

ПОШИРЕННЯ ВІБРАЦІЇ У СЕРЕДОВИЩІ З ОСЦИЛЮЮЧИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Побудовано розв'язок задачі про коливання скінченного стержня в рамках лінійної моделі середовища з осцилюючими включеннями. Проаналізовано залежність резонансних режимів коливань стержня від параметрів задачі.

1. Математична модель середовища з осцилюючими включеннями

Опис хвильових процесів у середовищах з внутрішньою мікроструктурою часто-густо не є адекватним у рамках класичної теорії суцільного середовища. Одним із підходів щодо врахування впливу структури на динаміку фізичних процесів є аналіз основних гіпотез класичної теорії пружності щодо властивостей мікрооб'єму та поняття «точки» середовища [2, 3]. Прикладом застосування такого підходу є математична модель, запропонована Слєпянем та Пальмовим [3, 5], в якій з кожною точкою середовища, що описується рівнянням Ламе, пов'язаний набір осциляторів із власними частотами. Тоді рівняння руху такого середовища в одномірному випадку має вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \int_0^\infty m(\omega) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} d\omega$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega^2 \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) (W - u) = 0, \quad (1)$$

де ρ – густина середовища, σ – механічна напружка, $u(x, t)$, $W(x, t, \omega)$ – переміщення основного середовища та переміщення типового осцилятора з власною частотою ω , τ – час релаксації, $m = \int_0^\infty m(\omega) d\omega$ – загальна маса осцилюючих включень, приєднаних до точок одиниці об'єму. Систему (1) замкнемо лінійним рівнянням стану середовища $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$, де E – модуль Юнга, та виберемо функцію $m(\omega)$ у такому вигляді: $m(\omega) = \rho \sum_{j=1}^n m_j \delta(\omega - \omega_j)$, що відповідає моделі середовища з урахуванням скінченної кількості осциляторів з частотами ω_j . Враховуючи вищевказані припущення, представимо математичну модель (1) у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} + \omega_j^2 \left(1 + \tau_j \frac{\partial}{\partial t} \right) (W_j - u) = 0. \quad (2)$$

Математична модель (2) завдяки включенню до розгляду осциляторів дає змогу описати дисперсію поздовжніх пружних хвиль. Дисперсійне співвідношення, отримане стандартним способом [4], для моделі (2), наприклад у випадку двох домінантних частот ($n = 2$), має вигляд

$$\begin{vmatrix} c^2 k^2 - \Omega^2 & -m_1 \Omega^2 & -m_2 \Omega^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_1^2 - \Omega^2 & 0 \\ \omega_2^2 & 0 & \omega_2^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

та зображене на рис. 1.

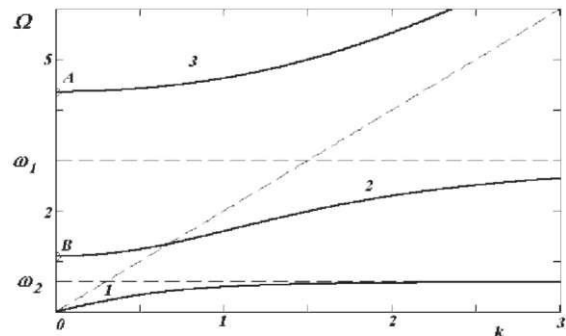


Рис. 1. Дисперсійна крива моделі (2) з двома домінантними частотами: 1 та 2 - акустичні гілки, 3 - оптична гілка, похила асимптота $\Omega = ck$.

На графіку рис. 1 можна виділити оптичну гілку 3 та дві акустичні гілки 1 і 2, що виходять з точок, координати яких задовольняють рівняння

$$\Omega^3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2 + m_1 \omega_2^2 + m_2 \omega_1^2) \Omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 + m_1 + m_2) \Omega = 0.$$

З аналізу рис. 1 можна встановити частотні інтервали, для значень яких хвилі поширюються з дисперсією, та інтервали, для значень яких вони експоненційно затухають.

2. Побудова розв'язку крайової задачі методом розділення змінних

Побудуємо розв'язок задачі про коливання скінченного стержня з матеріалу, який описується моделлю (2) з осциляторами, що коливаються

з однією частотою ω , $n = 1$. Нехай у початковий момент часу $u(t = 0) = W(t = 0) = 0$ на правому кінці стержня прикладена гармонічна сила, а лівий кінець вільний: $u_x(x = 0) = 0$, $E u_x(x = L) \gamma = \sin \alpha t$. Розв'язуючи задачу у множині комплекснозначних функцій, зведемо крайові умови до однорідних за допомогою заміни змінної $U(x, t) = u(x, t) - \frac{x^2}{2LE} \gamma e^{i\alpha t}$. Тоді система (2) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + m_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \left(\frac{x^2 \gamma \alpha^2}{2L} + \frac{E \gamma}{\rho L} \right) e^{i\alpha t}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \omega^2 \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) (W - U) &= \omega^2 \frac{x^2 \gamma}{2L} (1 + \tau \alpha i) e^{i\alpha t}. \end{aligned} \quad (3)$$

У початковий момент часу функція $U(x, t)$ набуває значення

$$U(x, 0) = -\frac{x^2}{2LE} \gamma, \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = -\frac{x^2}{2LE} \gamma \alpha i. \quad (4)$$

Розв'язок отриманої системи шукаємо у вигляді формули

$$\begin{aligned} U(x, t) &= T_n(t) \cos(\pi n L^{-1} x), \\ W(x, t) &= S_n(t) \cos(\pi n L^{-1} x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Виконуючи необхідні обчислення та використовуючи принцип суперпозиції, встановимо, що загальний розв'язок крайової задачі (3) – (4) має таке представлення

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \text{Im} \left(\frac{x^2 \gamma}{2LE} e^{i\alpha t} + T_0(t) + \sum_{n=1}^4 \cos \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \sum_{k=1}^4 C_k^n e^{\lambda_k t} + \mu_n e^{i\alpha t} \right), \\ W(x, t) &= \text{Im} \left(S_0(t) + \sum_{n=1}^4 \cos \left(\frac{\pi n}{L} x \right) \sum_{k=1}^4 \beta_k C_k^n e^{\lambda_k t} + \eta_n e^{i\alpha t} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

У виразі (5) функції $T_0(t)$, $S_0(t)$ можна представити так:

$$T_0(t) = \sum_{k=1}^2 C_k^0 e^{\nu_k t} + K e^{i\alpha t}, \quad S_0(t) = -\frac{a_0}{\alpha^2 m_1} e^{i\alpha t} - \frac{T_0(t)}{m_1},$$

де

$$\begin{aligned} \nu_{1,2} &= 0,5 \left(-\omega^2 \tau (1 + m_1) \pm \sqrt{(\omega^2 \tau (1 + m_1))^2 - 4\omega^2 (1 + m_1)} \right), \\ K &= \frac{-a_0 \left\{ \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \omega^2 \tau \frac{i}{\alpha} \right\} - b_0 m_1}{\omega^2 (1 + m_1) - \alpha^2 + \omega^2 \tau \alpha i (1 + m_1)}. \end{aligned}$$

Власні значення λ_k крайової задачі визначаються з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \left(\frac{E \pi n}{\rho L} \right)^2 & m_1 \lambda^2 \\ -\omega^2 - \omega^2 \tau \lambda & \lambda^2 + \omega^2 + \omega^2 \tau \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тоді

$$\beta_k = -\frac{\lambda_k^2 + \left(\frac{E \pi n}{\rho L} \right)^2}{m \lambda_k^2}.$$

Величини μ_n , η_n задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{-a_n (\omega^2 - \alpha^2 + \omega^2 \tau \alpha i) - b_n m_1 \alpha^2}{\left(\alpha^2 - \left(\frac{E \pi n}{\rho L} \right)^2 \right) (\omega^2 - \alpha^2 + \omega^2 \tau \alpha i) + m_1 \alpha^2 (\omega^2 + \omega^2 \tau \alpha i)}, \\ \eta_n &= \frac{\left(\alpha^2 - \left(\frac{E \pi n}{\rho L} \right)^2 \right) b_n - a_n (\omega^2 + \omega^2 \tau \alpha i)}{\left(\alpha^2 - \left(\frac{E \pi n}{\rho L} \right)^2 \right) (\omega^2 - \alpha^2 + \omega^2 \tau \alpha i) + m_1 \alpha^2 (\omega^2 + \omega^2 \tau \alpha i)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Значення сталих величин C_j^n визначаються з початкових умов.

Сталі $C_{1,2}^0$:

$$C_1^0 = \frac{\lambda_2 (e_0 - K) - d_0 + K \alpha i}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2^0 = \frac{d_0 - K \alpha i - \lambda_1 (e_0 - K)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Сталі C_j^n задовольняють систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 C_j^n &= c_n - \mu_n, \quad \sum_{j=1}^4 C_j^n \lambda_j = d_n - \mu_n \alpha i, \\ \sum_{j=1}^4 C_j^n \beta_j &= -\eta_n, \quad \sum_{j=1}^4 C_j^n \beta_j \lambda_j = -\eta_n \alpha i, \end{aligned}$$

де

$$a_0 = \left(\frac{\gamma \alpha^2 L}{6} + \frac{E \gamma}{\rho L} \right), \quad a_n = \frac{2 \gamma \alpha^2 L}{\pi^2 n^2} (-1)^n,$$

$$b_0 = \omega^2 \gamma (1 + \tau \alpha i) \frac{L}{6}, \quad b_n = \omega^2 \gamma (1 + \tau \alpha i) \frac{2L}{\pi^2 n^2} (-1)^n, \quad c_0 = -\gamma \frac{L}{6},$$

$$c_n = \gamma \frac{2L}{\pi^2 n^2} (-1)^{n+1}, \quad d_0 = -\gamma \alpha i \frac{L}{6}, \quad d_n = \gamma \alpha i \frac{2L}{\pi^2 n^2} (-1)^{n+1}$$

є коефіцієнтами рядів Фур'є правих частин системи (3) та початкової умови (4). Коректність отриманих результатів можна перевірити певною мірою, зіставивши розв'язок (5) зі стаціонарним [3]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(x) e^{i\alpha t}, \quad W_j(x, t) = U(x) \frac{\omega_j^2 (1 + \tau j \alpha i)}{\omega_j^2 - \alpha^2 + \omega_j^2 \tau j \alpha i}, \\ \Theta^2 &= \frac{\alpha^2 \rho}{E} \left[\sum_{j=1}^n m_j \omega_j^2 \frac{1 + \tau j \alpha i}{\omega_j^2 - \alpha^2 + \omega_j^2 \tau j \alpha i} + 1 \right], \quad U(x) = \frac{\cosh(i \Theta x)}{i \Theta \sinh(i \Theta l)}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2 зображено графіки розподілу амплітуди стаціонарного розв'язку (7) у випадку середовища без розподілених осциляторів (графік 1), а також у випадку середовища з осцилятором з однією частотою (графік 2) та двома (графік 3). З аналізу співвідношення (7) випливає залежність форми графіків 2 та 3 від частоти коливань та часу релаксації часткових осциляторів.

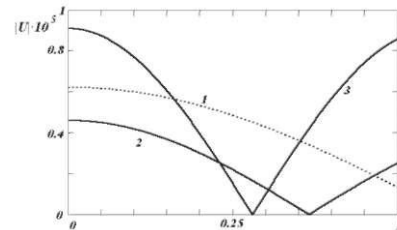


Рис. 2. Розподіл амплітуди стаціонарної вібрації по довжині стержня: 1 - без включень, 2 - з включеннями з однією частотою, 3 - з двома частотами, $a = 13\,000 \text{ с}^{-1}$, $\rho = 4000 \text{ кг/м}^3$, $m_2 \rho = 4700 \text{ кг/м}^3$, $\omega_1 = 4000 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 6000 \text{ с}^{-1}$.

3. Побудова резонансних кривих у випадку математичної моделі (2)

Важливим з точки зору прикладного використання є аналіз резонансних режимів у задачі про коливання стержня під дією зовнішнього гармонічного навантаження. На основі отриманого розв'язку (5) для таких режимів побудуємо резонансні криві. Амплітуда стаціонарного режиму кожної гармоніки визначається виразом $|\mu_n|$. Тоді, будуючи залежності $|\mu_n|$ при зміні параметрів, які входять до виразу (6), можна дістати відповідні резонансні криві. Обмежимося побудовою резонансної кривої для першої гармоніки розв'язку (5) залежно від частоти зовнішнього навантаження α . Зафіксуємо такі значення параметрів моделі (2): густина основного середовища (кварц) $\rho = 2650 \text{ кг/м}^3$, його модуль Юнга $E = 6.06 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, час релаксації часткового осцилятора $\tau = 10^{-5} \text{ с}$ та його власна частота $\omega = 4 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, амплітуда зовнішнього навантаження $\gamma = 10^6 \text{ Па}$, довжина стержня $L = 0,5 \text{ м}$. Резонансні криві (рис. 3) побудуємо для густин твердих включень, наприклад $m^1\rho = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, та відповідно для густин рідких включень, наприклад $m^1\rho = 0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (нафта).

У випадку моделі без урахування розподілених осциляторів резонансна частота обчислюється за формулою

$\sqrt{\frac{E\pi^2}{\rho L^2}} = 30046,46 \text{ с}^{-1}$. При

$m^1\rho = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ власні частоти мають значення $f_1 = 3945,99 \text{ с}^{-1}$ та $f_2 = 30451,77 \text{ с}^{-1}$. При $m^1\rho = 0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ власні частоти мають значення $f_1 = 3989,73 \text{ с}^{-1}$ та $f_2 = 30117,84 \text{ с}^{-1}$. Таким чином, у рамках моделі з однією частотою основна гармоніка має два локальні максимуми амплітуди, відстань між якими зростає зі збільшенням густини осцилюючих включень.

4. Висновки

Необхідність розробки математичних моделей середовищ на зразок (1) та (2) продиктована

- [1]. Вильчинская Н. А., Николаевский В. Н. Акустическая эмиссия и спектр сейсмических сигналов // Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1984. - № 5. - С. 91-100.
- [2]. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. - М.: Изд. Моск. ун-та, 1999. - 328 с.
- [3]. Пальмов В. А. Об одной модели среды сложной структуры // ПММ. - 1969. - Вып. 4. - С. 768-773.

на як потребами галузей, що використовують матеріали з чітко вираженою структурою, високочастотні інтенсивні хвильові поля, так і досліджень [1], дані яких вказують на наявність дискретного набору домінуючих (резонансних) частот, пов'язаних із внутрішньою структурою та її перебудовою. У таких випадках математичні моделі з осциляторами (1) та (2) є вельми перспективними. Розв'язки лінійних моделей як лінеаризованого варіанта більш загальних моделей виступають як правило відправною точкою пошуку розв'язків узагальнених моделей.

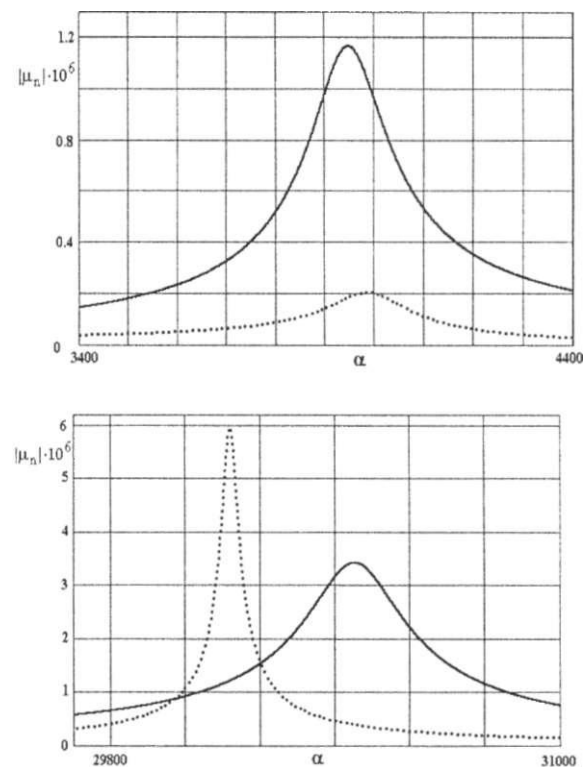


Рис. 3. Резонансні криві, побудовані для компоненти U_1^1 за $m = 4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (суцільна лінія) та $m = 0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (пунктирна лінія).

- [4]. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.: Наука, 1984. - 430 с.
- [5]. Слепня Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами // Механика твердого тела. - 1967. - № 5. - С. 34-40.

I. A. Skurativska, S. I. Skurativskiy

SPREADING OF VIBRATION IN THE MEDIUM WITH OSCILLATING INCLUSIONS

The solution of a problem of oscillations of a bounded rod within the linear model of a medium with oscillating inclusions is built. The dependence of resonance regimes of oscillations of a rod on the parameters of the problem is analysed.