руху (модель Башельє)

На сьогоднішній час, кажучи про форми і методи спекуляції і інвестування на ринку цінних паперів, неможливо не згадати про похідні контракти. Сам механізм звернення таких контрактів являється потужним спекулятивним потенціалом [3]. Це пов'язано з тим, що для покупки похідного контракту і інвестору не потрібно вносити всю його вартість, а лише її частину - маржу (як правило, маржа становить 50 відсотків). Таким чином, прибутковість на вкладені кошти стає в два рази більше, причому як позитивна, так і негативна. Найбільш поширені два види похідних контрактів - ф'ючерс і опціон. Якщо спекулятивний потенціал ф'ючерсу становить лише маржинальний механізм, то в разі опціону все цікавіше. Крім властивостей ф'ючерсу опціон має важливу властивість: покупець опціону обмежує свої збитки, і за надання такої можливості опціон має свою власну вартість - премію. На момент покупки опціону можна робити будь-які висновки про майбутні доходи на підставі поточної ціни спот і ціни виконання опціону (ціни страйк). Для покупця опціону колл добре, якщо ціна спот перевищує ціну страйк - в цьому випадку говорять, що опціон "в грошах" або має внутрішню вартість. Опціон пут є опціоном "в грошах" або має внутрішню вартість, якщо навпаки, ціна страйк перевищує ціну спот. Очевидно, що премія за опціоном "в грошах" буде вище, ніж за опціоном "без грошей", так як ризик понести збиток у продавця такого опціону більше. Звідси можна зробити висновок про зворотну залежність цін на опціони пут і колл.

Постулат, який лежить в основі сучасної інвестиційної теорії, на якому побудовані три базові інвестиційні моделі - модель формування оптимального портфеля Марковіца, модель ціноутворення ринку капіталів Шарпа, модель ціноутворення опціонів Блека-Шоулза, був сформульований і перевірений експериментально ще в 1900 році. У цьому році французький математик Луї

Башелье захистив докторську дисертацію під назвою "Теорія спекуляції". Його робота не була належним чином оцінена і більше 40 років про неї ніхто не згадував. Тільки в 40-х роках 20-го століття темою випадкових блукань біржових котирувань зацікавився фізик і математик Маурі Осборн. Потім вже в 50-х стали проводити дослідження і будувати моделі Гаррі Марковіц, Вільям Шарм, Пол Самуельсон, Юджин Фама та інші. Тоді дисертація Башелье вийшла з небуття [3].

У своїй праці Луї Башельє просував ідею про хаотичність цін на фінансові активи. Він довів, що середня дохідність інвестування наближається до нуля, а її дисперсія пропорційна $\sqrt{t}$, де t - дискретний час або кількість послідовних спостережень через рівні проміжки часу

$$X_{t+1} = X_t + \varepsilon_i, \quad (1.12)$$

На думку вченого, ціни на акції змінюють свої значення в моменти часу Δ, 2Δ, 3Δ, ..., kΔ таким чином, що [4]:

$$X_{k\Delta} = X_0 + \varepsilon_{\Delta} + \varepsilon_{2\Delta} + \varepsilon_{3\Delta} ... + \varepsilon_{k\Delta}, \quad (1.13)$$

де $\varepsilon_{i\Delta}$- незалежні однаковим чином розподілені випадкові величини, які приймають значення $\pm\ \sigma\sqrt{\Delta}$з ймовірністю ½;

X_0 - ціна активу на початок спостережень;

В подальшому перетворення призводять формули (1.12) та (1.13) до вигляду:

$$X_t = X_0 + \ \sigma W_t, \text{ де} \quad (1.14)$$

X_t - ціна активу в момент t;

X_0 - ціна активу в момент 0;

σ- стандартне відхилення ціни активу;

W_t- Броунівський рух або Вінерівський процес, тобто процес з незалежними, нормально розподіленими приростами та неперервною траєкторією;

Якщо розглядати модель в динаміці, тоді формула Башельє матиме вигляд[1]:

$$dX_t = \mu dt + \sigma\delta W$$

(1.15)

Тобто модель ідентична дискретні моделі блукання із застосуванням Броунівського руху.

Якщо модель розглядати за допомогою ітераційної схеми, застосувавши формулу (1.7) модель Башельє матиме вигляд:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\varepsilon\sqrt{dt} \qquad (1.16)$$

Башельє застосував до моделі Арифметичний Броунівський Рух. Арифметичне Броунівське блукання моделюється як суми випадкових доданків. В даному випадку коефіцієнт зносу $a(x, t)$ та $b(x, t)$ є константними і не залежать від t та x. В моделі Башельє параметри зносу $a(x, t) = 0$ та волатильності $b(x, t) = 1$.

Початкові параметри для моделі мають такі значення:

- $t_0 = 0$;
- $x_0 = 1$;
- step = 1/252 - довжина кроку. В реальному часі дорівнює одному робочому календарному дню
- num = 500 - кількість точок для табуляції (кількість ітерацій);

Програмний продукт написано мовою Python із застосуванням таких бібліотек: matn, numpy, matplotlib.pyplot. Програмний код для комп’ютерного моделювання моделі Башельє наведений в Додатку А.

В результаті із використанням вище зазначених параметрів було отримано графік моделі Башельє з Арифметичним Броунівським Рухом.

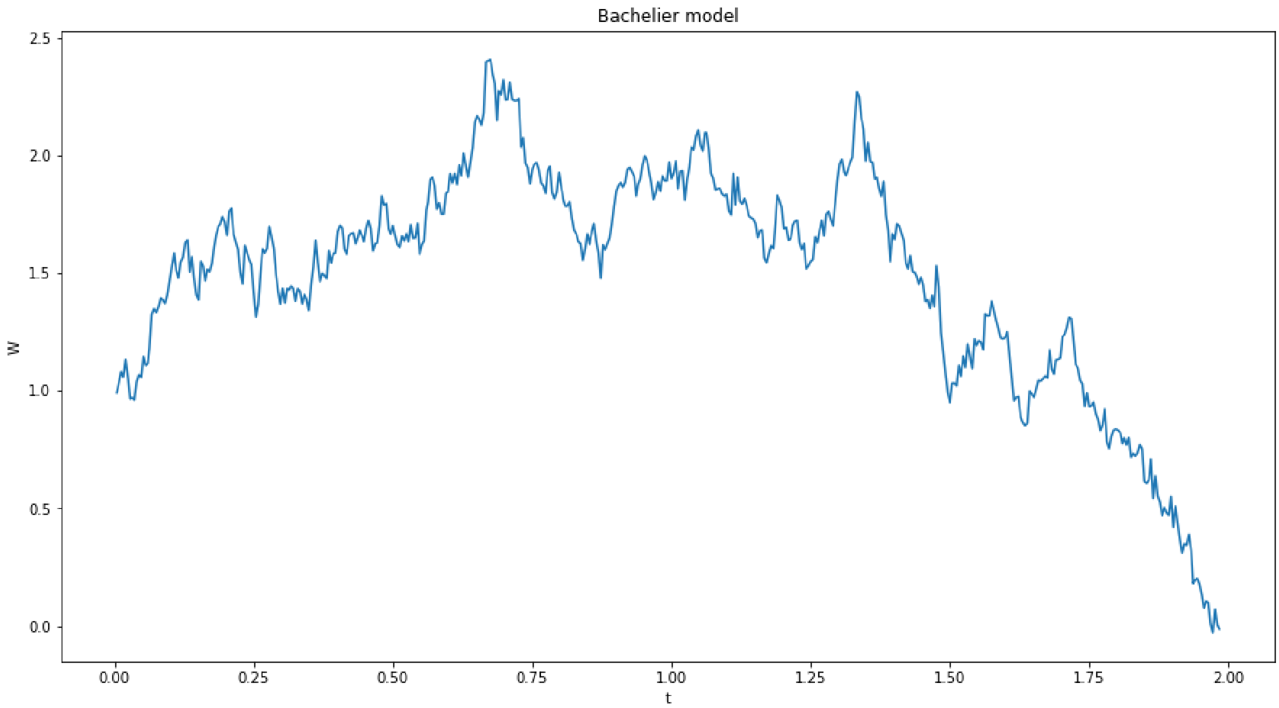

Рис. 1.1 - модель Башельє з Арифметичним Броунівським Рухом

Початкове значення x_0 також може бути нульовим або будь-яким іншим, оскільки в моделі Башельє це початкова ціна на акції в момент початку спостереження за системою.

Слід зазначити, що в своїх побудовах Башелье допускає неточність. Варто було оперувати не з цінами, а з логарифмами цінових збільшень. Однак навіть з урахуванням допущеної неточності Башелье зумів отримати для математичного очікування сумарного виграшу, що (в припущенні, що процентна ставка банківського рахунку $i = 0$) є значенням «справедливої» вартості (премії), яку покупець стандартного опціону-кола повинен заплатити продавцю опціону, яка зобов'язалася продати покупцеві акції в момент виконання T за ціною виконання K. Якщо $NT > K$, то покупець опціону має сумарний виграш, рівний $(NT - K) = CT$, оскільки він може купити акції за ціною K і тут же продати їх за дорожчою ціною NT, якщо ж $NT < K$, то покупець просто не пред'явить опціон до виконання і його втрати рівні виплаченої їм премії CT. У моделі Башельє ціни приймають і негативні значення (невдалий вибір змінної: ціни замість логарифмів цін), і тому вона не може вважатися адекватно відображає реальну картину. Тим не менш, вона становить величезний інтерес з різних точок зору - як історично перша модель, як перша модель цінової дифузії, як модель, яка є без арбітражною, тобто фактично заснованої на концепції ефективного ринку. Тому, для дослідження зміни цін на активи на фінансовому ринку частіше застосовують модель Блека-Шоулза.

1.5 Моделювання процесу дифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

Black-Scholes Option Pricing Model широко поширена на практиці і служить для визначення теоретичної ціни на колл і пут опціони. Модель Блека-Шоулза використовується для оцінки різних цінних паперів і власного капіталу бізнес-структур, що залучають позикові кошти з метою фінансування своєї діяльності. Формула має на увазі наявність ключового елемента визначення опціонної вартості. Їм є приблизна волатильність (показник мінливості ціни) акцій.

У своїх роботі Блек та Шоулз використовують неперервну дифузію, а саме замість Арифметичного Броунівського Руху Геометричний. Геометричне Броунівське блукання моделюєтсья як добутки випадкових факторів. Різниця між Арифметичним і Геометричним рухом полягає в тому, що арифметичний тип руху має незалежні, однаково розподілені кроки, тоді як геометрична версія має незалежні, однаково розподілені співвідношення між послідовними факторами. Тобто, модель Блека-Шоулза працює тільки при додатних цінах на ф'ючерси, в той час як модель Башельє може мати від’ємні значення.

Формула дифузії для Геометричного Броунівського Руху, а саме моделі Блека-Шоулза має вигляд [11]:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma\delta W_t$$

(1.17)

Модель Блека-Шоулза можна віднести до логнормальних моделей, оскільки модель має мультиплікативний характер взаємодії, містить тільки додатні ціни на ф'ючерси, а також логарифми доходностей за будь-які інтервали часу, розраховані за формулою (1.17) будуть розподілені за нормальним законом.

По суті, формула дифузії для Геометричного Броунівського руху є продиференційована по X_t формула дифузії для Арифметичного Броунівського Руху Башельє (1.15).

Ітераційно можна зобразити модель таким чином:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)\varepsilon\sqrt{dt} \qquad (1.18)$$

При чому, функції параметрів зносу $a(x,t)$ та волатильності $b(x,t)$ в даному випадку залежатимуть від x. На кожному кроці параметри зносу та волатильності розраховуватимуться за таким принципом: поточне значення x * константне значення коефіцієнту. З допоміжними функціями можна ознайомитись в Додатку Ж.

Із програмною реалізацією процесу дифузії для моделі Блека-Шоулза на мові Python можна ознайомитись в Додатку Б.

В якості результату було отримано графік моделі із застосуванням формули (1.18).

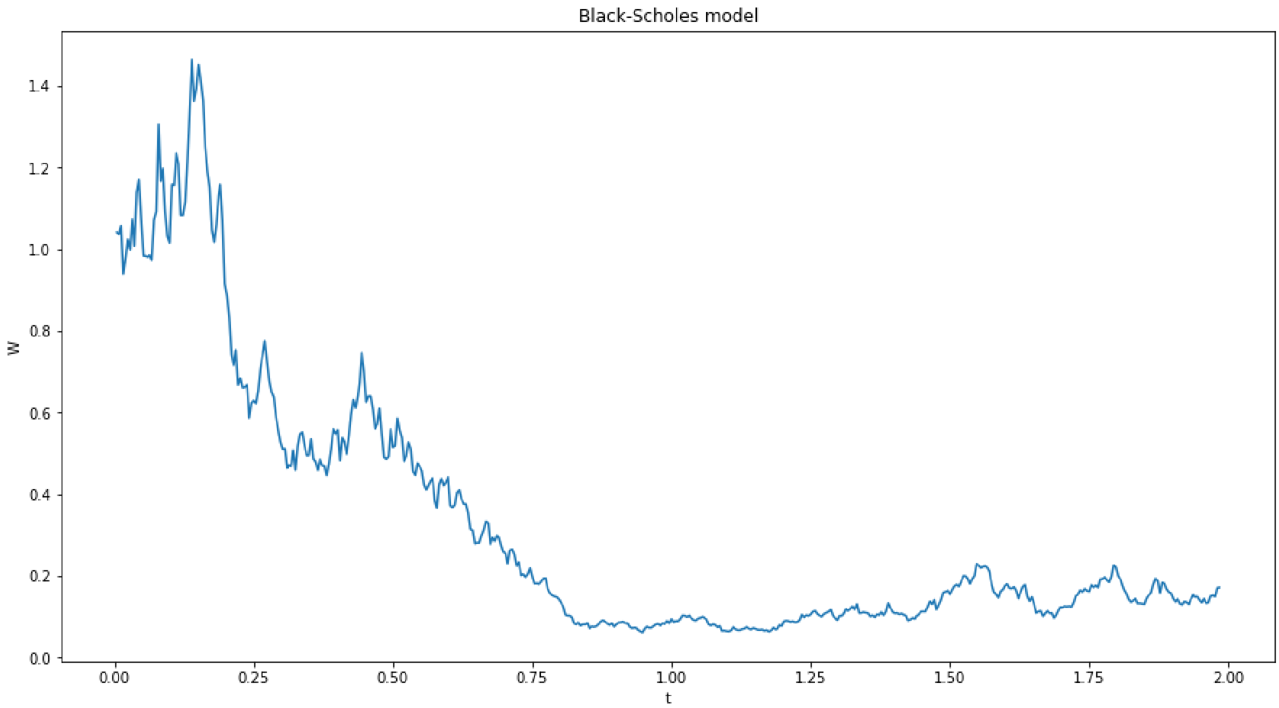

Рис. 1.2 Модель Блека-Шоулза із Геометричним Броунівським Рухом

За початкові параметри для комп’ютерного моделювання було взято ідентичні параметри, як і для моделі Башельє, а саме: t_0 = 0; x_0 = 1; step = 1/252; num = 500;

Отже, в даному розділі було охарактеризовано процес дифузії та застосування його на двох моделях формування цін на деривативи на фінансовому ринку. Проте існує більш вдалий процес для моделювання ситуацій із цінами на фінансовому ринку.

II РОЗДІЛ. ПРОЦЕСИ СУБДИФУЗІЇ ТА ЇХНЄ КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1 Загальна характеристика процесу субдифузії

Дифузію можна спостерігати майже скрізь: у матеріальному світі (дифузія частинок, атомів, молекул, білків, цитоплазматичних макромолекул) та в не матеріальному світі людської цивілізації на різних рівнях суспільних організацій (дифузія ідей, думок, інновацій, значення цін). Як вже зазначалось раніше, фізичний архетип дифузії - це броунівський рух, що виникає внаслідок взаємодії частинки з навколишнім середовищем. Загалом, в дифузія характеризується лінійним співвідношенням між середнім квадратичним переміщенням (Mean square displacement - MSD) та часом та має коефіцієнт $\alpha = 1$. Будь яке зміщення від нормального лінійного співвідношення класифікується як аномальна дифузія. У випадку супердифузії MSD зростає з часом швидше, тому $\alpha > 1$. В той час, як для субдифузії MSD зростає повільніше, ніж при звичайній дифузії, тому $0 < \alpha < 1$.[9]

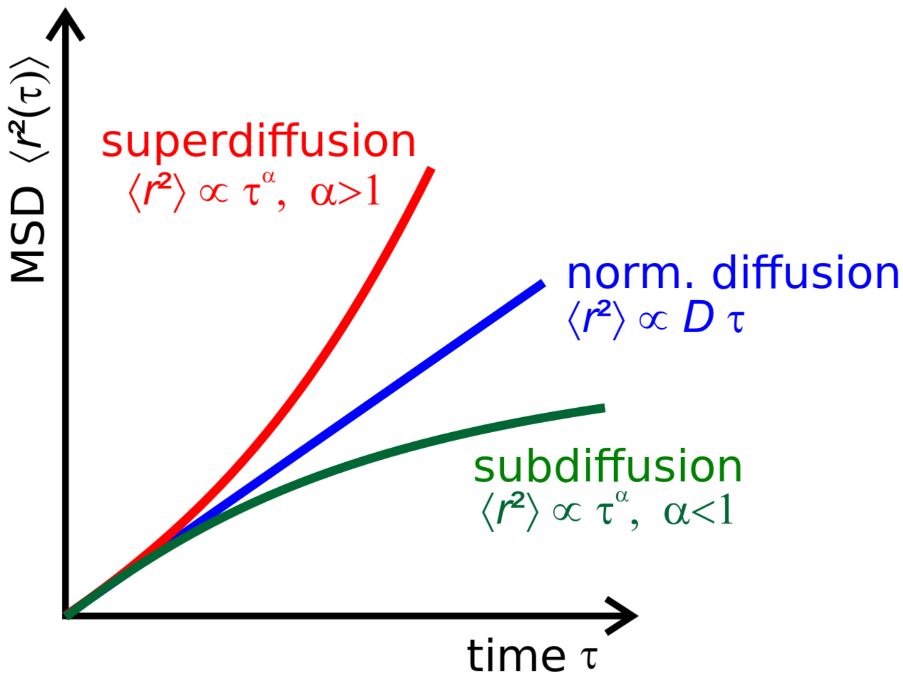

Рис. 2.1 Графічне зображення різновидностей дифузії

Поняття субдифузії прийшло у фінансовий світ із фізики, яке є добре ідентифікованим явищем у статистичній фізиці. Щільність субдифузійного процесу можна описати через рівняння дробового Фоккера-Планка (FFPE). Це рівняння було отримано із схеми випадкового блукання у безперервному часі із довгим часом очікування з великими. З тих пір воно стало стандартним математичним інструментом при аналізі складних систем [6].

На фінансових ринках часто відбуваються субдифузійні процеси, які характеризуються відсутністю торговельних контрактів або ж сталою ціною на активи. В такому випадку MSD ціни на активи змінюється повільніше, ніж проходить календарний час. Тому в даному розділі буде розглянуто застосування процесу субдифузії для моделей Башельє та Блека-Шоулза.

2.2 Характеристика та комп’ютерне моделювання субординатора

Для того щоб реалізувати процес субдифузії для моделей Броунівського Руху, необхідно застосувати певний стохастичний процес. Математично фундаментальний підхід до опису комбінованого процесу базується на техніці субординування, яку вперше ввів Бохнер [7].

По суті, субординатор - це стохастичний процес із позитивними неспадними траєкторіями, значення якого є додатними, а аргументом є календарний час, який відповідно також невід’ємний.

Для реалізації в даному комп'ютерному продукті було використано наступний субординатор: процес Леві з експонентою Лапласа у випадку α -стабільності (α-stable case), тобто α-стабільний закон, який є найвидатнішим представником класу важкохвостих (heavy-tailed) розподілів. У α-стабільному випадку показник Лапласа в задається формулою [6]

$$\Psi(u) = u^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1 \tag{2.1}$$

У випадку α-стабільності субординатор буде набувати такого вигляду

$$T_{\psi(\delta n)} = T_{\psi}\delta(n - 1) + \delta^{1/\alpha}\xi_n$$

(2.2)

Враховуючи властивість процесу Леві, початкове значення субординатора набуватиме значення

$$T_{\psi}(0) = 0 \qquad (2.3)$$

А також:

$n = 1, 2, \ldots \in N$;

$\delta > 0$- довжина кроку.

ξ_n- незалежна і однаково-розподілена позитивна α-стабільна випадкова величина, формула якої набуває вигляду

$$\xi_n = \frac{sin(\alpha(V+c_1))}{(cos(V))^{1/\alpha}} \left(\frac{cos(V-\alpha(V+c_1))}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} ,$$

(2.4)

в якій:

$c_1 = \pi/2$;

V - рівномірно розподілена випадкова величина на проміжку $(-\pi/2, \pi/2)$;

W - експоненціально розподілена випадкова величина з $\beta = 1$;

У фінальному результаті графік субординатора матиме вигляд:

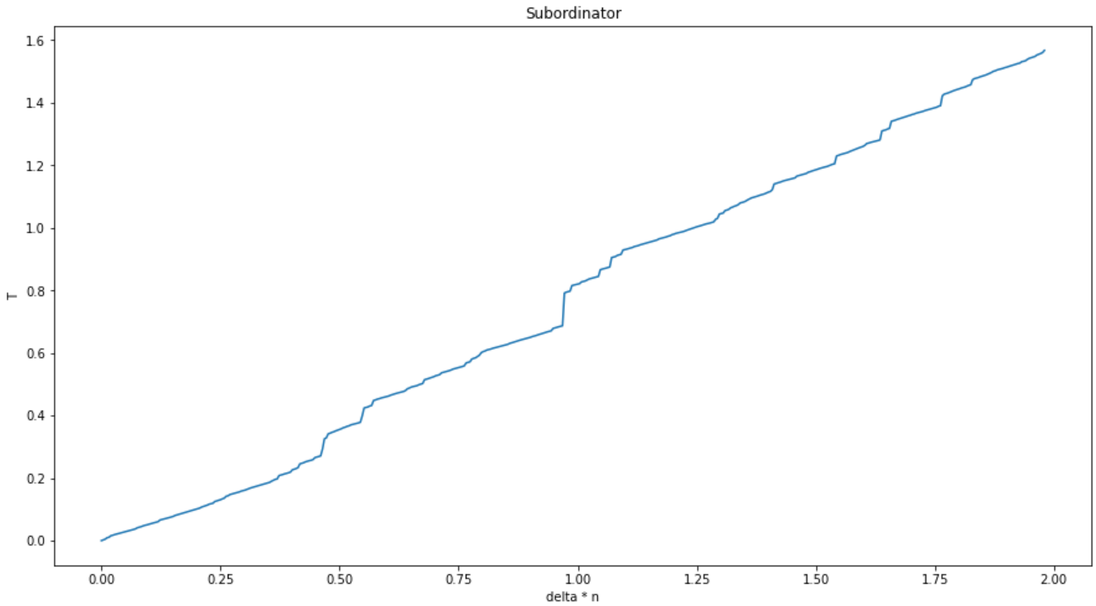

Рис. 2.2 Субординатор у вигляді процесу Леві з з експонентою Лапласа у випадку α-стабільності (α-stable case) з коефіцієнтом α=0.9

В Рис. 2.2 було застосовано коефіцієнт α=0.9. При моделюванні субординатора даний коефіцієнт показав найвдаліший результат. Проте рекомендоване значення α=0.5 для обраного субординатора у вигляді процесу Леві не показав бажаного результату.

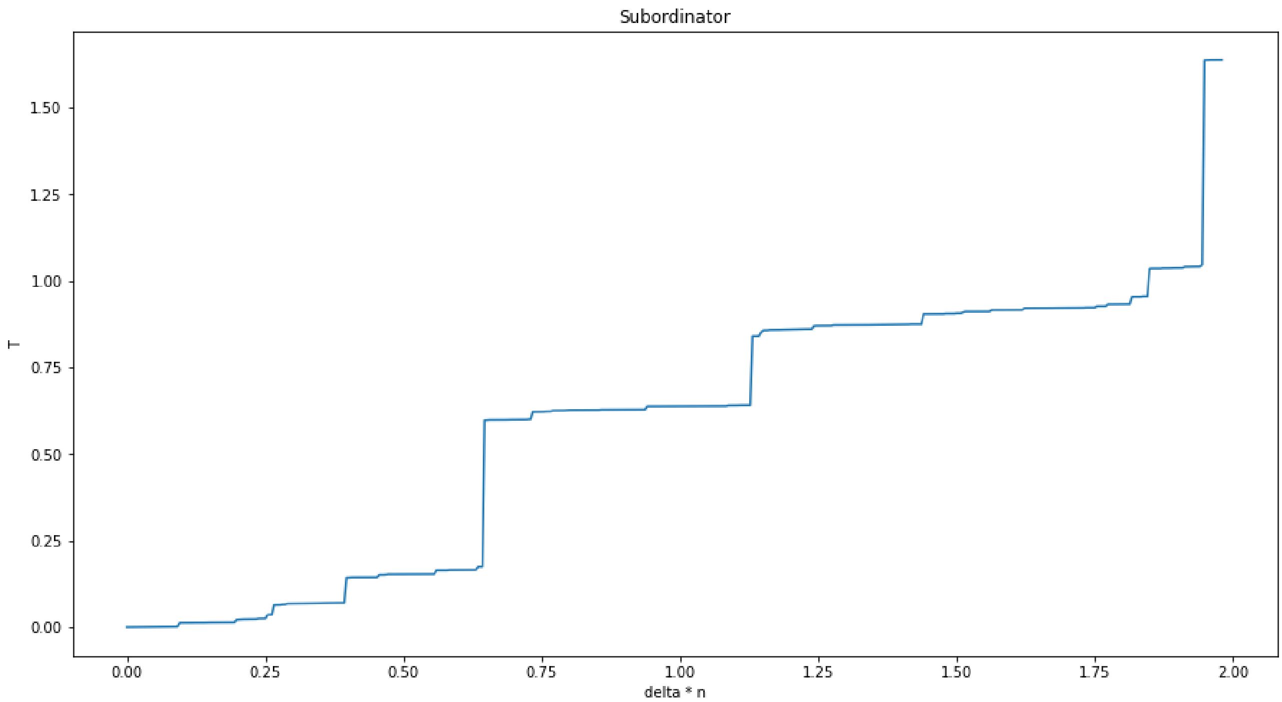

Рис. 2.3 Субординатор у вигляді процесу Леві з з експонентою Лапласа у випадку α-стабільності (α-stable case) з коефіцієнтом α=0.5

Графік характеризується стрімкими ривками, що з одного боку відображає принципи субординатора, такий як позитивна не спадна траєкторія, проте перенісши процес субдифузії з α-коефіцієнтом 0.5 на моделі, можна буде отримати недостовірний графік з довготривалими періодами без змін. Для кращого моделювання підходить не спадна траєкторія з невеликими поступовими додатними змінами між точками графіка.

Детальніше програмна реалізація субординатора описана в Додатку В. Наступним кроком для продовження реалізації процесу субдифузії для обраних моделей необхідно застосувати вже запрограмований субординатор на обернений субординатор.

2.3 Характеристика та комп’ютерне моделювання оберненого субординатора

Обернений субординатор буде застосовуватися в моделюванні процесів субдифузії. Субдифузія допускає зручне представлення, якщо у рівнянні дифузії замінити календарний час на обернений субординатор (inverse subordinator). Оберненим субординатором також називається hitting time. При вивченні стохастичних процесів у математиці час удару (hitting time або час першого потрапляння) - це перший момент, коли даний процес "потрапляє" в задану підмножину простору станів. Час виходу та час повернення також є прикладами hitting time.

Час удару нам необхідний для того, щоб дізнатись час зупинки, або stopping time. У теорії ймовірностей, зокрема при вивченні стохастичних процесів, час зупинки (також час Маркова, момент Маркова, необов'язковий час зупинки або необов'язковий час) є специфічним типом "випадкового часу":

випадкова величина, значення якої інтерпретується як час, коли даний стохастичний процес виявляє певну поведінку, що представляє інтерес. Час зупинки часто визначається правилом зупинки, механізмом прийняття рішення про те, продовжувати чи зупиняти процес на основі теперішньої позиції та минулих подій, і який майже завжди призведе до рішення зупинитися в якийсь кінцевий час. Інакше кажучи, час зупинки (stopping time) для рандомного процесу W_t є рандомним часом τ, при якому ми знаємо, що потрібно зупинитись в час t. Значення залежить тільки від історії процесу до теперішнього моменту. Кожен stopping time може бути hitting time. В даному випадку hitting time - це перший випадок, коли рандомний процес W досягає певного заданого рівня.

В даному випадку загальна формула оберненого субординатора має вигляд[8]:

$$S_{\psi}(t) = inf\{\tau > 0 : T_{\psi}(\tau) > t\}, \quad (2.5)$$

Запрограмувати обернений субординатор можна методом Монте-Карло. В загальному, метод Монте-Карло - група чисельних методів для вивчення випадкових процесів. Суть методу полягає в наступному: процес описується математичною моделлю з використанням генератора випадкових величин, модель багаторазово обраховується, на основі отриманих даних обчислюються імовірнісні характеристики даного процесу.

Тоді за методом Монте-Карло обернений субординатор буде обраховуватись таким чином [8]:

$$S_{\psi\delta}(t) = (min\{n \in N : T_{\psi(\delta t)} > t\} - 1)\delta, \quad (2.6)$$

де $T_{\psi(\delta t)}$- субординатор, розрахований за формулою (2.2).

Графік оберненого субординатора також характеризується додатною не спадною траєкторією.

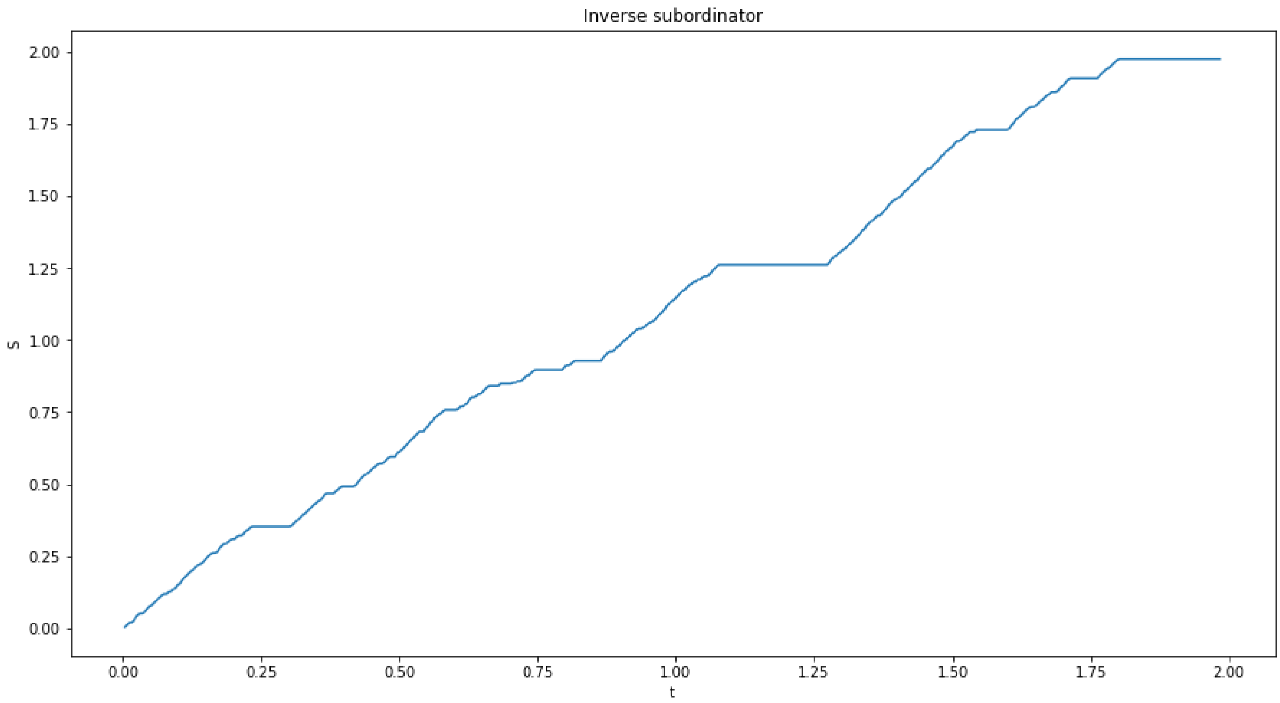

Рис. 2.4 Обернений субординатор

Якщо у процесах дифузії в якості аргумента календарний час замінити на функцію оберненого субординатора, тоді процес дифузії перетвориться на процес субдифузії.

2.4 Моделювання процесу субдифузії для Арифметичного Броунівського Руху (модель Башельє)

Одним із завдань даного дослідження - це побудова Арифметичного Броунівського Руху із застосуванням процесу субдифузії. У даному дослідженні запропоновано розширити модель Башельє так, щоб вона відображала субдифузійний характер динаміки базових активів. Властивість субдифузії проявляється випадковими (нескінченно діленими) періодами часу, протягом яких ціна активу не змінюється. Модель курсу акцій з такими характеристиками - це Арифметичний Броунівський Рух. Структура цього процесу узгоджується з двоступеневим сценарієм, що лежить в основі механізму аномальної дифузії.

Наступним кроком стає розширення вже існуючої моделі Башельє за допомогою заміни календарного часу t на вже побудований обернений субординатор. Дана зміна перетворює графік на більш реалістичний до графіку цін на фінансові активи. Утворюються деякі сталі проміжки стагнації, при яких значення функції не змінюється.

Формула субдифузії для моделі Башельє матиме вигляд [6]:

$$dX_{S_t} = \mu\, d\,S_t + \delta\, dW_{S_t}, \tag{2.7}$$

де S_t- обернений субординатор, розрахований за формулою (2.6).

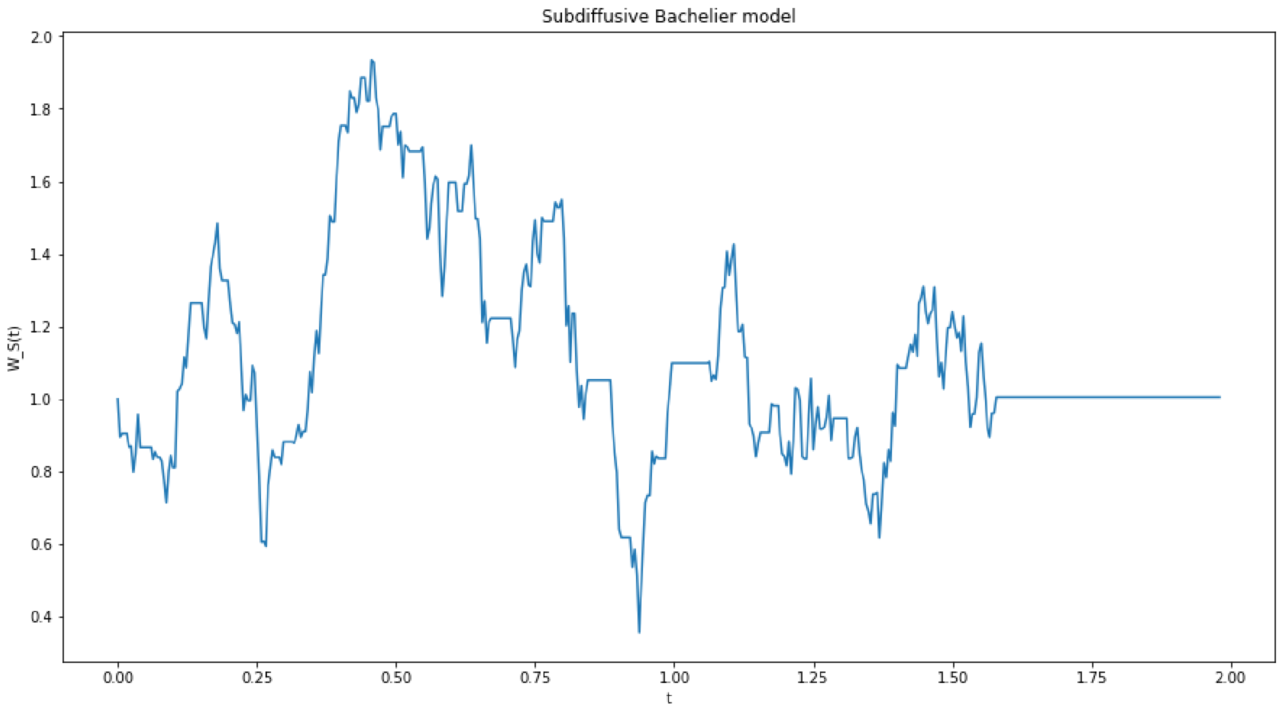

Рис. 2.5 Субдифузія для Арифметичного Броунівського Руху (модель Башельє)

В той час при однакових значеннях випадкових величин графік дифузії для Арифметичного Броунівського Руху матиме вигляд:

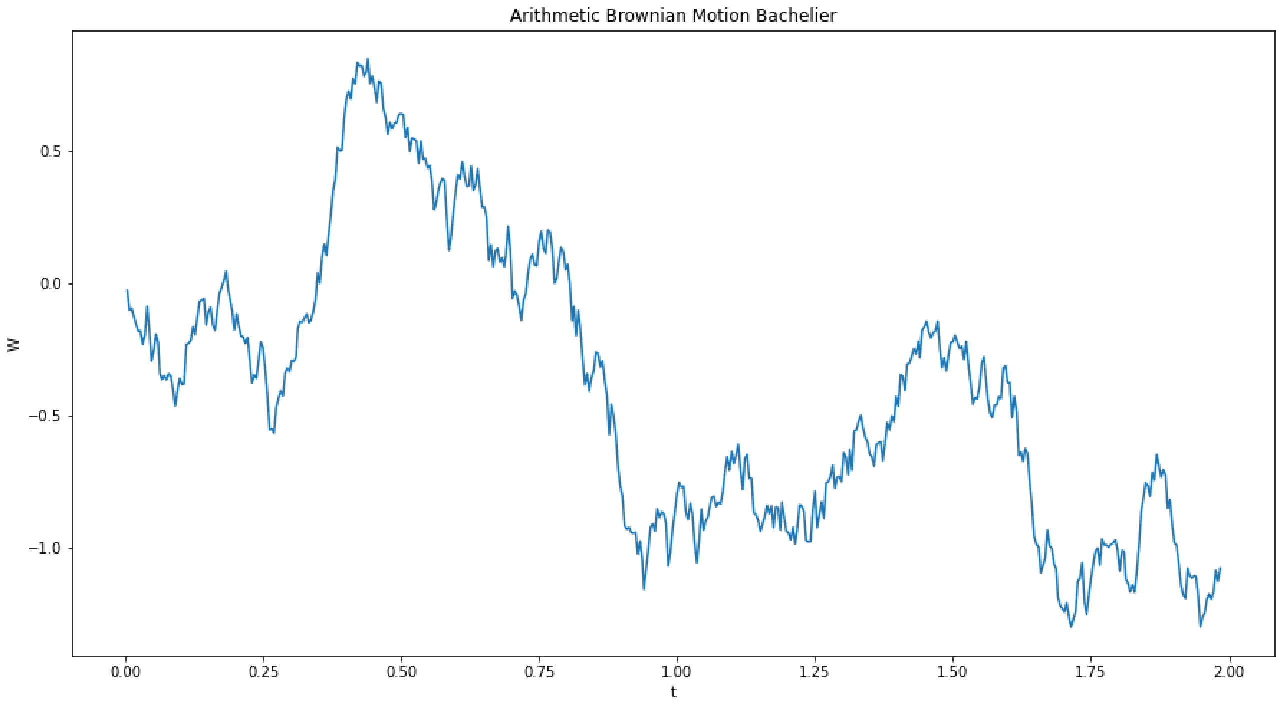

Рис. 2.6 Дифузія для Арифметичного Броунівського Руху (з такими ж випадковими величинами, як і на Рис. 2.5)

2.5 Моделювання процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

Ще одним важливим завданням є побудова процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху, або ж в нашому випадку - моделі Блека-Шоулза. Принцип побудови є аналогічним схемі побудови моделі Башельє із застосуванням процесу субдифузії.

Аналіз різних реальних даних показує, що багато процесів, що спостерігаються в економічній науці, демонструють характерні періоди, коли вони залишаються нерухомими. Ця особливість є найпоширенішою для ринків, що розвиваються, на яких кількість учасників, а отже і кількість угод, є досить низькою. Постійні періоди фінансових процесів відповідають подіям захоплення, в яких субдифузійна тестова частинка знерухомлюється. Тому необхідно застосувати процес субдифузії до моделі Блека-Шоулза щоб покращити деталізацію процесу.

Формула субдифузії для моделі Блека-Шоулза матиме вигляд [8]:

$$\frac{dX_{S_t}}{X_{S_t}} = \mu dt + \sigma\delta W_{S_t}, \tag{2.8}$$

де S_t - обернений субординатор, розрахований за формулою (2.6).

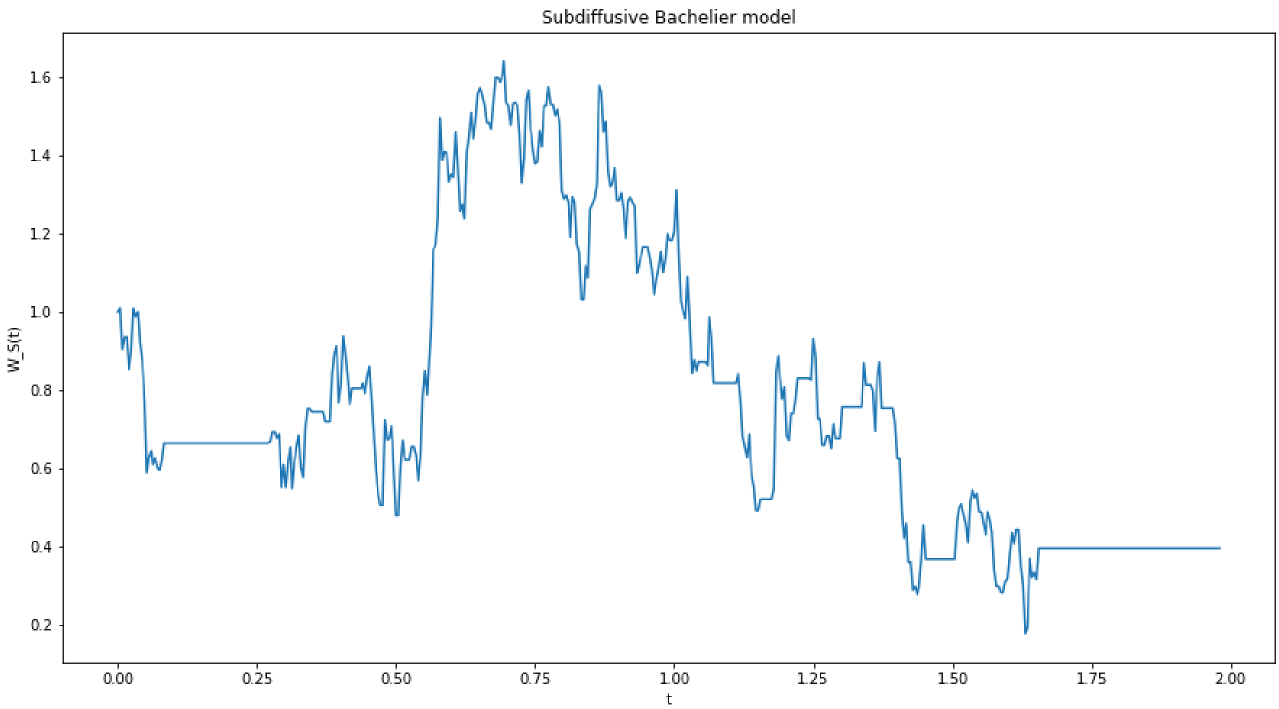

Рис. 2.7 Субдифузія для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

В той час при однакових значеннях випадкових величин графік дифузії для Геометричного Броунівського Руху матиме вигляд:

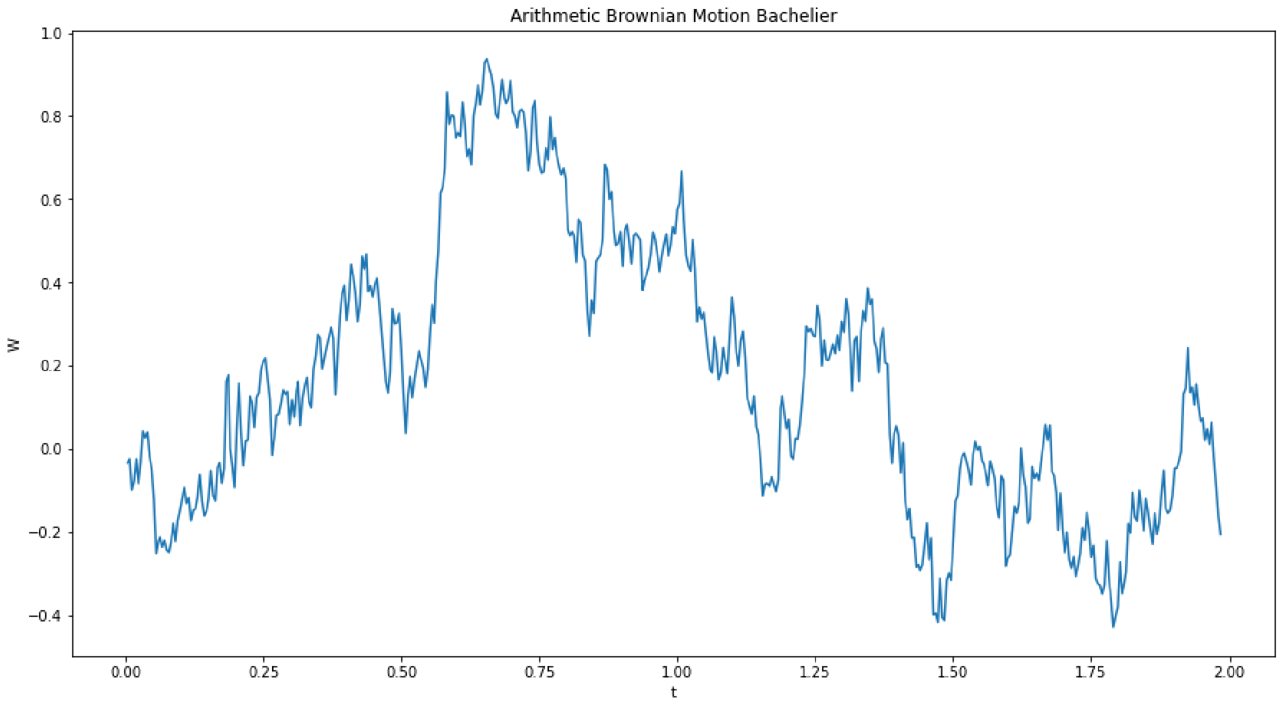

Рис. 2.8 Дифузія для Геометричного Броунівського Руху (з такими ж випадковими величинами, як і на Рис. 2.7)

Реалізацію програмних продуктів для обох моделей Башельє та Блека-Шоулза описано в Додатках Д та Е відповідно.

ВИСНОВОК

Отже, процес субдифузії є важливим компонентом в моделюванні фінансового ринку. Субдифузія дозволяє розширити можливості для моделювання нетипових аномальних дифузійних процесів, в яких прослідковуються сталі періоди, під час яких ціни на акції не змінюються або відсутня торгівля активами.

Для дослідження класичних моделей ринку, а саме для симуляції руху ризикових активів (з сталими періодами), було обрано дві моделі: Башельє та Блека-Шоулза. Перша модель побудована з використанням Арифметичного Броунівського Руху, в той час як друга модель містить Геометричний Броунівський Рух.

Для кожної моделі було

- побудовано ітераційні схеми Іто;
- розроблено програмний продукт на мові Python для моделювання процесу дифузії та субдифузії
- в якості субординатора в процесі субдифузії для обох моделей було застосовано процес Леві з експонентою Лапласа у випадку α-стабільності (α-stable case).
- описано та охарактеризовано фізичні процеси дифузії та субдифузії а також їх інтерпретації в еконофізиці;
- проведено аналіз моделей на зміну коефіцієнтів. Моделі Башельє та Блека-Шоулза в при параметрі субординатора $\alpha = 0.9$ показали найкращі результати, проте при рекомендованому дефолтному значенні $\alpha = 0.5$ моделі не давали точного графіку, схожого з графіком, які застосовували процеси дифузії.

Отже, як підсумок до проведеного дослідження, в даній курсовій роботі здійснено симуляцію руху ризикових активів для малоліквідних ринків. Враховуючи можливості до програмної реалізації інших субординаторів а також застосуванням схеми Мілстейна, можна говорити про необхідність подальшого дослідження даної теми та порівняння нових висновків із базовими результатами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Степанов С. С. Стохастичний світ / Сергій С. Степанов., 2009. – 376 с. – (Електронне видання). – (v. 0.1).
2. Семенов В. П. Становление эконофизики / В. П. Семенов, С. В. Копылов. // Вестник РУДН. – 2015. – №3. – С. 41–48.
3. Psychoyios D. A Jump Diffusion Model fox VIX Volatility Options and Futures / D. Psychoyios, G. Dotsis, R. Markellos. // Review of Quantative Finance and Accounting. – 2008. – №35. – С. 245–269.
4. Халл Д. Опціони, ф'ючерси та інші похідні фінансові інструменти / Джон Халл. – Київ: Вільямс, 2008.
5. Россохин В. В. Исследование характеристик моделей арифметического и геометрического броуновского дивжения при прогнозировании цен на финансовые активы / В. В. Россохин. // Финансы и кредит. – 2014. – №26. – С. 31–38.
6. M. Magdziarz, Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model, Appl. 145 (2009) 188-203
7. Kaniadakis G. Modeling Anomalous Diffusion by a Subordinated Integrated Brownian Motion / Giorgio Kaniadakis. // Hindawi. – 2017.
8. M. Magdziarz, Stochastic representation of subdiffusion processes with time-dependent drift, Stochastic Process. Appl. 119 (2009) 3238–3252
9. Anomalous diffusion [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Anomalous_diffusion#:~:text=Subdiffusion%20has%20been%20proposed%20as,heterogeneous%20medium%2C%20e.g.%20porous%20media..

ДОДАТОК А

Програмний код для комп’ютерної реалізації моделі Башельє із використанням Арифметичного Броунівського Руху

```
def model_bachelier():
   t = 0 # initial time value
   x = 1 # initial x value in inial t time vale
   t_array = [] # initialize array fox horizontal axis
   x_array = [] # initialize array fox vertical axis
   epsilon_array = [] # initialize array for storing the random variable

   for k in range(num):
       t += dt
       eps = np.random.normal(mu, sigma)
       x += a(x, t) * dt + b(x, t) * sqrt_dt * eps

       t_array.append(round(t, 3))
       x_array.append(x)
       epsilon_array.append(eps)
   return t_array, x_array, epsilon_array

t_array, w, epsilon = model_bachelier()
draw_plot(t_array, w, 't', 'W', 'Bachelier model')
```

ДОДАТОК Б

Програмний код для комп’ютерної реалізації моделі Блека-Шоулза із використанням Геометричного Броунівського Руху

```
def model_black_scholes():
   t = 0 # initial time value
   x = 1 # initial x value in inial t time vale
   t_array = [] # initialize array fox horizontal axis
   x_array = [] # initialize array fox vertical axis
   epsilon_array = [] # initialize array for storing the random variable

   for k in range(num):
       t += dt
       epsilon = np.random.normal(mu, sigma)
       x += a_g(x, t) * dt + b_g(x, t) * sqrt_dt * epsilon

       t_array.append(round(t, 3))
       x_array.append(x)
       epsilon_array.append(epsilon)
   return t_array, x_array, epsilon_array

t_array, x_array, epsilon = model_black_scholes()
draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W', 'Black-Scholes model')
```

ДОДАТОК В

Програмний код для моделювання субординатора - процесу Леві з експонентою Лапласа у випадку α -стабільності (α-stable case).

```
def subordinator():
   delta = step
   c_1 = math.pi / 2
   alpha = 0.9
   t = round(step, 3)
   t_array = [t]
   T_dict = {0:0}
   for i in range(1, 500):
       t += step
       v = np.random.uniform(low=-(math.pi / 2), high=math.pi / 2)
       w = np.random.exponential(scale=1.0)
                  xi=((math.sin(alpha  *  (v  +  c_1)))/(pow(math.cos(v),  1  /
alpha)))*pow(((math.cos(v - alpha * (v + c_1)))/(w)), (1-alpha)/alpha)
       n = i * delta
       T = T_dict[delta * (i - 1)] + pow(delta, 1/alpha) * xi
       T_dict[n] = round(T, 5)
       t_array.append(round(t, 3))
   return T_dict, t_array

T_sub, t_sub = subordinator()
draw_plot([*T_sub.keys()], [*T_sub.values()], 'delta * n', 'T', 'Subordinator')
```

ДОДАТОК Г

Програмний код для моделювання оберненого субординатора (hitting time)

```
def inverse_subordinator():
    T, t_calendar = subordinator()
    inv_subordinator = []
    for j in range(len(t_calendar)):
        t = t_calendar[j]
        for i in range (1, num):
            if T[i*step] > t or i == num - 1:
                inv_subordinator.append((i - 1) * step)
                break
    return inv_subordinator, t_calendar

inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator()
draw_plot(t_calendar, inv_subordinator, 't', 'S', 'Inverse subordinator')
```

ДОДАТОК Д

Програмний код процесу субдифузії для Арифметичного Броунівського Руху (модель Башельє)

```
def model_subdiffusion_bachelier():
   x = 1
   t = 0
   x_array = [x]
   t_array = [t]

   inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator()
   t_abm, w_abm, epsilon_abm = model_bachelier()

   for i in range(num - 1):
       t_i = t_abm[i]
       t_j = t_abm[i+1]
       epsilon = epsilon_abm[i+1]
       dt = inv_subordinator[i+1] - inv_subordinator[i]
       sqrt_dt = math.sqrt(dt)
       x += a(x, t) * dt + b(x, t) * sqrt_dt * epsilon

       t_array.append(t_i)
       x_array.append(x)
   draw_plot(t_abm, w_abm, 't', 'W', 'Arithmetic Brownian Motion Bachelier')
   draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W_S(t)', 'Subdiffusive Bachelier model')


model_subdiffusion_bachelier()
```

ДОДАТОК Е

Програмний код процесу субдифузії для Геометричного Броунівського Руху (модель Блека-Шоулза)

```
def model_subdiffusion_blck_scholes():
   x = 1
   t = 0
   x_array = [x]
   t_array = [t]

   inv_subordinator, t_calendar = inverse_subordinator()
   t_gbm, w_gbm, epsilon_gbm = model_black_scholes()

   for i in range(num - 1):
       t_i = t_gbm[i]
       t_j = t_gbm[i+1]
       epsilon = epsilon_gbm[i+1]
       dt = inv_subordinator[i+1] - inv_subordinator[i]
       sqrt_dt = math.sqrt(dt)
       x += a_g(x, t) * dt + b_g(x, t) * sqrt_dt * epsilon

       t_array.append(t_i)
       x_array.append(x)

   draw_plot(t_gbm, w_gbm, 't', 'W', 'Geometric Brownian Motion Black-Scholes')
   draw_plot(t_array, x_array, 't', 'W_S(t)', 'Subdiffusive Black_Scholes model')
model_subdiffusion_blck_scholes()
```

ДОДАТОК Ж

Допоміжні функції:

- Параметри для Арифметичного Броунівського Руху

```
def a(x, t):
   return a_const;

def b(x, t):
   return b_const
```

- Параметри для Геометричного Броунівського Руху

```
def a_g(x, t):
   return a_const * x;

def b_g(x, t):
   return b_const * x;
```

- Функція для побудови графіків

```
def draw_plot(x, y, x_label, y_label, title, figsize=(15, 8)):
   plt.figure(figsize=figsize)
   plt.plot(x, y)
   plt.xlabel(x_label)
   plt.ylabel(y_label)
   plt.title(title)
   plt.show()
```

- Конфігураційні значення

```
# Конфігураційні значення для моделей Броунівського руху
step = 1/252 # крок, календарний час (252 робочі дні)
num = 500 # кількість точок для табуляції
mu = 0 # математичне сподівання білого шуму
sigma = 1 # дисперсія
dt = step
sqrt_dt = math.sqrt(dt)

# Константні значення для коефіцієнтів a та b в моделях Броунівського руху
a_const = mu
b_const = sigma
```