ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА–БЕЗИКОВИЧА

Ю.П. ВОЛОШИН

Доповідь присвячена властивостям перетворень, які зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Дослідження таких перетворень були започатковані в роботах М.В. Працьовитого, Г.М. Торбіна та їх учнів (див. [1, 2]).

Нагадаємо деякі означення (див., наприклад, [3, 4]).

Означення 1. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E називається число

$$\dim_H E = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\},$$

де $H^\alpha(E) := \lim_{\varepsilon\to 0}\{\inf\sum_k |E_k|^\alpha\}$, де інфімум береться по всеможливих можливих ε-покриттях множини E.

Нехай (M,ρ) — деякий метричний простір і $f : (M,\rho) \to (M,\rho)$.

Означення 2. Відображення f називається DP-перетворенням простору M, якщо

$$\forall E \subset M : \quad \dim_H(E) = \dim_H(f(E)).$$

Означення 3. Функція f називається бі-Ліпшицевим відображенням простору M, якщо існують $A, B > 0$, такі, що

$$A\rho(x_1; x_2) \le \rho(f(x_1); f(\mathrm{x}_2)) \le B\rho(x_1; x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in M.$$

Теорема 1. *Якщо f є бі-Ліпшицевим перетворенням множини деякого метричного простору (M,ρ), то f є DP-перетворенням множини M.*

Як добре відомо, будь-яке афінне перетворення f простору R^2 можна подати у вигляді композиції руху та двох стисків до двох перпендикулярних прямих. Звідси випливає теорема 2.

Теорема 2. *Довільне афінне перетворення f простору R^2 є бі-Ліпшицевим перетворенням цього простору.*

Наслідок 1. *Будь-яке афінне перетворення простору R^2 є DP-перетворенням простору R^2.*

Оскільки довільне афінне перетворення R^3 є композицією руху та стисків до трьох попарно перпендикулярних площин, то маємо:

Теорема 3. *Довільне афінне перетворення f простору R^3 є бі-Ліпшицевим перетворенням на R^3, і, отже, є DP-перетворенням простору R^3.*

Вивчення DP-перетворень важливо з двох точок зору.

(1) Якщо перетворення f переводить деяку множину E в множину E', і при цьому зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича, то достатньо знайти розмірність Хаусдорфа–Безиковича простішої з множин, щоб знайти розмірність обох множин.

(2) з групової точки зору кожна геометрія вивчає інваріанти певної групи перетворень. Евклідова геометрія — інваріанти групи рухів. Афінна геометрія — інваріанти групи афінних перетворень. Проективна геометрія — інваріанти групи проективних перетворень. Топологія — інваріанти групи гомеоморфізмів. Не важко довести, що множина всіх DP-перетворень простору (M, ρ) є групою (неабелевою) відносно операції «композиція» перетворень. Тому на фрактальну геометрію природно дивитись, як на науку, яка вивчає інваріанти групи DP-перетворень. Отже, евклідова та афінна геометрії є частковими випадками фрактальної геометрії.

Зауваження 1. Не кожне гомеоморфне перетворення зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича.

У доповіді також обговорюється DP-властивості проективних перетворень.

Література

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension* // Ergodic Theory Dynam. Systems — 2004. — Т. 24, № 7. — С. 1–16.

[2] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Transformations preserving the Hausddorff-Besicovitch dimension* // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Т. 6, № 1. — С. 15–24.

[3] Turbin A.F., Pratsiovytyi M.V. *Fractal sets, functions and distributions.* — Київ: Наук. думка, 1992.

[4] Falconer K.J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* — John Wiley and Sons, 2003.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: yu.p.voloshyn@udu.edu.ua