

**Курсова робота на тему:**  
**Спектральні характеристики ананас графа**

Керівник курсової роботи  
Старший викладач,  
кандидат фіз.-мат. наук  
Лебідь В. О.  
*(прізвище та ініціали)*

\_\_\_\_\_ *(підпис)*  
“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 р.

Виконала студентка  
напряму підготовки  
113 Прикладна математика  
Уткіна Д. Є.  
*(прізвище та ініціали)*

“ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2020 р.

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Зав. кафедри математики,  
проф. Олійник Б. В.

\_\_\_\_\_ (підпис)  
„\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ  
на курсову роботу

студентці Уткіній Д. Є. факультету інформатики 4 курсу  
ТЕМА «Спектральні характеристики ананас графа»

Вихідні дані:

- Brouwer A.E., Haemers W. H., Spectra of graphs, 2011.
- Topcu H., Sorgun S., Haemers W. H., On the spectral characterization of pineapple graphs, Linear Algebra and its Applications 507 (2016), 267–273.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Вступ

1 Основні означення та початкові відомості

1.1 Основні означення

2.2 Розрахунок спектра коспектральних графів

2 Характеристичний поліном ананас графа  $K_p^q$

3 Чи визначається  $K_p^q$  своїм спектром?

3.1 Ананас графи  $K_{2k}^{k^2}$  ( $k \geq 2$ )

3.2 Ананас графи  $K_3^q$

3.3 Ананас графи  $K_p^1$  та  $K_p^2$

3.4 Ананас графи  $K_4^3$  та  $K_5^3$

Висновки

Список літератури

Дата видачі „\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2020 р. Керівник \_\_\_\_\_  
(підпис)

Завдання отримала \_\_\_\_\_

(підпис)

**Тема: «Спектральні характеристики ананас графа»**

**Календарний план виконання роботи:**

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	02.11.2019	
2.	Ознайомлення з поняттям ананас графа.	13.11.2019	
3.	Наведення прикладів та ілюстрацій.	20.01.2020	
4.	Визначення спектра графів.	02.02.2020	
5.	Формулювання тверджень.	01.03.2020	
6.	Доведення тверджень.	05.03.2020	
7.	Написання роботи.	02.04.2020	
8.	Створення слайдів для презентації	14.04.2020	
9.	Захист курсової роботи.	19.04.2020	

Студент                      *Уткіна Д.Є.*

Керівник                      *Лебідь В.О.*

“            ”                      2020 р.

## Зміст

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Основні означення та початкові відомості</b>	<b>5</b>
1.1 Основні означення . . . . .	5
1.2 Розрахунок спектра коспектральних графів . . . . .	7
<b>2 Характеристичний многочлен ананас графа <math>K_p^q</math></b>	<b>11</b>
<b>3 Чи визначається <math>K_p^q</math> своїм спектром?</b>	<b>15</b>
3.1 Ананас графи $K_{2k}^{k^2} (k \geq 2)$ . . . . .	15
3.2 Ананас графи $K_3^q$ . . . . .	16
3.3 Ананас графи $K_p^1$ та $K_p^2$ . . . . .	18
3.4 Ананас графи $K_4^3$ та $K_5^3$ . . . . .	19
<b>Висновки</b>	<b>24</b>
<b>Список літератури</b>	<b>25</b>

# Вступ

Курсова робота присвячена дослідженню спектральних характеристик ананас графа  $K_p^q$ . Вона складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

Уперше спектральна теорія графів виникла у хімії, у теорії Е. Хюккеля у 1931 році. Власні значення матриці, яка відповідала графу, були пов'язані зі стабільністю молекул. Зв'язок між моделлю Хюккеля та спектральною теорією графів було виявлено математиками через десятиріччя. У 1950-х та 1960-х роках були закладені основи спектральної теорії графів. Цветковичем, Дообом і Саксом була зібрана і узагальнена уся теорія в монографію «Спектри графів» у 1980 році [13]. Також спектри графів виникають природним шляхом у різних проблемах теоретичної фізики та квантової механіки, наприклад, – при мінімізації енергій гамільтонових систем. Зараз спектральна теорія графів використовуються у комп'ютерних та соціальних науках, біології, географії та економіці.

Проілюстровано два графи:



Обидва мають однакові спектри:  $[4, 1, (-1)^4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1/2(1 + \sqrt{17}), 1/2(1 - \sqrt{17})]$ . Графи з однаковим спектром називаються коспектральними.

У статті [12] поставили запитання "Які графи визначається спектром?". Це запитання пов'язує спектральну теорію графів з теорією Хюккеля з хімії (див. [13]). У той час вважалося, що кожен граф визначається спектром, поки через рік у роботі [14] Колац і Сіноговіц не презентували пари коспектральних дерев. Ще одне застосування надходить в 1966 році з роботи Фішера [15], який розглядав питання Каца з [16] : "Чи можна почути форму барабана?". Він моделював форму барабана за допомогою графа. Звук барабана характеризується власними значеннями матриці суміжності графа. Після 1967 року було знайдено чимало прикладів коспектральних графів. Найяскравішим результатом такого роду є результат Швенка у [17], який стверджує, що майже всі дерева не визначаються спектром.

Виходячи із тенденції дослідження сімейств коспектральних графів, метою даної роботи є дослідження коспектральних властивостей ананас графа  $K_p^q$  та пошук коспектральних пар для ананас графів при певних значеннях  $p$  та  $q$ .

У роботі розглянуто та доведено формулу для характеристичного полінома ананас графа при довільних  $p$  та  $q$ , загальний вигляд матриці суміжності ананас графа, і досліджено питання "Чи  $K_p^q$  визначається своїм спектром?"

Робота складається з 3 розділів.

У першому розділі наводяться основні означення та початкові відомості зі спектральної теорії графів. Також детально розібраний приклад підрахунку власних значень та власних векторів для пари коспектральних графів.

У другому розділі розглянуто характеристичний поліном ананас графа та наведено доведення його формули.

У третьому розділі проводиться дослідження, при яких значеннях  $p$  та  $q$  ананас граф  $K_p^q$  визначається своїм спектром, а при яких – має коспектральні пари.

## Розділ 1

# Основні означення та початкові відомості

### 1.1 Основні означення

На початку пригадаємо основні означення.

**Означення 1.1.1.** [1] Загальним неорієнтованим графом називають  $G = (V, E, L, \delta_E, \delta_L)$ , де  $V$  - множина вершин,  $E$  - множина ребер,  $L$  - множина петель та відображень

$(\delta_E : E \rightarrow C_V^2)$  - множина двохелементних підмножин множини  $V$ ,

$(\delta_L : L \rightarrow V)$ .

**Означення 1.1.2.** [1] Простим неорієтовним графом називається  $G = (V, E, \delta_E)$ , де  $V$  - множина вершин,  $E$  - множина ребер,  $(\delta_E : E \rightarrow C_V^2)$ .

**Означення 1.1.3.** [1] Кількість ребер інцидентних даній вершині  $v$  плюс подвоєна кількість інцидентних їй петель називають степенем вершини. Якщо степінь вершини дорівнює нулю, то вершина називається ізольованою. Якщо степінь вершини дорівнює одиниці, то вершина називається листом.

**Означення 1.1.4.** [3] Петля - це ребро, яке з'єднує вершину саму з собою.

**Означення 1.1.5.** [2] Нехай  $\Gamma$  - це скінченний неорієтовний граф без петель. Тоді матрицею інцидентності графа  $\Gamma$  є 0-1 матриця  $M$ , з рядками,

індексованими за вершинами і стовпцями, індексованими за ребрами, де  $M_{xe} = 1$ , коли вершина  $x$  є кінцевою точкою ребра  $e$ .

**Означення 1.1.6.** [2] Нехай  $\Gamma$  – це скінченний граф без кратних ребер. Тоді матрицею суміжності графа  $\Gamma$  визначається 0-1 матриця  $A$  з нулів і одиниць, яка індексована набором вершин  $V$  з  $\Gamma$ , де  $A_{xy} = 1$ , коли існує ребро з вершини  $x$  до вершини  $y$  в графі  $\Gamma$ , і  $A_{xy} = 0$ , коли не існує.

У моїй курсовій роботі ми вважатимемо, що  $A_{xy}$  буде дорівнювати числу ребер з  $x$  до  $y$  у випадку мультиграфів.

**Означення 1.1.7.** [1] Кожен граф  $\Gamma$  має дійсне власне число  $\theta_\theta$  з відповідним невід'ємним дійсним власним вектором, так що для кожного власного числа  $\theta$  ми маємо  $|\theta| \leq \theta_\theta$ . Значення  $\theta_\theta(\Gamma)$  не зростає, коли вершини чи ребра видалені з  $\Gamma$ .

**Означення 1.1.8.** [4] Сукупність всіх власних чисел матриці  $A$  називається її спектром.

**Означення 1.1.9.** [2] Спектром скінченного графа  $\Gamma$  називається спектр матриці суміжності  $A$  з кратністю її власних значень.

**Означення 1.1.10.** [2] Нехай  $\Gamma$  – це скінченний неорієнтовний граф без петель. Матрицею Лапласа графа  $\Gamma$  називається матриця  $L$ , яка індексована множиною вершин графа  $\Gamma$ , з нульовим рядом сум, де  $L_{xy} = -A_{xy}$  для  $x \neq y$ . Якщо  $D$  – це діагональна матриця, індексована набором вершин графа  $\Gamma$  таким, що  $D_{xx}$  є степенем вершини  $x$ , тоді  $L = D - A$ .

**Означення 1.1.11.** [2] Спектром Лапласа неорієнтовного скінченного графа без петель  $\Gamma$  є спектр матриці Лапласа.

**Означення 1.1.12.** [1] Нехай  $\Gamma$  – це загальний неорієнтований граф, пара вершин  $v_1, v_m$  та скінченна послідовність ребер  $e_1, e_2, \dots, e_m$  : називається шляхом між вершинами  $v_1, v_m$ , якщо  $v_1$  інцидентна  $e_1$ ,  $v_m$  інцидентна  $e_m$ , а послідовні пари ребер  $e_{i-1}, e_i$  є суміжними для довільного  $i$  :  $1 < i \leq m$ . При цьому вершина  $v_1$  називається початком маршруту, а  $v_m$  – кінцем.



**Означення 1.1.13.** [1] Якщо всі ребра маршруту є різними, то шлях називають ланцюгом, а якщо початок і кінець ланцюга збігаються, то ланцюг називається циклом.

**Означення 1.1.14.** [7] Дерево - це зв'язний граф без циклів.

**Означення 1.1.15.** [2] Граф  $G$  називається дводольним, коли множина його вершин може бути розбита на дві нез'єднані підмножини  $X_1, X_2$ , так, що всі ребра мають одну вершину з  $X_1$  і одну з  $X_2$ .

**Означення 1.1.16.** [2] Граф  $G := (V_1 + V_2, E)$  називається повним дводольним, якщо для будь-яких двох вершин  $v_1 \in V_1$  і  $v_2 \in V_2$  є  $(v_1, v_2)$  ребром в  $G$ . Повний дводольний граф з множинами вершин розміру  $|V_1| = m$  і  $|V_2| = n$  позначається як  $K_{m,n}$ . Спектр  $K_{m,n}$  дорівнює  $\pm\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}$

**Означення 1.1.17.** [2] Реберний граф  $L(G)$  графа  $G$  - це граф з набором вершин як набір ребер графа  $G$ , де дві вершини є суміжними, коли відповідні ребра графа  $G$  мають спільну кінцеву точку.

**Означення 1.1.18.** [2] Простий граф називається  $k$ -регулярний, якщо ступінь кожної вершини дорівнює  $k$ .

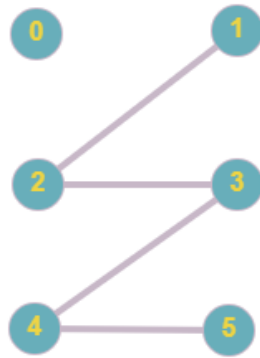
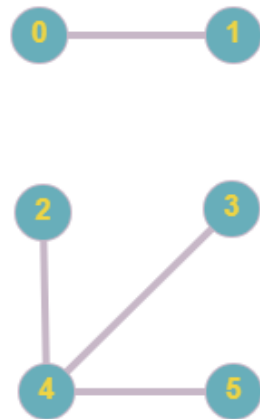
**Означення 1.1.19.** [9] Граф "коктейльної вечірки" на  $2n$  вершинах, позначених  $CP(n)$ , є регулярний граф на  $2n$  вершинах степеня  $2n - 2$ .

**Означення 1.1.20.** [9] Узагальнений реберний граф  $L(H, a_1, \dots, a_n)$  називається побудований з графа  $H$  на  $n$  вершинах  $v_1, \dots, v_n$  і невід'ємні числа  $a_1, \dots, a_n$  в такому порядку:

він містить роз'єднані копії графа  $L(H)$  і  $CP(a_i)$ , ( $i=1, \dots, n$ ), з додатковими ребрами, які з'єднують вершини графа  $L(H)$  з вершинами графа  $CP(a_i)$ , якщо вершина в  $L(H)$  відповідає ребру з  $H$  і має вершину  $v_i$  як кінцеву точку.

## 1.2 Розрахунок спектра коспектральних графів

У цьому підрозділі ми розглядаємо приклад двох коспектральних графів на 6 вершинах.

рис.1.2.1 -  $G_1$ рис.1.2.2 -  $G_2$ 

Напишемо матриці суміжності для наших графів.

1) Матриця суміжності графа  $G_1$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця суміжності графа  $G_2$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Характеристичний поліном пораховано за формулою  $p_A(x) = \det(xI - A)$

$$x^6 - 4x^4 + 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^4 - 4x^2 + 3) = 0$$

Знайдемо власні числа, як корені характеристичного полінома:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \sqrt{3}$$

$$x_4 = -\sqrt{3}$$

$$x_5 = 1$$

$$x_6 = -1$$

3) Щоб знайти власні вектори  $X$ , необхідно підставити значення власних чисел в матрицю  $(xI - A)X$  і розв'язати рівняння  $(xI - A)X = 0$ , де  $X$  - власний вектор матриці  $A$ , що відповідає власному числу  $x$ .

Таблиця власних векторів:

	$G_1$		$G_2$	
$\lambda_{1,2} = 0$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \\ u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	+	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \\ -u \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = \sqrt{3}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ u \\ \sqrt{3}u \\ u \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ \sqrt{3}u \\ 2u \\ \sqrt{3}u \\ u \end{bmatrix}$
$\lambda_4 = -\sqrt{3}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ u \\ -\sqrt{3}u \\ u \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ -\sqrt{3}u \\ 2u \\ -\sqrt{3}u \\ u \end{bmatrix}$
$\lambda_5 = 1$	$\begin{bmatrix} u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ u \\ 0 \\ -u \\ -u \end{bmatrix}$
$\lambda_6 = -1$	$\begin{bmatrix} -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ u \\ -u \\ 0 \\ u \\ -u \end{bmatrix}$

Графи мають однакові характеристичні поліноми і різні власні вектори.

## Розділ 2

# Характеристичний многочлен ананас графа $K_p^q$

У даному розділі наведені означення та теореми пов'язані з ананас графом.

**Означення 2.1.** [1] Граф  $K_n$  називається повним, якщо будь-які дві вершини цього графа з'єднані ребром.

**Приклад 2.1.** Проілюстровано повний граф на 3 вершинах.

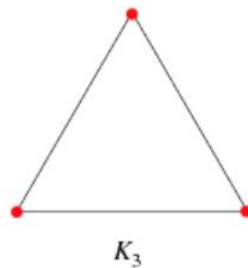


рис.2.1

**Означення 2.2.** [2] Характеристичним поліномом графа  $\Gamma$  називається многочлен, який визначається формулою  $p_A(x) = \det(xI - A)$ .

**Означення 2.3.** [8] Граф зірка  $S_k$  -це повний дводольний граф  $K_{1,q}$ , дерево з одним внутрішнім вузлом і  $q$  листками.

**Приклад 2.2.** Проілюстровано граф зірку на 5,6 і 7 вершинах.

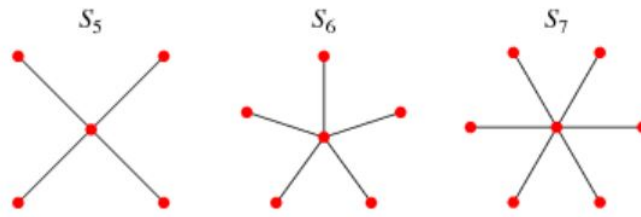


рис.2.2

**Означення 2.4.** [10] Для графа  $G$  зафіксуємо вершину  $v$ . Для графа  $G'$ , який не має із графом  $G$  спільних вершин, зафіксуємо вершину  $v'$ . Коалесценцією графів  $G$  та  $G'$  відносно фіксованих вершин називається граф  $G \cdot G'$ , утворений ідентифікацією вершин  $v \equiv v'$ .

Спектр коалесценції графів визначається наступним твердженням:

**Приклад 2.3.** Проілюстровано коалесценцією графів  $G$  та  $G'$ .

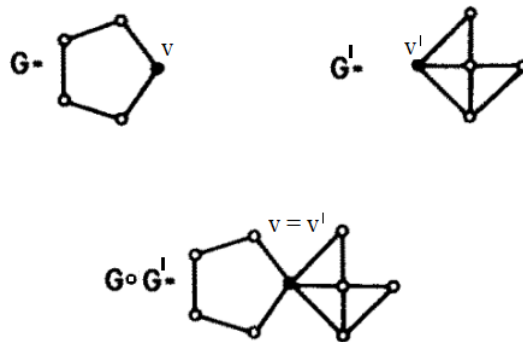


рис.2.3

**Твердження 2.1.** [10] Характеристичний поліном коалесценції двох графів визначається за формулою:

$$P_{G \cdot G'}(x) = P_G(x)P_{G'-v'}(x) + P_{G'}(x)P_{G-v}(x) - xP_{G-v}(x)P_{G'-v'}(x),$$

де  $G - v$  ( $G' - v'$ ) - підграф графа  $G$  ( $G'$ ), отриманий видаленням вершини  $v$  ( $v'$ ).

**Означення 2.5.** [5] Ананас графом  $K_p^q$  називається коалесценція повного графа  $K_p$  з зіркою  $K_{1,q}$  на вершині степеня  $q$ . Таким чином,  $K_p^q$  може бути отриманий з  $K_p$  додаванням  $q$  підвісних ребер до вершини  $K_p$ .

$K_p^q$  має  $n = p + q$  вершин,  $C_p^2 + q$  ребер і  $C_p^3$  трикутників. Для того, щоб

виключити повні графи та зірки, покладемо  $p \geq 3$  та  $q \geq 1$ .

$K_p^q$  може бути заданий його матрицею суміжності

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1^T & 1^T \\ 1 & J_{p-1} - I & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ де } 1 \text{ є вектором з одиниць, а } J_l \text{ є матрицею } l \times l \text{ з одиниць.}$$

**Теорема 2.1.** Характеристичний поліном  $p(x) = \det(xI - A)$  ананас графа  $K_p^q$  дорівнює

$$p(x) = x^{q-1}(x+1)^{p-2}(x^3 - x^2(p-2) - x(p+q-1) + q(p-2)).$$

*Доведення.* Для доведення використаємо попереднє твердження.

Ананас граф є коалесценцією двох графів : графа зірки  $K_{1,q}$  і повного графа  $K_p$ . Вершиною злиття у графа зірки є внутрішній вузол, а в повному графі – будь-яка вершина.

Запишемо характеристичні поліноми для графа зірки  $K_{1,q}$  і для повного графа  $K_p$ :

$$p_{K_{1,q}}(x) = x^{q-1}(x^2 - q),$$

$$p_{K_p}(x) = (x+1)^{p-1}(x - p + 1).$$

Згідно із позначеннями в твердженні:  $G$  - граф зірка  $K_{1,q}$ ,  $G'$  - повний граф  $K_p$ . Тоді  $G - v(G' - v')$  - підграф графа  $G(G')$ , отриманий видаленням вершини злиття графа зірки і повного графа.  $G - v$  - це  $Q$  незвязних точок  $QP_1$ ,  $G' - v'$  - це повний граф на  $p - 1$  вершині  $K_{p-1}$ .

$$p_{G-v}(x) = p_{QP_1}(x) = x^q,$$

$$p_{G'-v'}(x) = p_{K_{p-1}}(x) = (x+1)^{p-2}(x - p + 2).$$

Підставимо в

$$P_{G \cdot G'}(x) = P_G(x)P_{G'-v'}(x) + P_{G'}(x)P_{G-v}(x) - xP_{G-v}(x)P_{G'-v'}(x)$$

наші поліноми:

$$\begin{aligned}
 P_{G.G'}(x) &= x^{q-1}(x^2 - q)(x + 1)^{p-2}(x - p + 2) + (x + 1)^{p-1}(x - p + 1)x^q - x^{q+1}(x + 1)^{p-2}(x - p + 2) = \\
 &= x^{q-1}(x + 1)^{p-2}((x^2 - q)(x - p + 2) + x(x - p + 1)(x + 1) - x^2(x - p + 2)) = \\
 &= x^{q-1}(x + 1)^{p-2}(x^3 - x^2p + 2x^2 - qx + qp - 2q - px + x) = \\
 &= x^{q-1}(x + 1)^{p-2}(x^3 - x^2(p - 2) - x(p + q - 1) + q(p - 2)).
 \end{aligned}$$

Отримали поліном, який співпадає із поліномом у твердженні теореми.

□



## Розділ 3

# Чи визначається $K_p^q$ своїм спектром?

У цій роботі ми розглядаємо питання, чи є  $K_p^q$  єдиним графом з характеристичним поліномом  $p(x)$  з Теорема 2.1. Іншими словами, чи  $K_p^q$  визначається його спектром?

### 3.1 Ананас графи $K_{2k}^{k^2}$ ( $k \geq 2$ )

**Твердження 3.1.1.** *Нехай  $G$  - граф порядку  $3k$  ( $k \geq 2$ ) з матрицею суміжності:*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & J_k & J_k \\ J_k & J_k - I & 0 \\ J_k & 0 & J_k - I \end{bmatrix},$$

*Тоді характеристичний поліном графа  $G$  дорівнює*

$$x^{k-1}(x+1)^{2k-2}(x-k+1)(x^2 - (k-1)x - 2k^2).$$

*Доведення.* Знаходимо, що  $B$  має принаймні  $k-1$  власне значення  $0$ , і принаймні  $2k-2$  власне значення  $-1$ . Інші три власні значення є коренями характерного полінома  $q(x) = (x-k+1)(x^2 - (k-1)x - 2k^2)$ .

□

**Наслідок 3.1.1.** *Якщо  $p = 2k \geq 4$  і  $q = k^2$ , тоді граф  $K_p^q$  не визначається*

його спектром матриці суміжності.

*Доведення.* За Теоремою 2.1 ми маємо характеристичний поліном графа  $K_{2k}^{k^2}$ :  $x^{k^2-1}(x+1)^{2k-2}(x-k+1)(x^2-(k-1)x-2k^2)$

Коли ми додаємо  $k(k-1)$  ізольованих вершин до графа  $G$ , отримуємо граф з тим самим характеристичним поліномом, що  $K_{2k}^{k^2}$  і тому з тим же спектром.

□

**Приклад 3.1.1.** Для  $k=2$ , проілюстровано ананас граф  $K_4^4$ , який має ко-спектральну пару - граф  $G$ . Характеристичний поліном двох графів

$$p(x) = x^3(x+1)^2(x+2)(x^2-x-8)$$

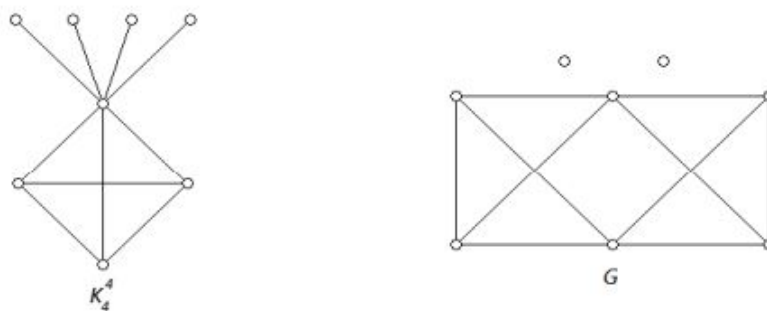


рис.3.1.1

## 3.2 Ананас графи $K_3^q$

Занг у [11] довів, що граф, отриманий додаванням  $q$  підвісних ребер до вершини непарного цикла визначаються спектром матриці суміжності. Коли непарний цикл є трикутником, ми отримуємо, що  $K_3^q$  визначається його спектром.

У випадку  $q=3$ , ананас граф  $K_3^3$  виглядає наступним чином :

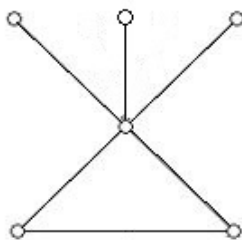


рис.3.2.1

Проведемо дослідження пошуку коспектральних пар для графа  $K_3^3$ .

Характеристичний поліном має вигляд для даного графа

$$p(x) = x^2(x + 1)(x^3 - x^2 - 5x + 3).$$

Власні числа(спектр):

$$x_1 = 2.51413692933529$$

$$x_2 = 0.571993268316203$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_5 = -1$$

$$x_6 = -2.08613019765149$$

Даний граф є графом на 6 вершинах. Перевіримо чи співпадає його спектр із парами коспектральних графів на 6 вершинах.

На даному рисунку пари коспектральних графів на 6 вершинах пораховані у [18]:

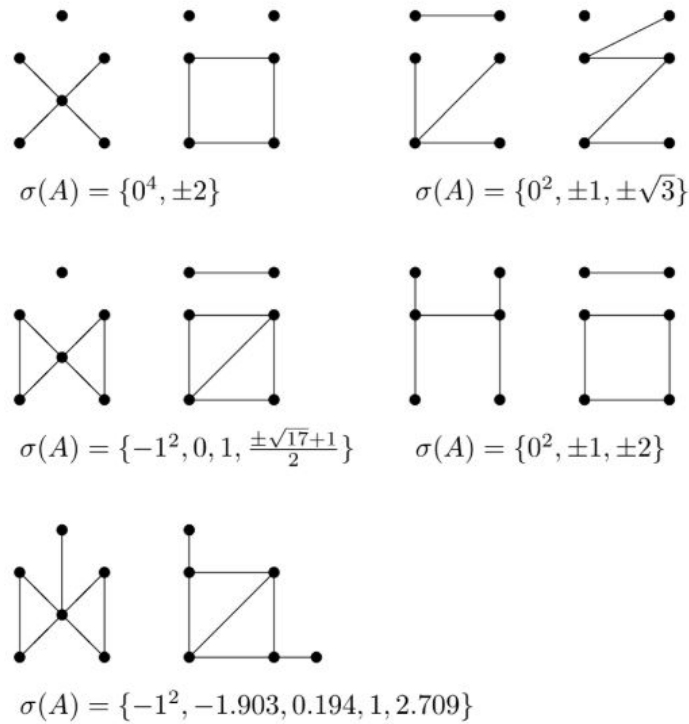


рис.3.2.2

Спектр ананас графа  $K_3^3$  не збігається із жодним зі спектрів коспектральних пар на 6 вершинах, тому даний граф визначається своїм спектром.

### 3.3 Ананас графи $K_p^1$ та $K_p^2$

У випадку  $q = 1$ , ананас граф  $K_p^1$  можна отримати з повного граф  $K_{p+1}$  видаленням ребер повного дводольного графа  $K_{1,p-1}$ . Графи побудовані таким чином, визначаються їх спектром, див. [20].

У випадку  $q = 2$ , формулюємо лему і теорему:

**Лема 3.3.1.** *Нехай  $G$  - зв'язний граф з найменшим власним значенням, більшим за  $-2$ . Тоді одне з наступних тверджень має місце:*

- (i)  $G$  має 8 вершин, і  $d_G = 1$ .
- (ii)  $G$  має 7 вершин, and  $d_G = 2$ .
- (iii)  $G$  ма 6 вершин, and  $d_G = 3$ .
- (iv)  $G$  є реберним графом графа без циклів з циклом непарної довжини, і  $d_G = 4$ .

(v)  $G$  є загальним реберним графом графа дерева типу  $(1, 0, \dots, 0)$ , і  $d_G = 4$ .

(vi)  $G$  є реберним графом графа дерева на  $n \geq 5$  вершинах, і  $d_G = n$

Зауважимо, що  $d_G = |p(-2)|$ , де  $p(x)$  - характеристичний поліном графа  $G$ .

**Теорема 3.1.** *Ананас граф  $K_p^2$  визначається спектром його матриці суміжності.*

*Доведення.* Ідея доведення базується на припущенні того, що існує граф  $G$ , який коспектральний  $K_p^2$ .

Тоді  $G$  має  $p + 2$  вершини,  $C_p^2 + 2$  ребра і  $C_p^3$  трикутників, а характеристичний поліном  $p(x)$  графа  $G$  дорівнює:  $p(x) = x(x + 1)^{p-2}(x^3 - (p - 2)x^2 - (p + 1)x + 2(p - 2))$ . Від супротивного доводиться, що  $G$  є зв'язним і  $d_G = 4$ . Тоді за Лемою 3.3.1 можливі два випадки (iv) або (v). Розглядаючи випадки (iv) та (v), автори знаходять суперечність із припущенням. Повне доведення наведено у [5].

### 3.4 Ананас графи $K_4^3$ та $K_5^3$

При  $q = 1$  і  $q = 2$  було доведено, що ананас граф визначається своїм спектром. Наступним логічним кроком є дослідження ананас графа при  $q = 3$ . Проведемо дослідження для  $K_4^3$  та  $K_5^3$ .

Ананас граф  $K_4^3$  виглядає наступним чином :

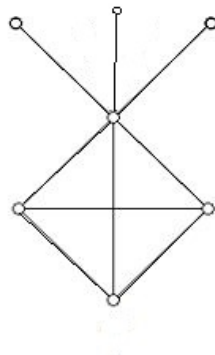


рис.3.4.1

Характеристичний поліном має вигляд

$$p(x) = x^2(x + 1)^2(x^3 - 2x^2 - 6x + 6)$$

Власні числа(спектр):

$$x_1 = 3.27307286306767$$

$$x_2 = 0.859564630512172$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_5 = x_6 = -1$$

$$x_7 = -2.13263749357984$$

Годсіл і Маккей статті [19] згенерували комп'ютером всі пари неізоморфних коспектральних графів на семи вершин. На 7 вершинах усього 110 коспектральних графів [18]. Оскільки  $K_4^3$  відсутній в їх списку, то він визначається його спектром.

Ананас граф  $K_5^3$  виглядає наступним чином :

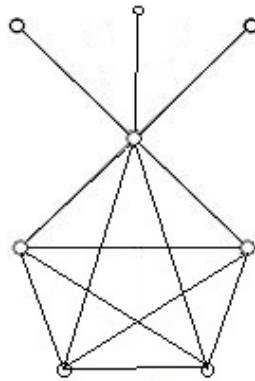


рис.3.4.2

Характеристичний поліном має вигляд

$$p(x) = x^2(x + 1)^3(x - 1)(x^2 - 2x - 9)$$

Власні числа(спектр):

$$x_1 = 1 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = x_4 = 0$$

$$x_5 = x_6 = x_7 = -1$$

$$x_8 = 1 - \sqrt{10}$$

На 8 вершинах усього 1722 коспектральних графів [18].

Зробимо перетворення характеристичного полінома

$$p(x) = x^2(x+1)^3(x-1)(x^2-2x-9) = x^2(x^2-1)(x+1)^2(x^2-2x-9).$$

Спробуємо знайти граф  $H$ , коспектральний даному, який має такий саме характеристичний поліном.

Припустимо, що даний граф є незв'язним об'єднанням наступних графів :

- графа  $2P_1$ , тобто 2 незв'язних точок, характеристичний поліном яких

$$p_1(x) = x^2.$$



рис.3.4.3

- графа  $P_2$ , шляху довжини 2, характеристичний поліном якого

$$p_2(x) = x^2 - 1.$$



рис.3.4.4

- графа на 4 вершинах, характеристичний поліном якого

$$p_3(x) = (x+1)^2(x^2-2x-9).$$

З таблиці видно, що всього графів на 4 вершинах є 7. (Позначення:  $n$ - кіль-

кість ребер,  $N$  - кількість графів для відповідного  $n$ .)

$n$	$N$
2	2
3	3
4	2

Проілюструємо всі ці графи.

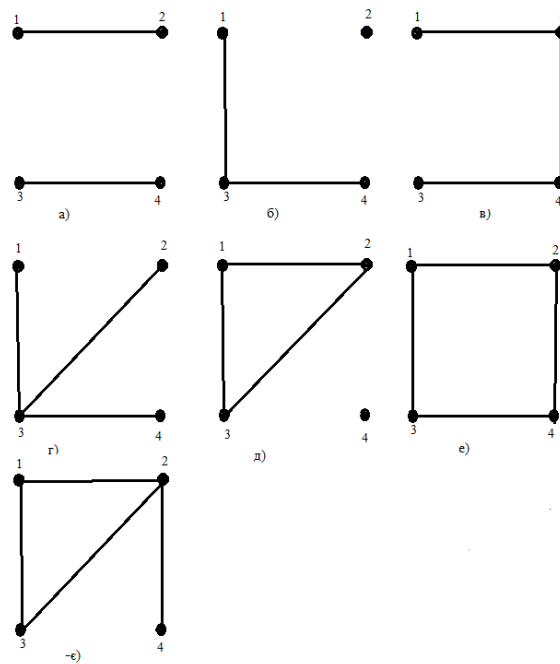


рис.3.4.5

1) Характеристичні поліноми кожного з них дорівнюють

а)  $q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

б)  $q(x) = x^4 - 2x^2$

в)  $q(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

г)  $q(x) = x^4 - 3x^2$

д)  $q(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$

е)  $q(x) = x^4 - 4x^2$

є)  $q(x) = x^4 - 4x^2 - 2x + 1$

Оскільки спектри побудованих графів не співпали зі спектром ананас графа  $K_4^3$ , то дане конструювання не дало коспектральної пари для ананас графа



фoм  $K_4^3$ .

□

## Висновки

Курсову роботу було присвячено дослідженню коспектральних властивостей ананас графа  $K_p^q$  та пошуку коспектральних пар для ананас графів при певних значеннях  $p$  та  $q$ .

У першому розділі роботи були розглянуті основні теоретичні відомості, введені необхідні визначення, такі як: загальний неорієнтований граф, спектр скінченного графа, матриця суміжності графа тощо. Продемонстрований розрахунок матриці суміжності, спектра, власних векторів, характеристичного полінома двох коспектральних графів.

У другому розділі наведені означення та теореми пов'язані з ананас графом, такі як повний граф, граф зірка, ананас граф, коалесценція двох графів і доведено теорему про характеристичний поліном ананас графа.

У третьому розділі досліджується питання "Чи визначається  $K_p^q$  своїм спектром?". Для графів  $K_p^1$ ,  $K_p^2$  ( $p \geq 3$ ),  $K_3^q$  ( $q \geq 3$ ) і  $K_4^3$  було доведено, що ананас граф визначається своїм спектром. Натомість, граф  $K_{2k}^{k^2}$  має коспектральні пари.

## Список літератури

- [1] Боднарчук Ю. В., *Основи дискретної математики: навч. посіб.*, К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», Боднарчук Ю. В., Олійник Б. В., ISBN: 978-966-518-484-3, 2007.
- [2] Brouwer A.E., *Spectra of graphs.*, Brouwer A.E., Haemers W. H., ISBN 978-1-4614-1939-6, 2011.
- [3] Гейн А. Г., *Інформатика і ІКТ*, Гейн А. Г., Сенокосов А. І., 2-е видав.— 336 с., ISBN 978-5-09-026867-7, 2011.
- [4] Клименко А. В., *Теплоенергетика і теплотехніка.*, Клименко А. В., Зорін В. М., — 3-е вид., перероб. М.: МЭИ, 1999 — 528 с. — ISBN 5-7046-0511-7.
- [5] Torcu H., *On the spectral characterization of pineapple graphs.*, Torcu H., Sorgun S., Haemers W. H., *Linear Algebra and its Applications* 507 (2016), 267–273.
- [6] Levit V, E., *The Independence Polynomial of a Graph—A Survey.*, Levit V, E., Mandrescu E., *Discrete Appl. Math.* 156: 478-491, 2005.
- [7] Skiena S., *Trees.*, Skiena S., Mandrescu E., 1990.
- [8] Harary F., *Graph Theory.*, Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1969.
- [9] Petrovi M., *Generalized line graphs with the second largest eigenvalue at most 1.*, Petrovi M., Milekic B., *Graph Theory*, 27 (1998), 61-66.
- [10] Грушка Д., *Побудова коспектральних графів відносно узагальненої матриці суміжності.*, Грушка Д., Лебідь В., *Могилянський математичний журнал : науковий журнал.* - 2018. - Т. 1. - С. 11-14.

- [11] Zhang X., *Some graphs determined by their spectra*, *Linear Algebra and its Applications.*, 431 (2009), 1443-1454.
- [12] Gunthard Hs.H, *Zusammenhang von Graphentheorie und MO-Theorie von Molekeln mit Systemen konjugierter Bindungen.*, Gunthard Hs.H, Primas H., 1956, *Helvetica Chimica Acta* 39(6):1645 - 1653 · October 2004.
- [13] Cvetkovic D., *Spectra of Graphs, third ed.*, Cvetkovic D. M., Doob H., Leipzig, Johann Ambrosius Barth Verlag 1995. 447 pp., 51 figures, 12 tables, DM 168.–. ISBN 3335004078.
- [14] Collatz L., *Spektren endlicher Grafen.*, Collatz L., Sinogowitz U., *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitet Hamburg* volume 21, pages 63–77(1957).
- [15] Fisher M., *On hearing the shape of a drum.*, *J. Combinatorial Theory*, 1(1966), 105-125.
- [16] Kac M., *Can one hear the shape of a drum?.*, Kac M., Sinogowitz U., *The American Mathematical Monthly*, Vol. 73, No. 4, Part 2: Papers in Analysis (Apr., 1966), pp. 1-23 1966.
- [17] Schwenk A. J., *Almost all trees are cospectra.*, In: Harary, F., Ed., *New Directions in the Theory of Graphs*, Academic Press, New York, 275-307. 1973.
- [18] Haemers, W., *Enumeration of Cospectral Graphs.*, Haemers, W., Spence, E., *European Journal of Combinatorics* 25 (2004), 199-211.
- [19] Godsil, C., *Constructing cospectral graphs*, *Aequationes Math*, Godsil, C., McKay, B.D., (1982), 257- 268.
- [20] Camara, M., *Spectral Characterizations of Almost Complete Graphs*, *Discrete Appl. Math*, Camara, M., Haemers, W.H., 176 (2014), 19-23.