Від редакції «ПМ». *Проблема пошуку засобів підвищення інтересу учнів до навчання, зокрема математики, натепер є надзвичайно актуальною. Одним із цих засобів є оріґамі. Яким є його потенціал у контексті використання в навчанні геометрії?*
Пропонуємо статтю, що допоможе читачеві зрозуміти сутність оріґамі як стрункої математичної теорії, що має власну систему аксіом і може бути ефективно використана в шкільному курсі геометрії для розв'язування багатьох геометричних задач та обґрунтування загальних тверджень цього курсу. Детальний ілюстративний супровід теоретичних міркувань дасть змогу читачеві «Постметодики» наочно уявити і спробувати самостійно виконати пропоновані у статті побудови. Сподіваємося, матеріал зацікавить широке коло читачів, які виявляють інтерес до математики.

УДК 745.54:514.18

ЗАСТОСУВАННЯ ЯПОНСЬКОГО МИСТЕЦТВА «ОРІҐАМІ» ПІД ЧАС НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Ю. О. Захарійченко, О. М. Лозинська

Висвітлено математичні обґрунтування побудов оріґамі, показано можливості застосування оріґамі при розв'язуванні математичних задач та доведенні деяких теорем геометрії для практичної реалізації принципу наочності навчання; розвитку в учнів просторового та геометричного мислення, уяви, уваги, пам'яті, кмітливості, дрібної моторики.

Ключові слова: оріґамі в математиці, аксіоми оріґамі, оріґаметрія, геометричне мислення, просторове мислення.

Захарийченко Ю. А., Лозинская О. Н. Применение японского искусства «оригами» во время обучения геометрии
Освещены математические обоснования построений оригами, показано возможности применения оригами при решении математических задач и доказательстве некоторых геометрических теорем для практической реализации принципа наочности обучения; развития у учащихся пространственного и геометрического мышления, воображения, внимания, памяти, сообразительности, мелкой моторики.

Ключевые слова: оригами в математике, аксиомы оригами, оригаметрия, геометрическое мышление, пространственное мышление.

Zakhariichenko Yu. O., Lozynska O. M. Using Japanese Art of Origami in the Study of Geometry
Mathematical substantiations of origami constructions are covered in this paper as well as possibilities of application of origami at the decision of mathematical problems and proof of some theorems of geometry for practical realization of the visual methods in teaching are shown; development of students' spatial and geometric intelligence, imagination, attention, memory, thinking, fine motor skills.

Keywords: origami in mathematics, origami axioms, origamimetry, geometric thinking, spatial thinking.

Геометрія є основою багатьох практичних застосувань у сучасних галузях, як-то виробництво, будівництво, архітектура, дизайн, комп'ютерна графіка тощо. Наприклад, при виробництві паркетних планок і шпунтового з'єднання важлива геометрична точність їхніх розмірів, бо від цього залежить, наскільки якісною і «монолітною» буде підлога. У будівництві хмарочосів особлива увага приділяється елементам геометричних фігур та комбінації геометричних тіл: кожна деталь має підкреслювати та виділяти внутрішній та зовнішній простори хмарочоса (фото 1).

Сад, виконаний у французькому стилі ландшафтного дизайну, планується за основною єдиною віссю композиції (фото 2).

Захарійченко Юрій Олексійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Національного університету «Києво-Могилянська академія»

Лозинська Ольга Михайлівна, методист відділу природничо-математичних дисциплін та технологій ПОІППО ім. М. В. Остроградського

Рецензент: Черкаська Любов Петрівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри загальної фізики і математики Полтавського національного педагогічного університету імені В.Г. Короленка

Фото 1. Комбінації геометричних тіл у будівлях

Фото 2. Французький стиль у ландшафтному дизайні

Розташування всіх його елементів і конструкцій дизайнери підпорядковують законам геометричної чистоти та симетрії. План організації мусульманського саду включає один або декілька квадратів, у центрах яких є фонтани або басейни циліндричної форми. Геометрія увійшла у світ модної фотографії; спостерігається тенденція змішування стилів та геометричних форм у всьому – від одягу до картин чи архітектури.

У сучасному світі людині складно досягти успіху, послуговуючись лише енциклопедичними знаннями, доступними завдяки Інтернету. Важливим є вміння мислити нестандартно, креативно, швидко знаходити правильні рішення. Саме ці якості й мають розвиватися в закладах освіти. Так, у мистецьких закладах вихованці навчаються мислити «геометрично» за допомогою художніх

Фото 3. Спіраль Адзума

образів. Шкільні уроки геометрії формують і розвивають не лише геометричне, а й просторове мислення учнів, зокрема, на основі унікальної технології, що базується на використанні низки аксіом, які пропонує японське мистецтво «оріґамі» (від японських слів ori – складати і kami – папір).

Найчастіше оріґамі сприймається як спосіб виготовлення паперових іграшок та прикрас інтер'єру, і мало хто замислюється, що це мистецтво має тісний зв'язок із математикою [1, 11]. «Розгорніть фігурки оріґамі і подивіться на згини – ви побачите лише велику кількість многокутників, з'єднаних один з одним. У складеному вигляді оріґамі являє собою многогранник, фігуру з множиною плоских поверхонь, а коли фігура розкладена й показані всі згини, ми, математики, називаємо її двовимірною множиною», – говорить дизайнер оріґамі і математик Адзума Хідеакі, стверджуючи, що множини є найважливішою частиною всієї сучасної математики, а не лише геометрії [13]. Адзума Хідеакі складав фігурки оріґамі не з квадратного, а із прямокутного аркуша паперу, і не по симетричних лініях, а використовуючи як центр симетрії одну точку. Пройшовши етап спроб і помилок, він нарешті зумів скласти спіраль, що не має прямих кутів, як у класичному оріґамі: у кожному трикутнику є кут, розмір якого становить понад 90 градусів (фото 3).

З погляду математики, оріґамі – це точне визначення місцезнаходження однієї або більше точок аркуша, що задають згини, необхідні для формування визначеної моделі. Процес складання потребує дотримання послідовності точно визначених дій, ураховуючи такі правила, базовані на законах математики: точне виконання інструкції; точки визначаються перетином ліній; лінія визначається краєм аркуша або лінією згину аркуша; усі складки визначаються єдиним шляхом суміщення різних елементів аркуша – ліній і точок; згин формується єдиною складкою, причому в результаті складання фігура залишається плоскою; усі лінії прямі й поділяються на паралельні та перпендикулярні [2].

Теоретичні основи оріґамі в математиці. Як і будь-яка наука, оріґамі має свої теоретичні основи – аксіоми оріґамі. Японський математик Хуміані Хузіта, що проживає в Італії, 1992 року на слуханнях першої міжнародної конференції Origami Science and Technology запропонував 6 аксіом, які стали першим кроком до математичного обґрунтування побудов, виконаних шляхом згину аркуша паперу [4, 9].

Аксіома 1. Існує єдиний згин, що проходить через дві дані точки (рис. 1).

Аксіома 2. Існує єдиний згин, що суміщає дві дані точки (рис. 2).

Аксіома 3. Існує згин, що суміщає дві дані прямі (рис. 3).

Аксіома 4. Існує єдиний згин, що проходить через дану точку і перпендикулярний до даної прямої (рис. 4).

Аксіома 5. Існує єдиний згин, що проходить через дану точку і переміщує іншу точку на дану пряму (рис. 5).

Аксіома 6. Існує єдиний згин, що переміщує кожну з двох даних точок на одну із двох даних прямих, що перетинаються (рис. 6) [9, 10, 12].

2012 року японський оріґаміст Коширо Хаторі виявив згин, який не описаний в аксіомах Хуміані Хузіта. Таким чином, аксіома 7 формулюється так: для двох даних прямих і точки існує лінія згину, що перпендикулярна першій прямій і поміщає дану точку на другу пряму.

Ця система аксіом задовольняє всі вимоги до систем аксіом, а саме є незалежною (мінімальною), несуперечливою (сумісною) і повною (достатньою) [6].

Система аксіом 1–5 еквівалентна системі аксіом конструктивної геометрії, де як основний інструмент використовують креслярський трикутник. Звідси випливає, що методами оріґамі, тобто тільки за допомогою перегину аркуша паперу, можна розв'язати будь-які задачі на побудову, що розв'язуються за допомогою креслярського трикутника, а отже, за допомогою класичних інструментів – циркуля та лінійки.

Твердження аксіоми 6 не може бути обґрунтоване методом конструктивної геометрії, оскільки побудови, здійснені відповідно до зазначеної аксіоми, зводяться до розв'язування кубічного рівняння, яке не має раціональних коренів. Таким чином, можливості побудови за допомогою перегинання квадратного аркуша паперу набагато більші, ніж при використанні класичних креслярських інструментів [8].

Оріґаметрія. Німецький педагог Ф. Фребель в середині XIX ст. ввів оріґамі як навчальний предмет у школі. Наприклад, основи геометрії він пропонував вивчати не за допомогою циркуля, лінійки та деяких понять, а на прикладі фігур, що складаються з паперу. Цей предмет здобув назву «оріґаметрія» [8, 9]. Ця наука молода, і натепер не розроблено програм та посібників, які б системно представляли матеріал з оріґаметрії.

Оріґаметрія – поєднання оріґамі та геометрії. Це підтверджується навіть тим фактом, що основними поняттями геометрії вважаються точка, пряма, площина, тоді як в оріґаметрії – точка, лінія згину, аркуш паперу. З іншого боку, основним відношенням у геометрії є належність точки прямій, а в оріґаметрії – належність точки лінії згину та проходження лінії згину через точку.

Оріґамі має потужний потенціал для розв'язування планіметричних задач на побудову. Процес розв'язування таких задач за допомогою циркуля й лінійки включає 4 етапи: аналіз; побудова; доведення; дослідже-

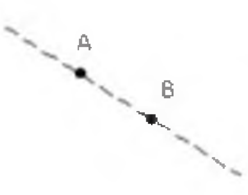

Рис. 1. Аксіома 1

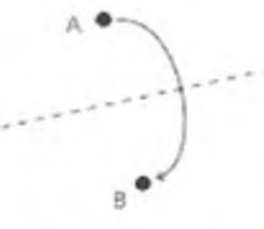

Рис. 2. Аксіома 2

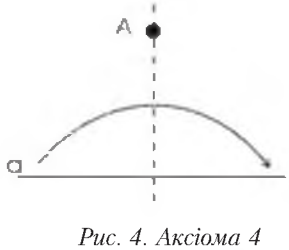

Рис. 4. Аксіома 4

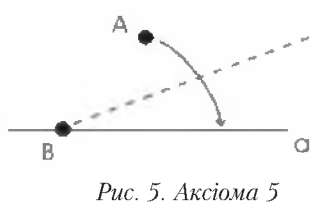

Рис. 5. Аксіома 5

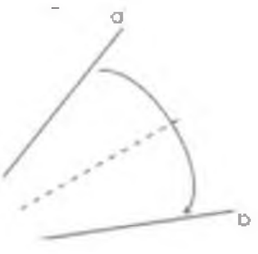

Рис. 3. Аксіома 3

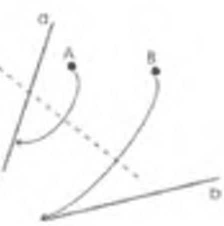

Рис. 6. Аксіома 6

ня. Будь-яка оріґамічна задача складається з таких етапів: постановки задачі; оріґамічного розв'язання, перевірки або способу побудови; математичного обґрунтування, тобто доведення того, що в результаті дій отримується фігура з необхідними властивостями [3, 8, 10].

Практичне застосування оріґамі при навчанні геометрії. Виріжмо з паперу довільний трикутник (рис. 7). Далі працюймо лише руками, тобто без застосування ножиць, лінійки, циркуля, олівця тощо. Знайдімо середини бічних сторін і «проведімо» середню лінію, зігнувши папір по пунктирній лінії так, як показано на рис. 8. У результаті одержуємо трапецію (рис. 9).

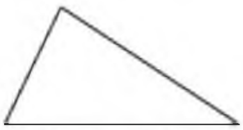

Рис. 7. Довільний трикутник

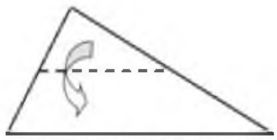

Рис. 8. Середня лінія

«Проведімо» дві висоти трапеції, перегнувши два утворені рівнобедрені трикутники так, як показано на рис. 10.

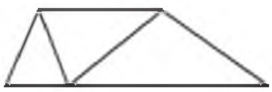

Рис. 9. Трапеція

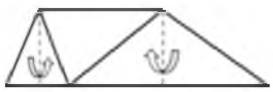

Рис. 10. Висота

У результаті одержуємо прямокутник (рис. 11).

Рис. 11. Прямокутник

Це є підставою для висновку, що довільний трикутник можна «конвертувати» у прямокутник.

Нижче наведімо формули та властивості фігур, знання яких можна закріпити/повторити у процесі вищеописаних маніпуляцій.

1. Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° (рис. 12) [4,7].

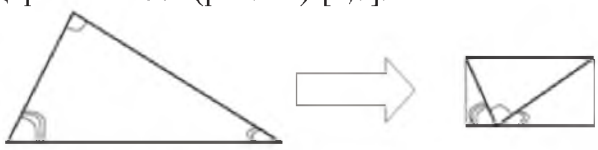

Рис. 12. Сума внутрішніх кутів трикутника

2. Середня лінія трикутника дорівнює половині його основи (рис. 13).

3. Виконуючи дії, що показані на рисунку 13, бачимо, що в рівнобедреному трикутнику висота, опущена з вершини до його основи, є бісектрисою та медіаною.

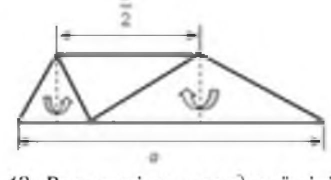

Рис. 13. Властивість середньої лінії

4. Площа трикутника обчислюється за формулою $S=\frac{ah}{2}$ (рис. 14).

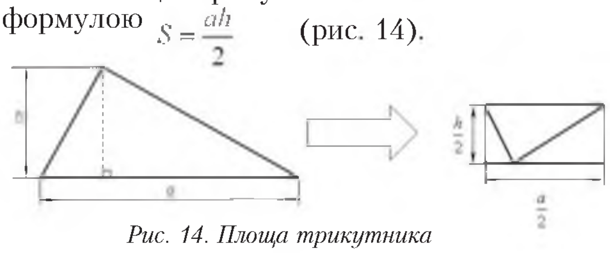

Рис. 14. Площа трикутника

Після конвертації, яка представлена на рис. 14, бачимо, що площа заданого трикутника вдвічі більша за площу отриманого прямокутника, тобто

$$S_{трикутника}=2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{2}.$$

За допомогою елементарних перетворень можна довести, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. Для цього необхідно:

1. Зігнути трикутник по середніх лініях MN і NK (рис. 15).

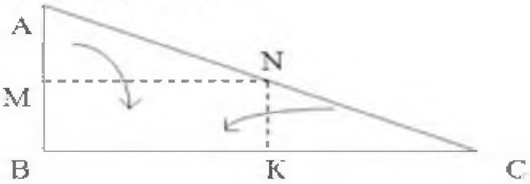

Рис. 15. Згин по середніх лініях

2. Гострі кути при накладанні збігаються з кутом 90° (рис. 16) [7, 9].

Рис. 16. Сума гострих кутів прямокутного трикутника

Розгляньмо ще приклад задачі на обчислення, що розв'язується за допомогою оріґамі.

Зігнімо квадрат по діагоналі AC. Зігнімо AB і AD до отриманої діагоналі. Знайдімо кути трикутників:

а) ΔABH,

б) ΔAHC,

в) ΔAHM (рис. 17).

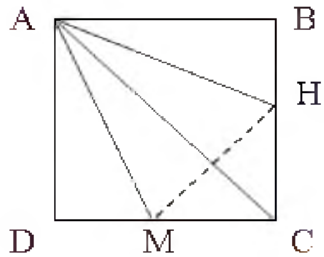

Рис. 17

Обчислення:

а) За умовою задачі

∠A=∠B=∠C=∠D=90°, ∠A – розділений на 4 рівні кути:

∠DAM=∠MAC=∠CAH=∠HAB=90°:4=22.5°.

Із прямокутного трикутника ΔABH

($\angle B=90°$) за теоремою про суму кутів трикутника: $\angle AHB=180°-90°-22.5°=67.5°$.

Відповідь:

$\angle ABH=90°$, $\angle HAB=22.5°$, $\angle AHB=67.5°$.

б) $\angle CAH=22.5°$ – з попередньої задачі,
$\angle ACH=45°$ – за побудовою,
$\angle AHB+\angle AHC=180°$, як сума суміжних кутів.
Тоді $\angle AHC=180°-\angle AHB=180°-67.5°=112.5°$.

Відповідь:

$\angle CAH=22.5°, \angle AHC=112.5°, \angle ACH=45°$.

в) $\angle MAH=\angle MAC+\angle HAC=22.5°+22.5°=45°$ (за умовою)

За умовою ΔMAH рівнобедрений ($MA=AH$), за властивістю рівнобедреного трикутника
$\angle AMH=\angle AHM=(180°-45°):2=67.5°$.

Відповідь:

$\angle AHM=\angle AMH=67.5°$, $\angle MAH=45°$.

Висновки. Отже, оріґамі – це струнка математична теорія, оскільки в ній застосовується аксіоматичний метод. Усі задачі, які можна розв'язати за допомогою циркуля та лінійки, можна розв'язати й за допомогою оріґамі [4, 7, 9].

Під час навчання геометрії процес складання фігур оріґамі дає змогу продемонструвати дітям геометричні фігури: трикутник, квадрат, прямокутник тощо; пояснити теореми, властивості та ознаки, які розглядаються в курсі планіметрії, швидко і яскраво продемонструвати розв'язування задач. За допомогою оріґамі можливо ефективно формувати в учнів та учениць уміння орієнтуватися в просторі, ділити ціле на частини, знаходити вертикаль, горизонталь, діагональ. Створюючи з паперу та трансформуючи об'ємні тіла, можна обґрунтувати низку їхніх властивостей та довести формули, що розглядаються в курсі стереометрії.

Заняття оріґамі чинять позитивний вплив на розвиток уяви, уваги, пам'яті, просторового та геометричного мислення, кмітливості, моторики пальців рук учнів, що забезпечує всебічний розвиток дітей; сприяють розвитку цілісності та структурованості сприйняття образів, зорової і кінетичної пам'яті, уміння зосереджувати увагу, синхронізації роботи обох півкуль головного мозку, оскільки при створенні фігур оріґамі задіяні обидві руки.

Найкращий період для введення оріґамі при розв'язуванні задач із геометрії – 7 клас, коли учні тільки розпочинають знайомитися з предметом «Геометрія».

ЛІТЕРАТУРА

1. *Афонькин С. Ю. Все об оригами. Справочник / С. Ю. Афонькин, Е. Ю. Афонькина. – С.-Пб: изд. Кристалл, М.: Оникс, 2005. – 89 с.*
2. *Афонькин С. Ю. Оригами и геометрия. Учебник / С. Ю. Афонькин, И. В. Капитонова. – Чебоксары : ЧГУ, 1993. – 28 с.*
3. *Белим С. Н. Геометрия и оригами. Учебно-методический комплекс элективного курса / С. Н. Белим. – Омск, 2003. – 80 с.*
4. *Белим С. Н. Задачи по геометрии, решаемые методом оригами. Учебник / С. Н. Белим, С. В. Белим – М.: Аким, 1998. – 64 с.*
5. *Белим С. Н. Правильные многоугольники в оригами. Учебник / С. Н. Белим, С. В. Белим. – М. : Омск, 2003. – 62 с.*
6. *Вимоги до системи аксіом [Електронний ресурс]. URL : https://helpiks.org/8-81700.html*
7. *Кадзуо Хага – Оригамика. Математические опыты со складыванием бумаги. Учебник / ред. Масами Исода, И. Р. Высоцкий. – М. : МЦНМО, 2012. – 53 с.*
8. *Математика и оригами [Електронний ресурс] URL : http://ru.calameo.com/read/002635190753702c6d5fe*
9. *Оригаметрия как средство развития логического мышления. [Електронний ресурс. URL : http://www.myshared.ru/slide/115046/*
10. *Оригаметрия. [Електронний ресурс]. URL : https://kopilkaurokov.ru/matematika/presentacii/orighamietriia*
11. *Оригами – математика или искусство? [Електронний ресурс]. URL : http://bir-cdo.ru/wp-content/uploads/2014/03/Luchkovskiy-origami.pdf*
12. *Оригами и математика. [Електронний ресурс]. URL : https://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2013/05/15/origami-i-matematika*
13. *Оригами – это математика! [Електронний ресурс]. URL : https://web-ja pan.org/nipponia/nipponia41/ru/feature/feature09.html*

Цитувати: Захарійченко Ю. О. Застосування японського мистецтва «оріґамі» під час навчання геометрії / Ю. О. Захарійченко, О. М. Лозинська // Постметодика. – 2021. – № 1. – С. 32-36.