

## ПРОФІЛЬНА МОДЕЛЬ ВОЛОГОПЕРЕНОСУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

*Розвинуто нестационарну профільну модель вологопереносу в пористих середовищах. Моделювання здійснено одночасно в зонах повного і неповного насичення без їх явного виділення. Проблему математично сформульовано як крайову задачу з односторонніми умовами. Для чисельного розв'язання використано неявний метод скінченних різниць, розвинутий для ділянок складної форми та великих розмірів. Як приклад застосування моделі наведено результати моделювання для фільтруючої дамби.*

**Ключові слова:** модель вологопереносу, проміжки височування.

### Вступ

Оцінка стану ґрунтових вод у вертикальному перерізі товщі ґрунту є необхідним компонентом багатьох геотехнічних та гідрогеологічних досліджень. Такі дослідження проводяться для аналізу стану різноманітних гідротехнічних об'єктів, до яких належать: фільтруючі дамби [9], земляні греблі [15], дренажні системи, зокрема, відкритого типу, для оцінки фільтраційних режимів поблизу кар'єрів [11], хвостосховищ [10]. Моделювання дає змогу вивчати та прогнозувати ефекти просочування, визначати конфігурацію вільної поверхні ґрунтових вод, розподіл та зміни парового тиску в них, а також виникнення та динаміку проміжків височування. Особливий інтерес викликає моделювання профільної фільтрації та вологопереносу в ділянках великих площинних розмірів зі складною границею.

Останнім часом цікавість до таких задач виникає у зв'язку з дослідженнями водоносних горизонтів поблизу узбережжя [16]. Це необхідне для оцінки вторгнення солоних вод у водоносні горизонти, а також зменшення надходження забруднювачів у прибережні водоносні горизонти. Також такі дослідження актуальні для аналізу стійкості схилів [14], де математичне моделювання може мати вирішальне значення для розуміння й інтерпретації фізичних явищ.

У дослідженні розвинуто профільну модель фільтрації та вологопереносу в пористих середовищах. Разом із моделлю KRISFLOW [8, 7] розроблене програмне забезпечення доповнює пакет комп'ютерних моделей для комплексного вивчення потоку ґрунтових вод. Модель дає змогу враховувати в розрахунках: шаруватість ґрунтів (зокрема, тонкі слабкопроникні прошарки), перетік між шарами ґрунту, різноманітні гідрогеологічні умови, що змінюються у часі та просторі, складну форму границі ділянки.

Модель ґрунтується на рівнянні вологопереносу і дає змогу моделювати фільтрацію одночасно у зонах повного та неповного насичення без явного виділення ліній поділу. Для рівняння вологопереносу використано формулювання у вигляді задачі з односторонніми умовами [3]. Такий підхід уможливорює вивчення динаміки ґрунтових вод в утворенні багатьох проміжків височування і виключає необхідність алгоритмічно стежити за їхнім виникненням. Відбувається втілення консервативних нелінійних різницевоїх схем на нерівномірних сітках для ділянок складної форми. Ефективність чисельних алгоритмів розв'язування нелінійних різницевоїх рівнянь досягнута шляхом комбінування прямих та ітераційних методів розв'язування нелінійних систем різницевоїх рівнянь.

Серед програмного забезпечення слід відзначити пакети SEEP/W [14], SEEP2D/UTEXAS [13].

### Математична модель

Розглянемо двовимірний вертикальний переріз дамби ABCDEFG, яка складається з шарів ґрунту, що мають різну гідралічну провідність (рис. 1). Кожний геологічний шар ґрунту є однорідним та ізотропним.

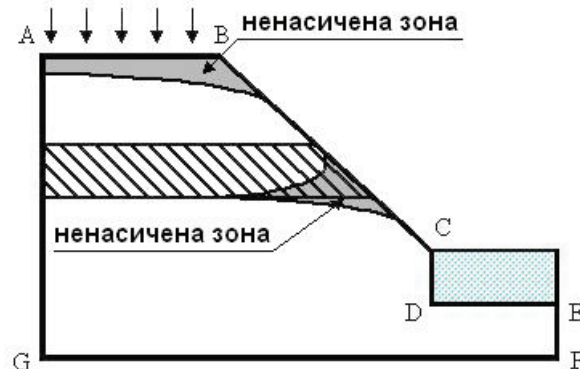


Рис. 1. Вертикальний переріз дамби

Нестационарна течія в заданій області описується рівнянням Річардса:

$$\frac{\partial \theta(x, u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + f(x, t, u), \quad (1)$$

де  $x_i$ ,  $i = 1, 2$  – вертикальна та горизонтальна координати,  $x = (x_1, x_2)$ ;  $t$  – час;  $u(x, t)$  – гідралічний напір;  $f(x, t, u)$  – розподілені або зосереджені джерела в ділянці;  $\theta(x, u)$  – об'ємна вологість ґрунту;  $k(x, u)$  – коефіцієнт вологопровідності.

Рівняння (1) враховує не тільки зміни в об'ємній вологості ненасиченої зони, а також фільтрацію в насиченій зоні (для більшості випадків в насиченій зоні можна вважати  $\theta(x, u)$  і  $k(x, u)$  кусково-сталими).

Положення вільної поверхні ґрунтових вод визначається з розв'язку рівняння (1) як ізобара  $p(x, t) = 0$ , де  $p(x, t)$  – тиск, зв'язаний з напором співвідношенням  $u = p(x, t) - x_1$  (за нульовий прийнято тиск атмосферного повітря). Точки ділянки, де  $p(x, t) < 0$ , визначають ненасичену зону, точки  $p(x, t) \geq 0$  – насичену.

Для розв'язування рівняння (1) необхідно записати математичні вирази в термінах  $u(x, t)$  для фізичних умов, що виконуються на межах ділянки течії.

На ділянках межі АВ та GF (рис. 1) звичайно задаються умови

$$k \frac{\partial u}{\partial x_1} = Q_1(x, t), \quad k \frac{\partial u}{\partial x_1} = Q_2(x, t), \quad t > 0, \quad (2)$$

де  $Q_1(x, t)$  – визначає інфільтрацію,  $Q_2(x, t)$  – визначає величину потоку (від'ємного або додатного) через нижню границю області. Якщо нижня межа є водоупором  $Q_2(x, t) = 0$ .

На межі AG задається одна з двох умов

$$k \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{або} \quad u(x, t) = h(x, t), \quad t > 0. \quad (3)$$

На ділянках межі CD, DE та EF залежно від конкретних гідрогеологічних умов задаються умови типу (2) або (3).

На ділянці межі ВС можливе виникнення проміжків височування. За їхнім утворенням межа розділяє ділянку на два типи – з нульовим тиском (на проміжках височування) і нульовим потоком на іншій частині. Оскільки ці підділянки заздалегідь невідомі, маємо задачу з невідомою межею, яку сформулюємо як задачу з односторонніми умовами. На всій ділянці ВС задаються умови напівпроникності [2]

$$k \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{якщо} \quad u(x, t) < U(x), \quad (4)$$

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0, \quad \text{якщо} \quad u(x, t) = U(x), \quad (5)$$

де  $U(x)$  – напір, який відповідає нульовому тиску,  $n$  – вектор зовнішньої нормалі до границі ВС. Ці умови дають змогу автоматично враховувати виникнення та динаміку декількох (їх кількість необмежена і залежить від конкретних гідрогеологічних умов) проміжків височування на межі ділянки.

У випадку шаруватих ґрунтів для кожного шару задаються функції  $k(x, u)$  та  $\theta(x, u)$ , а на лініях шарів задаються звичайні умови спряження, тобто неперервність шуканої функції та потоку.

За початкову умову береться

$$u(x, t) = g(x), \quad t = 0, \quad (6)$$

Розглянуто постановку задачі, яка певною мірою є типовою. Використовуючи інші комбінації крайових умов для рівняння (1), можна охопити багато різноманітних проблем, які виникають у вивченні профільного потоку.

### Різницева схема та метод розв'язання різницевої задачі

Для розв'язування задачі з умовами (4)–(5) використовують метод штрафу [1]. Відповідно до цього методу задачу (1) – (5) замінюють послідовністю задач із штрафом в крайовій умові на ділянці межі ВС. Напір  $u_\varepsilon$  знаходимо з розв'язку рівняння

$$\frac{\partial \theta(x, u_\varepsilon)}{\partial t} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k(x, u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \right) + f(x, t, u_\varepsilon) \quad (7)$$

за умови на ділянці ВС

$$k(x, u_\varepsilon) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = Q_3(x, t, u_\varepsilon), \quad (8)$$

де  $Q_3(x, t, u_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}(U - u_\varepsilon)^-$ ,  $\varepsilon$  – параметр штрафу,  $\varepsilon > 0$ ,

$$(U - u_\varepsilon)^- = \begin{cases} 0, & \text{якщо } u_\varepsilon \leq U, \\ -(U - u_\varepsilon), & \text{якщо } u_\varepsilon > U. \end{cases}$$

Інші крайові та початкова умови залишаються без змін.

Задачі, що розв'язуємо, ставлять відповідні вимоги до алгоритмів та програмного забезпечення. Для дискретизації задачі вологопереносу використовуємо метод скінченних різниць. Консервативну різницеву схему, побудовану для розв'язування нелінійного рівняння параболічного типу, розвинуто для ділянок досить довільної форми. Складність використання скінченно-різницевого методу для таких задач полягає у побудові різницевої апроксимації для точок, розташованих на межі ділянки.

Для розв'язування крайової задачі для рівняння (1) використовуємо метод скінченних різниць. У ділянці ABCDEFG вводимо в загальному випадку нерівномірну різницеву сітку. За інтегро-інтерполяційним методом [5] одержує-

мо неявну різницеву апроксимацію рівняння (1) для всіх внутрішніх вузлів сіткової ділянки:

$$\begin{aligned} & \frac{\theta(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1}) - \theta(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^n)}{\tau} = \\ & = \frac{1}{2\tilde{h}_{1i}} \left( (k(x_{1i+1}, x_{2j}, y_{ji+1}^{n+1}) + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji+1}^{n+1} - y_{ji}^{n+1}}{h_{1i}} - \right. \\ & \left. - (k(x_{1i-1}, x_{2j}, y_{ji-1}^{n+1}) + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji}^{n+1} - y_{ji-1}^{n+1}}{h_{1i-1}} \right) + \\ & + \frac{1}{2\tilde{h}_{2j}} \left( (k(x_{1i}, x_{2j+1}, y_{ji+1}^{n+1}) + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji+1}^{n+1} - y_{ji}^{n+1}}{h_{2j}} - \right. \\ & \left. - (k(x_{1i}, x_{2j-1}, y_{ji-1}^{n+1}) + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji}^{n+1} - y_{ji-1}^{n+1}}{h_{2j-1}} \right) + \\ & + f(x_{1i}, x_{2j}, t_{n+1}, y_{ji}^{n+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Через  $y_{ji}^{n+1}$  позначено сіткову функцію, яка апроксимує розв'язок диференціального рівняння (1) у вузлі сітки  $(x_{1i}, x_{2j})$  в  $n + 1$  момент часу,  $h_{1i}$  – кроки сітки у напрямку  $x_1$ ,  $h_{2i}$  – кроки сітки у напрямку  $x_2$ ,  $\tilde{h}_i = (h_{i-1} + h_i)/2$ ,  $\tilde{h}_j = (h_{j-1} + h_j)$   $\tau$  – крок за часом. Вибрана апроксимація коефіцієнтів рівняння дає другий порядок точності різницевої схеми за просторовими змінними.

Для ділянок із складною границею апроксимація крайових умов значно ускладнює процедуру розв'язання задачі. Як і різницєва апроксимація рівняння, апроксимація крайових умов будується з використанням інтегро-інтерполяційного методу. Наприклад, для точок межі ВС різницєва умова має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{ji}^{n+1} - \theta_{ji}^n}{\tau} = \\ & = \frac{2}{h_{j-1} \sin \alpha} Q_3(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1}) - (k(x_{1i}, x_{2j-1}, y_{ji-1}^{n+1}) + \\ & + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji}^{n+1} - y_{ji-1}^{n+1}}{h_{j-1}^2} + \\ & + \frac{\tilde{h}_j}{\tilde{h}_i h_{j-1}} (k(x_{1i+1}, x_{2j}, y_{ji+1}^{n+1}) + \\ & + k(x_{1i}, x_{2j}, y_{ji}^{n+1})) \frac{y_{ji+1}^{n+1} - y_{ji}^{n+1}}{h_i} + f(x_{1i}, x_{2j}, t_{n+1}, y_{ji}^{n+1}). \end{aligned}$$

Побудована таким чином різницєва схема консервативна, тобто зберігає на різницєвому рівні закон збереження, властивий фізичній задачі. Для розв'язання нелінійної системи різницєвих рівнянь побудовано блочний ітераційний алгоритм на основі комбінації методу Ньютона та методу послідовної верхньої релаксації. Даний алгоритм модифіковано таким чином, щоб він працював для ділянок великої розмірності. Особливо це стосується ділянок, для яких гори-

зонтальна протяжність значно більша вертикального розміру.

Запишемо різницєву схему для рівняння (1) як операторного рівняння

$$F(Y) = 0. \quad (14)$$

Позначимо через  $Y^s$  деяке наближення до розв'язку рівняння (14). Тоді наступне наближення, згідно з методом Ньютона [4], запишемо як

$$F'(Y^s)Y = F'(Y^s)Y^s - F(Y^s). \quad (15)$$

Вводячи позначення

$$A = F'(Y^s), \quad B = F'(Y^s)Y^s - F(Y^s),$$

систему (15) перепишемо так

$$AY = B, \quad (16)$$

де  $A$  – лінійний оператор, який визначається матрицею Якобі і подається у вигляді

$$A = D - L - U,$$

де  $D$  – діагональна,  $L$  – строго нижня трикутна,  $U$  – строго верхня трикутна матриці. Використовуючи для розв'язання системи (16) метод послідовної верхньої релаксації ітераційну процедуру запишемо

$$(D - \omega L)Y^{s+1} = (D - \omega L)Y^s - \omega F(Y^s), \quad (17)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots,$$

де використано позначення:  $Y^0$  – деяке наближення до розв'язку системи (14), яке приймається за початкове;  $\omega$  – релаксаційний параметр.

Щоб застосувати ітераційну процедуру (17) для розв'язання одержаної системи різницєвих рівнянь, розглянемо вектори  $Y_j^{n+1}$  розмірності  $N_j + 1$ , компонентами яких є значення сіткової функції  $y_{ji}^{n+1}$  в  $n + 1$  момент часу у вузлах різницєвої сітки, розташованих на  $j$ -му стовпчику сіткової дільниці.

Маємо

$$Y_j^{n+1} = (y_{j0}^{n+1}, y_{j1}^{n+1}, y_{j2}^{n+1}, \dots, y_{ji}^{n+1}, \dots, y_{jN_j}^{n+1})^T,$$

$$j = \overline{0, N_j}.$$

Тоді запишемо систему різницєвих рівнянь у триточковому матрично-векторному вигляді

$$\begin{aligned} & -C_0 Y_0^{n+1} + B_0 Y_1^{n+1} = -\Phi_0, \\ & A_j Y_{j-1}^{n+1} - C_j Y_j^{n+1} + B_j Y_{j+1}^{n+1} = -\Phi_j, \quad j = \overline{1, N_j - 1} \\ & A_{N_j} Y_{N_j-1}^{n+1} - C_{N_j} Y_{N_j}^{n+1} = -\Phi_{N_j}, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $A_j, B_j$  – квадратні діагональні матриці розмірності  $(N_j + 1) \times (N_j + 1)$ ,  $C_j$  – квадратні тридіагональні матриці розмірності  $(N_j + 1) \times (N_j + 1)$ .

Перепишемо (18) у вигляді

$$\begin{aligned} & F_0(Y_0^{n+1}, Y_1^{n+1}) = 0, \\ & F_j(Y_{j-1}^{n+1}, Y_j^{n+1}, Y_{j+1}^{n+1}) = 0, \quad j = \overline{1, N_j - 1}, \\ & F_{N_j}(Y_{N_j-1}^{n+1}, Y_{N_j}^{n+1}) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Визначаючи  $F_j, j = \overline{0, N_j}$  як компоненти відображення  $F$ , для розв'язання системи (18) використовують ітераційну процедуру (17). Ліній-

ні системи з тридіагональними матрицями для кожного стовпчика на кожній ітерації розв'язують методом прогонки [6].

### Результати чисельних розрахунків

Розглянемо результати чисельних експериментів для демонстрації працездатності математичного та програмного забезпечення.

Розглядається задача насичення пористої дамби при швидкому піднятті води з лівої сторони дамби. Тришарова дамба має середній шар із малою проникністю порівняно з сусідніми шарами (коефіцієнти фільтрації шарів мають, відповідно, значення 0,35 м/добу, 0,008 м/добу, 0,35 м/добу). Похилий схил дамби утворює кут

$\alpha = 45$  градусів. Площинні розміри ділянки (в метрах) подано на рис. 2. У початковий момент часу напір у ділянці дорівнював  $-7$  м. Під час моделювання рівень води з правої сторони дамби становив  $2$  м. Коефіцієнти вологопровідності й вологоємності використовувались у формі таблиць та інтерполювались в чисельних розрахунках.

Насичуючи дамбу, вода витікає на протилежному її боці. На рис. 2 зображено положення вільної поверхні та проміжків височування у різні проміжки часу. Наявність середнього слабопроникного шару суттєво впливає на характер насичення дамби. З часом на схилі утворилося два проміжки височування. Експериментальне підтвердження такої ситуації наведено в [12].

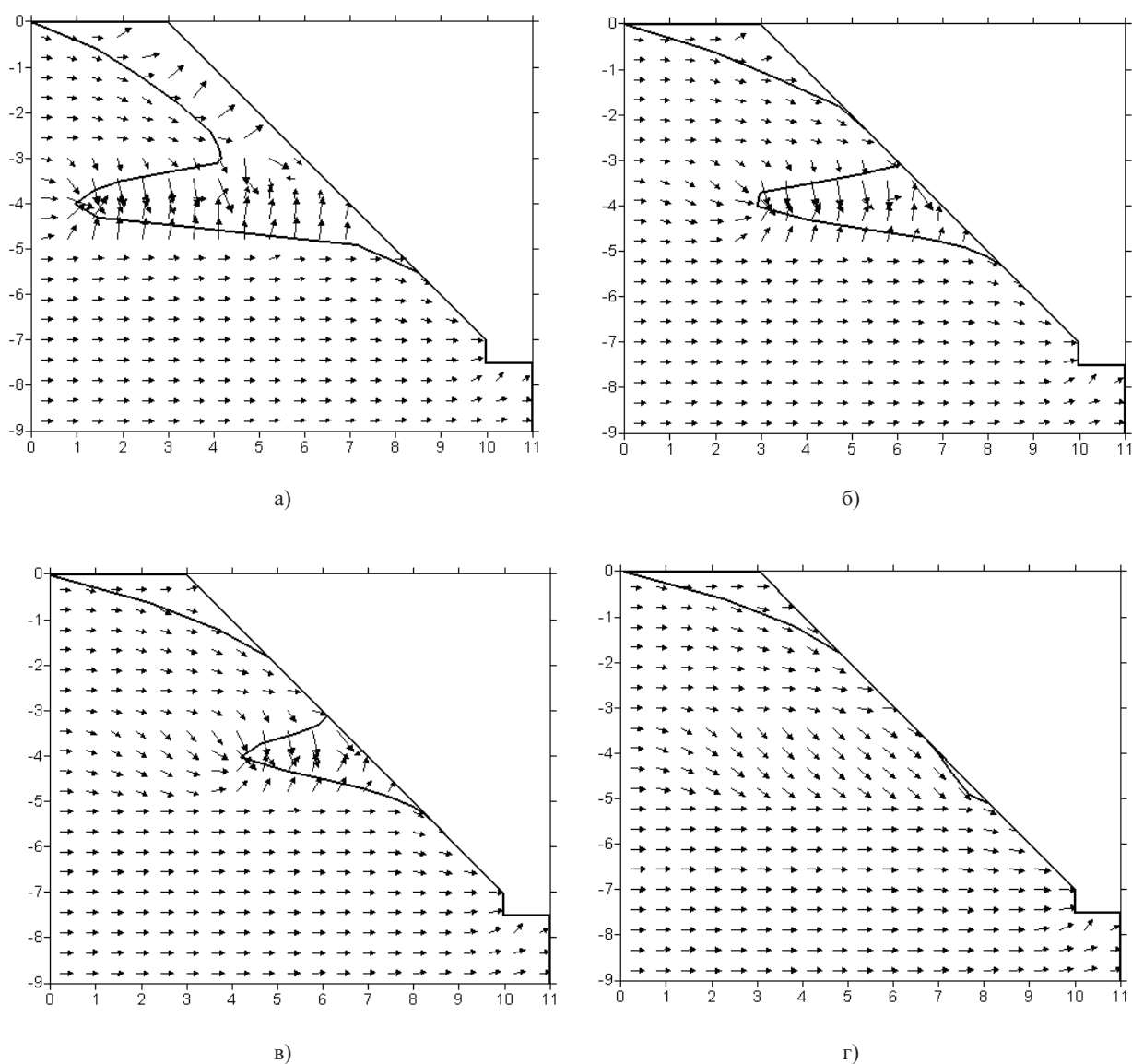


Рис. 2. Результати розрахунків для різних проміжків часу:  
а) 3 доби, б) 6 діб, в) 9 діб, г) стаціонарний режим

### Висновки

Розроблене програмне забезпечення дає змогу моделювати різні гідрогеологічні ситуації, викликані технічними і природними факторами. Це, своєю чергою, дає змогу обґрунтувати

комплекси технічних заходів (будівництво захисних дамб, протифільтраційних екранів, дренажних споруд різного призначення), спрямованих на зниження впливу об'єкта на навколишнє середовище.

### Література

1. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М. : Мир, 1979. – 574 с.
2. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М. : Наука, 1980. – 384 с.
3. Ляшко И. И. Применение вариационных неравенств для решения нелинейных задач влагопереноса с неизвестной границей / И. И. Ляшко, О. Б. Стеля // Докл. АН УССР. – 1987. – Сер. А, № 6. – С. 29 – 32.
4. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
6. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
7. Стеля О. Б. Комп'ютерна гідрогеологічна модель KRISFLOW / О. Б. Стеля, І. О. Стеля // Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Деп. в ДНТБ України, № 119-УК2010. – 18.10.2010. – 74 с.
8. Стеля О. Б. Моделирующий комплекс для расчета потока грунтовых вод в сложных гидрогеологических условиях / О. Б. Стеля // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 4. – С. 120 – 130.
9. Griffiths D. V. Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil / D. V. Griffiths, G. A. Fenton // Geotechnique. – 1993. – Vol. 43, no. 4. – P. 577 – 587.
10. Hydrogeological Assessment of Seepage through the Antamina Tailings Dam – Antamina Copper/Zinc Mine, Peru, South America / J. L. Levenick, W. Zawadzki, A. Haynes, R. Manrique / Water Institute of Southern Africa & International Mine Water Association Proceedings, International Mine Water Conference // Pretoria. – 2009. – P. 730 – 737.
11. Prediction of Groundwater Inflow and Height of the Seepage Face in a deep open Pit Mine using numerical Finite Element Model and analytical Solutions / [Aryafar A., Ardejani F. D., Singh R., Shokri B. J.] // Cidu, R. & Frau, F. : Water in Mining Environments. – 2007. – P. 313–317.
12. Rulon J. J. The Development of Multiple Seepage Faces on Layered Slopes / J. J. Rulon, R. Rodway, R. A. Freeze // Water Resour. – 1985. – Res., 21(11). – P. 1625–1636.
13. SEEP2D/UTEXAS [Електронний ресурс] / Aquaveo, LLC. – Режим доступу: <http://www.xmswiki.com/xms/GMS: UTEXAS>. – Назва з екрана.
14. SEEP/W generated pore-water pressures in SLOPE/W stability analysis [Електронний ресурс] / GEO-SLOPE International Ltd, Calgary, Alberta, Canada. – Режим доступу: <http://www.geo-slope.com>. – Назва з екрана.
15. Singh A. K. Analysis of Flow in a Horizontal Toe Filter / A. K. Singh // The 12<sup>th</sup> International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG), 1–6 October 2008 / Goa, India. – 2008.
16. Tidal effects on groundwater dynamics in unconfined aquifers / B. Ataie-Ashtiani, R. E. Volker, D. A. Lockington // Hydrological Processes. – 2001. 15:655–669. – doi:10.1002/hyp.183.

*O. Stelia, I. Stelia, O. Trigub*

### THE PROFILE MODEL OF MOISTURE TRANSFER IN POROUS MEDIUM

*The unsteady profile model of moisture transfer in porous medium was developed. The modeling was carried out simultaneously in areas of full and partial saturation without their explicit selection. The problem was mathematically formulated as a boundary problem with one-sided conditions. For the numerical solution the implicit finite difference method, developed for areas of complex shapes and big plane sizes, was used. The example of model simulation results for filtering dam was given.*

**Keywords:** model of moisture transfer, seepage intervals.

Матеріал надійшов 11 травня 2011 р.