Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

Застосування теорії керованих Марківських ланцюгів до задач обслуговування циклічних мереж

Текстова частина до курсової роботи

за спеціальністю “Прикладна математика” 113

Керівник курсової роботи

д.т.н., доц. Чорней Р.К.

____

(підпис)

“____” _________ 2020 р.

Виконав

студент 4 курсу

факультету інформатики

Девяткин А. О.

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав. кафедри математики,

проф., д.ф.-м.н.

____________Б. В. Олійник

(підпис)

„____” _______________2019 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на курсову роботу

студенту Девяткину А. О. факультету інформатики 4-го курсу БП

ТЕМА Застосування теорії керованих Марківських ланцюгів до задач обслуговування циклічних мереж

Зміст курсової роботи:

1. Індивідуальне завдання
2. Календарний план
3. Вступ
4. Опис моделі
5. Практична реалізація
6. Список використаних джерел

Дата видачі „___” _________ 2019 р. Керівник _______________

(підпис)

Завдання отримав __________

(підпис)

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	10.10.2019	
2.	Огляд задачі	11.11.2019	
3.	Проведення досліджень	01.03.2020	
5.	Побудова програми-симулятора	5.04.2020	
6.	Написання текстової частини	13.04.2020	
7.	Корегування роботи згідно із зауваженнями керівника	16.04.2020	

Студенту Девяткину А. О.

Керівник Чорней Р.К.

“______” ________________

Зміст

Вступ

Мета цієї роботи на практиці дослідити задачу обслуговування циклічних мереж застосовуючи теорію Марківських ланцюгів. З побудувати таку систему для дослідження та пошуку оптимальних стратегій при використанні даних систем. Будуть розглянуті тільки ті системи, для яких змінна часу в випадкових процесах буде $\mathbb{N}$

Опис моделі

Позначимо ξ на ймовірносному просторі $(\Omega, \Gamma, \mathrm{P})$ яка бере свої значення на з X, ймовірносним полем над неорієнтованим графом $G(V, E)$, де E є $\{k, j\}$ що позначають з'эднання між вершинами k та j. Також зазначемо що значення на X_K означимо як ξ_K

Також означимо, що дискретне випадкове поле ξ на $G(V, E)$ буде Марківською мережею якщо вона задовільняє наступне

$$\forall\, x \in X\ P\left(\xi_k = x_k \backslash \xi_{V-\{k\}} = x_{v-\{k\}}\right) = P\left(\xi_k = x_k \backslash \xi_{N(k)} = x_{N(k)}\right)$$

де $N(k) -$ сусіди вершини $k,$ тобто

$$N(k) = \{j: \{j, k\} \in E\} - \{k\}$$

Для означення залежності ξ від часу, позначимо $\xi = \xi^t$ і t приймає дискретні значення $t = 0,1,2, \ldots$

Також означимо що $\xi = \{\xi^t, t = 0,1, \ldots\}$ буде Марківською мережею на кінцевому просторі X, визначеному на G.(Vasilyev[7]) Зазначимо що стан вершин k буде залежати від попереднього стану $N(k)$

Визначемо модель системи. Нехай у нас є мережа з нодами $1,2, \ldots, J$ де $J \geq 2$. Кожна нода працює за принципом черги або ж First-Come-First-Served (FCFS). В системі циркулює K клієнтів, де $K \geq 1$. Клієнт що покидає ноду j і негайно переходить до ноди $j + 1$,$j \in J$

Еволюція такої системи буде описуватись стохастичним процесом $\xi = (\xi(t): t \in \{0,1, \ldots\})$ на просторі станів $S(K, J) = \left\{\left(x_1, \ldots, x_J\right), \sum_{j=1}^{J} x_j = K\right\}$

$\xi(t) = \left(\xi_1, \ldots \xi_J\right) = (x_1, \ldots x_J)$ тобто ξ буде описувати кількість клієнтів на ноді j у час t.

Оскільки система працює за FCFS тому у час t на ноді j, $h - 1 \geq 0$ клієнтів можуть очікувати своєї черги. В такому випадку ймовірність з якою клієнт завершить обслуговування на цій ноді у час t з ймовірністю $p_j(h) \in (0,1)$ і стане в чергу до ноди $j + 1$ для обслуговування незадовго перед часом $t + 1$. З цього можна зробити вивід, що з ймовірністю $q_j(h) = 1 - p_j(h)$ він залишиться на ноді j для подальшого обсуговування. Також, якщо в момент часу відбудется завершення обслуговування клієнта і в чергу для обслуговування стане новий, тоді вважаємо що відбуття сталося раніше.(Gravey[5], Hunter[6])

Теорема про стаціонарний стан (Daduna[2])
ξ ергодична на множині $S(K, J)$ у якого стаціонарний розподіл

$\pi^{KJ} = (\pi^{KJ}(x) : x \in S(K, J))$ заданий:

$$\pi^{KJ}(x_{1,\dots,}x_J) = \prod_{j=1}^{J} \left(\frac{\prod_{h=1}^{x_j - 1} q_j(h)}{\prod_{h=1}^{x_j} p_j(h)} \right) G(K, J)^{-1}$$

де $G(K, J)$ це коофіцієнт нормалізації

До цього моменту була розглянута не контрольована Марківська мережа. Для того щоб модель була контрольована, введемо $U = \times_{i \in V} u_i$ визначену на G. U_i це незалежний від часу та скінчений вектор можливих дій на ноді i.
Історія залежних рішень в час t буде
$\Delta^t = \Delta^t(x^0, \dots, x^t) = \{\Delta_i^t(x^0, \dots x^t) : i \in V\} \in U, t = 0,1, \dots$
Якщо в момент часу t рішення Δ_i^t буде зроблене на основі сусідів i, тобто послідовність рішень $\delta_i = \{\Delta_i^t\}$ буде називатись локальною стратегією для i.
З цього зазначемо що ξ буде рероходити через змінені ймовірності переходу

$$P\{\xi^{t+1} = x^{t+1} / \xi_{N(i)}^t = y, \{\Delta_i^t(\xi_{N(k)}^0, \dots, \xi_{N(k)}^t) : i \in V\} = u\}$$

За допомогою стратегії δ визначемо ймовірності на просторі $(\xi_0, \xi_1 \dots)$ при зафіксованому стані x^0. В такому випадку пара (ξ, δ) буде називатись контрольованою ξ при використані стратегії δ.

Пара (ξ, δ) буде називатись контрольованим процессом з локально взаємодіїчими синхроними компонентами на скінченному графі $G(V, E)$, якщо $\xi = (\xi^t : t \epsilon \mathbb{N})$ буде стохастичним процессом на просторі стану $X = \times_{i \in V} x_i$, та локальною стратегією $\delta = (\delta_i : i \in V)$, переходи для ξ означенні наступним чином

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{\xi_S^{t+1} = x_s/\xi^0 = x^0, \Delta^0(\xi^0) = u^0, \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \Delta^{t-1}(\xi^0, \dots, \xi^{t-1}) \\
&\qquad = u^{t-1}, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = u\} \\
&= P\{\xi_S^{t+1} = x_s/\xi^0 = x^0, \dots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = u\} \\
&= P\{\xi_S^{t+1} = x_s/\xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = u\} \\
&= \prod_{j \in S} P\{\xi_j^{t+1} = x_j/\xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t) = u\} \\
&= \prod_{j \in S} P\{\xi_j^{t+1} = x_j/\xi_{N(j)}^t = y_{N(j)}, \Delta_j^t(\xi_{N(j)}^0, \dots, \xi_{N(j)}^t) = u_j\} \\
&= \prod_{j \in S} Q_j\{x_j/y_{N(j)}, u_j\} \cdot 1_{\{u\}}(\Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t)) \\
&= Q_s(x_s/y, u) \cdot 1_{\{u\}}(\Delta^t(\xi^0, \dots, \xi^t)), S \subseteq V, y \in X, u \in U(y)
\end{aligned}
$$

Де $Q_j\{x_j/y_{N(j)}, u_j\}$ локально визначені переходи

Означимо що $r(x^t, u^t) \geq 0$ як вартість роботи системи, в час t при рішені u^tу стані $\xi^t = x^t$. В такому випадку середня очувана ціна до часу T коли ξ почалася з $\xi^0 = y$ при стратегії δ буде

$$Q_T^\delta(y) = E_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t)$$

Де E_y^δ це очікування від (ξ, δ)

В такому випадку проблема в знаходження стратегії δ що мінімізує середню вартість

$$R_y^\delta = \lim_{T \to \infty} \sup Q_T^\delta$$

$$p(y) = inf\ R_y^\delta$$

Оскільки була введенне поняття станів нод, тому якщо раніше ймовірність обслуговування клієнта на ноді i була $p_j(h) \in (0,1)$, то тепер це $p_j(h, u) \in (0,1)$ як і ймовірність того, що клієнту буде необхідно подальше обслуговування буде $q_j(h, u) = 1 - p_j(h, u)$. Де $u \in U_j$, а $U_i = \{u^1, u^2, .. u^{n_i}\}, i = 1,2, .. J$

Для того щоб визначити оптимальну стратегію використаємо стратегію покращення процедури.(Derman[3])

Ми оберемо якусь стратегію δ для якоїсь невідомої функції $v = \big(v(x)\colon x \,\epsilon\, S(K,J)\big)$ рівняння.(Derman[3])

$$R_y^\delta + v(y) = r\big(y, \delta(y)\big) + \sum_{x\epsilon\, S} Q\big(x/y\,, \delta(y)\big)v(x)\,, y\,\epsilon\, S$$

$$\sum_{x\,\epsilon\, S} \pi^\delta(x)v(x) = 0$$

При вирішенні для $\{\big(v(x), R_y^\delta\big)\colon x, y \,\epsilon\, S(K,J)\}$ отримаємо ціну R_y^δ при використанні δ.(Derman[3])

Тепер для кожного $y \,\epsilon\, S(K,J)$ визначемо множину U^y що складаєтся з множини рішень u у стані y для яких

$$\sum_{x\,\epsilon\, S(K,J)} Q(\mathrm{x/y\,, u})R_x^\delta < \; R_y^\delta$$

або якщо жодний набір рішень незадовольняє нерівність то

$$\sum_{x\,\epsilon\, S(K,J)} Q(\mathrm{x/y\,, u})R_x^\delta = \; R_y^\delta$$

та

$$r(y,u) + \sum_{x\epsilon\, S} Q(x/y\,, u)v^\delta(x) < \; r\big(y, \delta(y)\big) + \sum_{x\epsilon\, S} Q\big(x/y\,, \delta(y)\big)v^\delta(x)$$

Теорема (Derman[3])

Стратегія буде оптимальною якщо для кожного $U^y = \; \emptyset \; \forall y$ тоді $\delta' =\colon \; \delta^*$

Практична реалізація

Для використання моделі необхідно викликати функцію evaluate_v, що на вхід приймає значення u в якості початкового рішення і повертає початкові $(v(x), R_y^\delta)$

Приклад роботи

Візьмемо J={1,2,3,4} 4 ноди K=2 клієнта, а також $U_j = \{0,1\}$ в якості множини рішень

$p_j(h,u)$ задана наступним чином

$$\begin{pmatrix} (p_1(1,0); p_1(1,1)) & (p_1(2,0); p_1(2,1)) \\ (p_2(1,0); p_2(1,1)) & (p_2(2,0); p_2(2,1)) \\ (p_3(1,0); p_3(1,1)) & (p_3(2,0); p_3(2,1)) \\ (p_4(1,0); p_4(1,1)) & (p_4(2,0); p_4(2,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right) \\ \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \\ \left(\frac{1}{4}; \frac{2}{3}\right) & \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right) \\ \left(\frac{1}{4}; \frac{9}{10}\right) & \left(\frac{1}{10}; \frac{3}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$r(x,u) = \sum_{j \in J} [(c_j - u_j)x_j + u_j b_j]$$

Де $c = (1,2,3,4), b = (4,3,1,2)$

$$S(K,J) = \{ [2.,0.,0.,0.],[1.,1.,0.,0.],[1.,0.,1.,0.],[1.,0.,0.,1.],[0.,2.,0.,0.], [0.,1.,1.,0.],[0.,1.,0.,1.],[0.,0.,2.,0.],[0.,0.,1.,1.],[0.,0.,0.,2.] \}$$

Та множина рішень

$U = \{[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,1,0],[0,0,1,1],[0,1,0,0], [0,1,0,1],[0,1,1,0],[0,1,1,1],[1,0,0,0],[1,0,0,1],[1,0,1,0],[1,0,1,1], [1,1,0,0],[1,1,0,1],[1,1,1,0],[1,1,1,1] \}$

Візьмемо наприклад $\delta = [0,0,0,0]$

Тоді $r(x) = [2.,3.,4.,5.,4.,5.,6.,6.,7.,8.]$

Отримаємо розподіл
$\pi^{\delta} = [0.02321134, 0.09145961, 0.09145961, 0.09145961, 0.06859471, 0.12072669, 0.12072669, 0.04527251, 0.12072669, 0.22636254]$

Та порахуємо $R^{\delta} = \sum_{x \, \epsilon \, S} r(x)\pi^{\delta} = 5.67393262475229$

Знайдемо
$v^{\delta}(x) = [-16.10940575, -10.54284117, -7.38008741, -10.05611239, -5.31348294, -0.24095984, -3.07423608, 4.74276153, 4.09062678, 13.20456136]$

Шукаємо U^{y}

$$U^{x_1} = [0, 0, 0, 0]$$

$$U^{x_2} = [0, 0, 0, 0]$$

$$U^{x_3} = [0, 0, 0, 0]$$

$$U^{x_4} = [0, 0, 0, 1]$$

$$U^{x_5} = [0, 0, 0, 0]$$

$$U^{x_6} = [0, 0, 1, 0]$$

$$U^{x_7} \epsilon \, [0, 0, 0, 1]$$

$$U^{x_8} = [0, 0, 0, 0]$$

$$U^{x_9} = [0, 0, 0, 1]$$

$$U^{x_{10}} = [0, 0, 0, 1]$$

$$r^{\delta}{}'(x) = [2.0, 3.0, 4.0, 6.0, 4.0, 5.0, 7.0, 6.0, 8.0, 8.0]$$

$$\pi^{\delta'} = [0.050534 \ , 0.19911905, 0.19911905, 0.05531085, 0.14933929, 0.09955952, 0.07301032, 0.09856393, 0.07301032, 0.00243368]$$

$$R^{\delta} = 4.627928960759468$$

$$v^{\delta'(x)} = [-6.26661276, -2.33662395, -0.74612807, -3.25377848, 0.86229502, 2.34861942, 0.83440251, 5.17296465, 2.38409794, 1.24399874]$$

Список літератури

1. Ruslan K. Chornei, Hans Daduna, and Pavel S. Knopov ,Controlled Markov Fields With Finite State Space on Graphs
2. Daduna, H. Some results for steady-state and sojourn time distributions in open and closed linear networks of Bernoulli servers with state-dependent service and arrival rates. Performance Evaluation
3. Derman, C. Finite State Markovian Decision Processes
4. Vasilyev, N.B. Bernoulli and Markov stationary measures in discrete local interactions. In Locally Interacting Systems and Their Application in Biology; Dobrushin, R.L.; Kryukov, V.I.; Toom, A.L., Eds
5. Derman, C. Stable sequential control rules and Markov chains.
6. Derman, C. Markovian sequential decision processes.