Про T-групоїди на скінченних деревах

Катерина Антошина[*], Сергій Козеренко[*,◇,♦], Кирило Первушин[◇]

[*] Інститут математики НАН України
[◇] Національний університет «Києво-Могилянська академія»,
[♦] Київська школа економіки

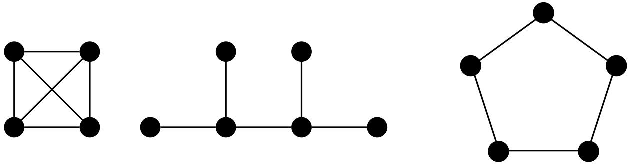
2024

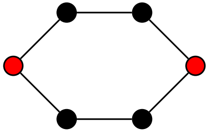
Означення

Ми розглядаємо прості, скінченні, зв'язні неорієнтовані графи.

Граф називається геодетичним, якщо між кожною парою його вершин існує єдиний найкоротший ланцюг.

Наприклад, повні графи, непарні цикли та дерева є геодетичними графами.





у парних циклах між протилежними вершинами два найкоротші ланцюги!

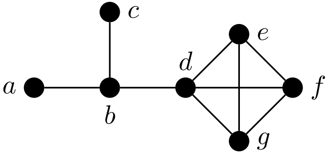
T-групоїд

На множині вершин $V(G)$ геодетичного графа G коректно визначена бінарна операція $+$: для $u, v \in V(G)$ покладемо $u + u = u$ та для $u \neq v$, $u + v$ є першою вершиною, відмінною від u, що лежить на (єдиному) найкоротшому ланцюгу між u та v.

Пара $(V(G), +)$ називається T-групоїдом (англ. travel groupoid [1]), породженим геодетичним графом G. Наприклад, якщо $uv \in E(G)$, то $u + v = v$, а $v + u = u$.

T-групоїд

Наприклад:



$a + e = b$,

$e + a = f + a = g + a = d$,

$a + c = c + a = b$

тощо.

Комутуючі пари на дереві

Ми розглядатимемо операцію $+$ лише для дерев.

Очевидно, що $+$ не є комутативним у загальному випадку.

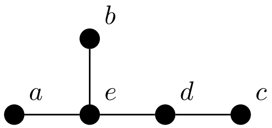
Твердження 1. На T-групоїді для вершин u, v справедливо, що $u + v = v + u$ тоді і тільки тоді, коли $u = v$ або $d_T(u, v) = 2$.

Для дерев було отримано наступний результат.

Твердження 2. Кількість (невпорядкованих) комутуючих пар вершин відносно $+$ на дереві T дорівнює $1 + \frac{1}{2}M_1(T)$, де $M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G^2(u)$ – це перший загребський індекс графа G.

Питання асоціативності

Операція $+$ не є асоціативною.



Справді, розглянемо граф на рисунку.

$$a + b = e \qquad b + c = e$$

$$(a + b) + c = e + c = d \qquad a + (b + c) = a + e = e$$

Питання асоціативності

Теорема 1. Нехай T — дерево. Впорядкована трійка $(a, b, c) \in V(T)^3$ є асоціативною для $+$ тоді й тільки тоді, коли $a = b$, або $a + b = c$, або $b + c = a$.

Із Теореми 1 одразу можна обчислити кількість таких трійок, яка як виявляється, не залежить від структури самого дерева.

Наслідок. Кількість асоціативних трійок відносно $+$ на n-вершинному дереві дорівнює $3n^2 - 2n$.

Властивості

У роботі [1] була отримана абстрактна характеризація T-групоїдів за допомогою трьох властивостей.

Лема. [1] Нехай T — дерево із визначеною раніше операцією $+$. Тоді $+$ задовольняє такі властивості: для всіх $u, v, w \in V(T)$

1. $(u + v) + u = u$,
2. якщо $(u + v) + v = v$, тоді $u = v$,
3. якщо $u \neq u + v = v \neq u + w$, то $v + w = u$.

І навпаки, якщо $\circ$ — абстрактна операція на множині V, що задовольняє умови 1–3, то існує дерево T із $V(T) = V$, для якого $\circ = +$.

Підгрупоїди

Нехай тепер $(X, \circ)$ — деякий групоїд. Його підгрупоїдом називається підмножина $A \subset X$, замкнена відносно операції $\circ$.

Твердження 3. Нехай T — дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є підгрупоїдом відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A — зв'язна множина.

Як і підгрупи в групі, підгрупоїди в групоїді утворюють решітку відносно включення. Для T-групоїдів ця решітка вивчалась раніше в роботі [2]. Зокрема, в [2] було показано, що за цією решіткою можна відновити саме дерево з точністю до ізоморфізму.

Твірна множина

Множину $A \subset X$ в групоїді $(X, \circ)$ назвемо твірною, якщо найменшим підгрупоїдом у X, який містить A, є весь X.

Твердження 4. Нехай T — дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є твірною відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A містить всі листки T.

Таким чином, T-групоїд $(V(T), +)$ має єдину найменшу твірну множину — множину всіх листків дерева T.

Гомоморфізми

Гомоморфізмом між двома групоїдами $(X, \circ)$ та $(Y, *)$ називається відображення $f\colon X \to Y$ таке, що $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ для всіх $a, b \in X$. Відображення $f\colon V(G) \to V(H)$ між графами G, H називається гомоморфізмом, якщо для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконано $f(u)f(v) \in E(H)$.

Теорема 2. Відображення $f\colon V(T_1) \to V(T_2)$ між двома деревами T_1, T_2 є гомоморфізмом між їхніми T-групоїдами тоді й тільки тоді, коли f — постійне або є ін'єктивним гомоморфізмом дерев.

Список використаної літератури

L. Nebesky, *A tree as a finite nonempty set with a binary operation* // Math. Bohem. **125** (2000), 455–458.

B. Zelinka, *The lattice of all subtrees of a tree* // Math. Slovaca **27** (1977), 277–286.