

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра мережних технологій факультету інформатики

## **Спектральна теорія графів**

**Курсова робота  
за спеціальністю „113 Прикладна математика”**

Керівник курсової роботи  
старший викладач  
Тимошкевич Л.М.

---

*(підпис)*

“11” травня 2020 р.

Виконала студентка  
Горбачова І.С.

“11” травня 2020 р.

Київ 2020

## Календарний план виконання курсової роботи

### Тема: Спектральна теорія графів

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	21.10.2019	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	25.10.2019	
3.	Опрацювання матеріалів	15.12.2019	
4.	Проведення аналізу	30.01.2020	
5.	Написання роботи	5.02.2020	
6.	Перевірка та погодження роботи	20.04.2020	
7.	Створення презентації та написання доповіді	25.04.2020	
8.	Остаточне оформлення роботи	10.05.2020	
9.	Захист курсової роботи		

Студентка Горбачова І.С.

Керівник Тимошкевич Л.М.

“11” травня 2020 р.

# Зміст

<b>Вступ</b> .....	4
<b>1. Основні означення і твердження</b> .....	5
1.1 Основні означення спектральної теорії графів .....	5
1.2 Невід’ємні, нерозкладні матриці та теорема Фробеніуса.....	6
1.3 Графи Динкіна .....	8
<b>2. Методи обчислення характеристичного многочлена</b> .....	9
2.1 Розклад по висячій вершині.....	9
2.2 Розклад по мосту .....	10
2.3 Характеристичний многочлен цикла.....	11
<b>3. Спектри графів Динкіна</b> .....	13
3.1 Спектр $A_n$ графа Динкіна.....	13
3.2 Спектр $\tilde{A}_n$ графа Динкіна.....	15
3.3 Спектр $D_n$ графа Динкіна.....	15
3.4 Спектр $\tilde{D}_n$ графа Динкіна.....	16
3.5 Спектри $E_6, E_7, E_8$ графів Динкіна .....	16
3.5 Спектри $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ графів Динкіна.....	17
<b>Висновок</b> .....	19
<b>Література</b> .....	20

## Вступ

Одним із найактуальніших розділів математики протягом останніх десятиліть є і залишається розділ дискретної математики завдяки його інтенсивному застосуванню в різноманітних галузях знань. Найбільш яскраво це можна побачити на прикладі теорії графів, необмежені можливості використання якої обумовлені теоретико-множинними, комбінаторними та топологічними аспектами, що складають основу поняття графа. Переваги застосування методів теорії графів пояснюються тим, що вони є зручними для формулювання задач, що відносяться до широкого кола наукових проблем і є ефективним інструментом для їх рішення.

Спектральна теорія графів – обширна галузь математики, яка вивчає залежність між структурними та спектральними властивостями графів.

Метою моєї роботи є глибше ознайомлення із спектральною теорією графів, її означень і методів.

Дана робота складається з 3 розділів. У першому розділі моєї роботи представлено основні означення і твердження, серед яких необхідна термінологія для розуміння роботи, різні види матриць, теорема Фробеніуса та стисле представлення теорем про зв'язки між спектральними та структурними властивостями графів. Також в цьому розділі представлене означення графів Динкіна і розширених графів Динкіна.

У другому розділі представлено обчислення характеристичного многочлена способом розкладу по висячій вершині та по мосту, а також характеристичний многочлен циклу. В розділі наведені три леми та їх повне доведення для кращого розуміння.

У третьому розділі я детально розглядаю знаходження спектрів графів Динкіна, таких як  $A_n$  та  $\tilde{A}_n$ , їх означення та доведення, а також  $D_n$ ,  $\tilde{D}_n$ ,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  та  $\tilde{E}_6$ ,  $\tilde{E}_7$ ,  $\tilde{E}_8$  без доведення.

# 1. Основні означення і твердження

## 1.1 Основні означення спектральної теорії графів

*Графом* ми вважаємо впорядковану пару  $G = (V, E)$ , де  $V$  – деяка непорожня скінченна множина, що називається *множиною вершин* графа  $G$ , і  $E$  – множина, що складається з неупорядкованих пар різних елементів  $V$ , яка називається *множиною ребер* графа  $G$ . В цій роботі ми розглядаємо лише прості неорієнтовані графи, які не мають дуг.

*Матрицею суміжності* графа  $G$ , який має  $n$  вершин, є квадратна матриця  $A(G)$  розміру  $n$ , в якій значення елементу  $a_{ij}$  рівне числу ребер з  $i$ -ї вершини графа в  $j$ -у вершину. Матриця суміжності простого графа (що не містить петель і кратних ребер) є симетричною і містить нулі на головній діагоналі. Її вигляд залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Оскільки матриця  $A(G)$  симетрична ( $a_{ij} = a_{ji}$ ), то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) та розташуємо їх в незростаючому порядку.

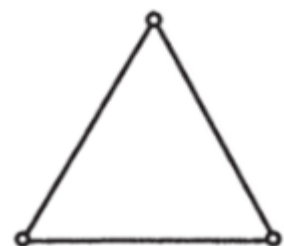
*Індексом графа* називають максимальне власне значення  $\lambda_G$  та позначають символом  $ind_G$ . Спектр матриці суміжності будемо позначати  $\sigma(G)$  та називати *спектром графа*. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин і є інваріантом графа.

*Характеристичним многочленом* матриці суміжності ми будемо вважати  $P_G(x) = |xI - A(G)|$ . Власні значення матриці є його коренями характеристичного многочлена.

На прикладі розглянемо простий циклічний граф із трьома вершинами (мал. 1) та знайдемо його матрицю суміжності, характеристичний многочлен, його спектр та індекс.

*Матриця суміжності* такого графу має вигляд:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Мал. 1

Знаходимо його характеристичне рівняння наступним чином:

$$(A(G) - \lambda E) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

$-\lambda^3 + 3\lambda + 2$  – характеристичне рівняння.

Далі знаходимо *спектр графа* (власні числа) :

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1; \lambda_2 = 2.$$

*Індексом графа* є найбільше власне число, отже у простого циклічного графа із трьома вершинами індекс дорівнює 2.

## 1.2 Невід’ємні, нерозкладні матриці та теорема Фробеніуса

*Матриця називається невід’ємною*, якщо всі елементи матриці невід’ємні числа. *Матриця називається додатною*, якщо всі елементи матриці додатні числа. Отже, вектори з невід’ємними координатами та додатніми координатами називаються невід’ємними та додатними векторами. Матриця суміжності довільного графа є невід’ємною матрицею. А тому всі властивості невід’ємних матриць вірні і для матриць суміжності.

Ми будемо позначати якщо матриця невід’ємна, то  $A \geq 0$ ; якщо додатна – то  $A > 0$ . Для векторів наші позначення будуть наступні:  $x \geq 0$  буде позначати невід’ємність вектора  $x$ ,  $x > 0$  – додатність.

*Матриця є розкладною*, якщо перестановкою в деякому порядку рядків, а потім в тому самому порядку стовпчиків, можна одержати блочну матрицю, в якій на діагоналі стоять квадратні матриці ( $i = j$ ) і *нерозкладною* в іншому разі.

**Твердження 1.** Матриця суміжності графа є нерозкладна тоді та тільки тоді, коли граф – зв’язний. Властивості власних векторів та власних значень невід’ємних розкладних матриць, сформульовані у наступній теоремі.

**Теорема Фробеніуса.**

Нерозкладна від'ємна матриця  $A$  завжди має додатне власне значення  $r$ , яке задовольняє наступним властивостям:

- 1)  $r$  є простим коренем характеристичного рівняння;
- 2) модулі всіх інших власних значень не перевищують числа  $r$ ;
- 3) власному значенню  $r$  відповідає власний додатний вектор.

Окрім цього, якщо  $A$  має  $h$  власних значень, за модулем рівних  $r$ , то ці числа всі різні між собою і є коренями рівняння  $\lambda^h - x^h = 0$ . Якщо розглядати весь спектр матриці  $A$  як систему точок на комплексній площині, то він відображається на себе при повороті на кут  $2\pi / h$ .

Якщо  $h > 1$ , то перестановкою рядків і такою ж перестановкою стовпчиків можна звести матрицю  $A$  до такого «циклічного» вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

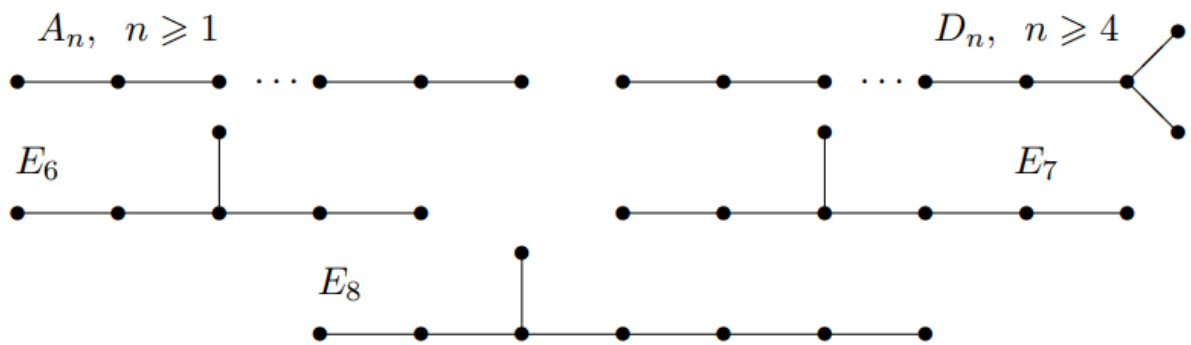
При  $h > 1$  матриця  $A$  називається *імпримітивною*, а число  $h$  – її *індекс імпримітивності*. В протилежному випадку матриця  $A$  – *примітивна*.

#### **Теорема Фробеніуса–Перрона для матриці суміжності.**

Нехай  $G$  – зв'язний граф та  $\lambda_G = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  – власні значення графа  $G = (V, E)$  в порядку зростання, тоді:

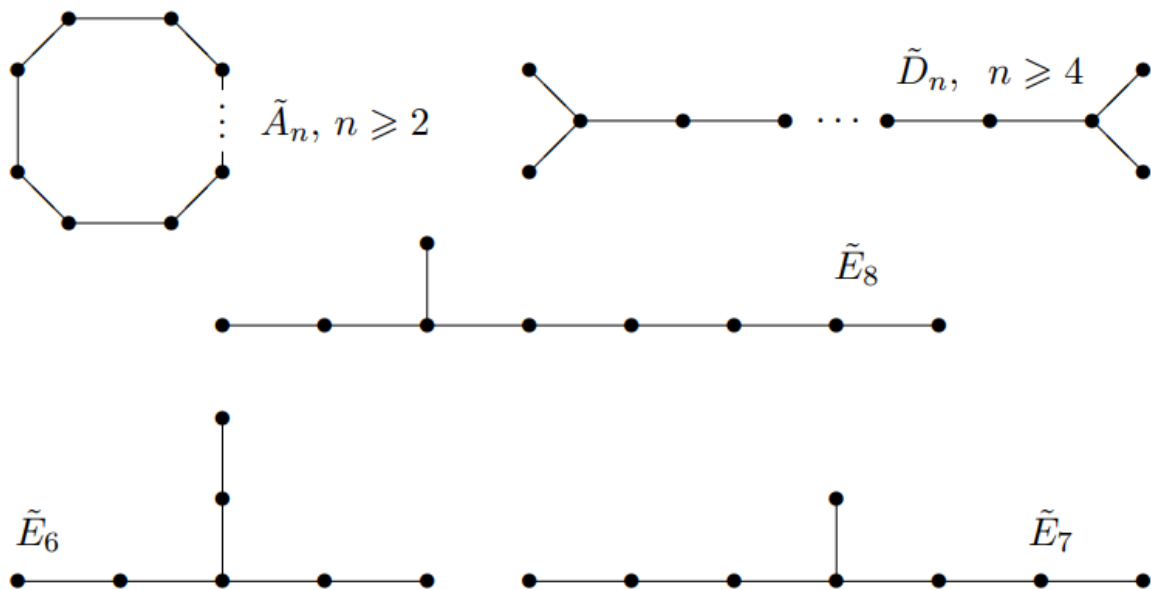
- 1) індекс графа – додатне число ( $\lambda_G > 0$ );
- 2) модуль довільного власного значення не перевищує індексу графа ( $|\lambda_i| \leq \lambda_G$ );
- 3) алгебраїчна кратність власного значення  $\lambda_G$  дорівнює 1;
- 4) існує додатний власний вектор, який відповідає власному значенню  $\lambda_G$  (вектор Фробеніуса–Перрона).

### 1.3 Графи Динкіна



Мал. 2

Графи, які зображені на мал. 2 називаються *графами Динкіна*. Для кожного з цих графів, індекс дорівнює кількості вершин. Тобто:  $|A_n| = n$ ,  $|D_n| = n$ ,  $|E_6| = 6$ ,  $|E_7| = 7$ ,  $|E_8| = 8$ .



Мал. 3

*Розширеними графами Динкіна* називаються графи, які зображені на мал. 3. Порядки розширених графів Динкіна на одиницю більше порядків відповідних нерозширених графів Динкіна. Тобто:  $|\tilde{A}_n| = n+1$ ,  $|\tilde{D}_n| = n+1$ ,  $|\tilde{E}_6| = 7$ ,  $|\tilde{E}_7| = 8$ ,  $|\tilde{E}_8| = 9$ .



## 2. Методи обчислення характеристичного многочлена

### 2.1 Розклад по висячій вершині

Найпростішим способом обчислення характеристичного многочлена пов'язаний з існуванням в графі вершини степеня один, така вершина називається *висячою вершиною*.

**Лема 1.** Нехай вершина  $x$  – висяча вершина графа  $G$  і  $y$  вершина суміжна з вершиною  $x$ . Тоді:

$$P_G(\lambda) = \lambda P_{G-x}(\lambda) - P_{G-x-y}(\lambda)$$

**Доведення.** Будемо вважати, що матриця суміжності графа  $G$  побудована для порядку вершин  $x, y, \dots$  (подальший порядок не важливий).

Введемо наступні позначення:

$B_1 = A(G-x)$ ,  $B_2 = A(G-x-y)$  для матриць суміжності графів  $(G-x)$  і  $(G-y)$  відповідно. Розглянемо структуру характеристичного многочлена  $P_G = |\lambda I - A(G)|$ .

$$P_G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & & \\ 0 & & \lambda I - B_1 & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}$$

Мал. 4

$$P_G(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & \lambda I - B_2 & \\ 0 & * & & & \end{vmatrix}$$

Мал. 5

Розкриємо визначник  $P_G = |\lambda I - A(G)|$  по першому рядку. Співмножник для  $\lambda$  видно за схемою Мал. 4, співмножник для  $-1$  – по Мал. 5. Отримаємо:

$$P_{\Gamma}(\lambda) = \lambda|\lambda I - B_1| + \begin{vmatrix} -1 & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\lambda I - B_2} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \lambda|\lambda I - B_1| - |\lambda I - B_2| = \\ = \lambda P_{\Gamma-x}(\lambda) - P_{\Gamma-x-y}(\lambda).$$

З огляду на виняткову важливість многочлена графа Динкіна  $A_n$  введемо для нього спеціальне позначення:

$$P_n(\lambda) = P_{A_n}(\lambda)$$

**Твердження 1.** Характеристичний многочлен графа Динкіна  $A_n$  ( $P_n(\lambda)$ ) задовольняє наступному рекурентному співвідношенню:

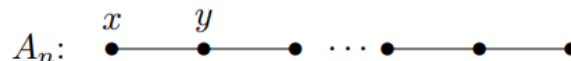
$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda), n > 3, P_1(\lambda) = \lambda \text{ і } P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$

**Доведення.** Перевіркою переконаємося, що характеристичні многочлени графів Динкіна  $A_1$  і  $A_2$  відповідно рівні  $\lambda$  і  $\lambda^2 - 1$ .

$$A_1: \bullet \quad P_1(\lambda) = P_{A_1}(\lambda) = |\lambda I - A(A_1)| = \lambda$$

$$A_2: \bullet \text{---} \bullet \quad P_2(\lambda) = P_{A_2}(\lambda) = |\lambda I - A(A_2)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

Одну з висячих вершин графа  $A_n$  позначимо  $x$ , суміжну з нею позначимо  $y$ .



З урахуванням ізоморфізмів  $A_n - x = A_{n-1}$ ,  $A_n - x - y = A_{n-2}$ , за лемою отримаємо потрібне рекурентне співвідношення.

## 2.2 Розклад по мосту

Розглянемо два довільних графа  $G_1, G_2$ . Зафіксуємо в графі  $G_1$  вершину  $x$  і в графі  $G_2$  вершину  $y$ . Вершини  $x$  і  $y$  з'єднаємо ребром, отриманий при цьому граф позначимо через  $G$ . Ребро графа називається **мостом**, якщо після видалення цього ребра кількість компонент зв'язності графа збільшується. Ребро  $\{x, y\}$  є мостом графа  $G$ . Позначимо  $P_0(\lambda) = 1$  – характеристичний многочлен графа з порожньою множиною вершин.

$$\text{Лема 2. } P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) - P_{G_1-x}(\lambda)P_{G_2-y}(\lambda)$$

**Доведення.** Будемо вважати, що матриця суміжності графа  $G$  побудована для наступного порядку вершин: спочатку розташуємо вершину  $x$ , потім всі інші вершини графа  $G_1$ , далі все вершини графа  $G_2$  так, щоб  $y$  була останньою. Введемо позначення:  $B_1 = A(G_1 - x)$ ,  $B_2 = A(G_2 - y)$  для матриць суміжності графів  $G_1 - x$  і  $G_2 - y$  відповідно. Позначимо  $n_1 = |G_1|$  та  $n_2 = |G_2|$ . Розглянемо структуру характеристичного многочлена  $P_G(x) = |\lambda I - A(G)|$ .

Застосуємо теорему Лапласа для перших  $n_1$  рядків, отримуємо:

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) + (-1)^{1+2+\dots+n_1+2+3+\dots+n_1+(n_1+n_2)}.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left| \begin{array}{c|c} * & \dots & * & -1 \\ \hline \lambda I - B_1 & 0 & \vdots & 0 \\ \hline & & & -1 & * & \dots & * \end{array} \right| = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) + (-1)^{(n_1+n_2+1)} \cdot (-1) \cdot (-1)^{n_1+1} \\ & \cdot (-1) \cdot (-1)^{n_2+1} P_{G_1-x}(\lambda)P_{G_2-y}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) - P_{G_1-x}(\lambda)P_{G_2-y}(\lambda). \end{aligned}$$

### 2.3 Характеристичний многочлен цикла

**Лема 3.**  $P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \lambda P_{A_n}(\lambda) - 2P_{A_{n-1}}(\lambda) - 2$ .

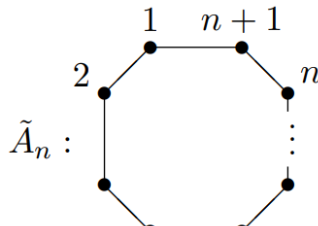
**Доведення.** Візьмемо:

$$P_{A_n}(\lambda) = P_n(\lambda),$$

тоді:

$$P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) - 2P_{n-1}(\lambda) - 2.$$

Матриця суміжності  $\tilde{A}_n$  має наступний вигляд:



$\tilde{A}_n$  :

$$P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & & \bigcirc \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & & \bigcirc \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \bigcirc & \dots & \lambda & -1 & 0 \\ & & \dots & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & & \dots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Визначник  $|\lambda I - A(\tilde{A}_n)|$  порядку  $(n+1) \times (n+1)$  розкладемо по першому стовпчику. Перший доданок дорівнюватиме  $\lambda P_n(\lambda)$ , другий доданок (мал. 6) і третій доданок (мал. 7) розкладемо по першим рядкам.

$$\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \circ \\
0 & -1 & \lambda & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\
\circ & \cdots & 0 & -1 & \lambda
\end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix}
\lambda & -1 & 0 & \cdots & \circ \\
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \circ \\
0 & -1 & \lambda & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\
\circ & \cdots & 0 & -1 & \lambda
\end{vmatrix}
- (-1)^{1+n} \begin{vmatrix}
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \circ \\
0 & -1 & \lambda & \cdots & \circ \\
0 & 0 & -1 & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\
\circ & \cdots & 0 & -1 & \lambda \\
\circ & \cdots & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix}$$

Mat. 6

$$\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\
\lambda & -1 & 0 & \cdots & \circ \\
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & -1 & 0 & 0 \\
\circ & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1
\end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & \cdots & \circ \\
\lambda & -1 & 0 & \cdots & \circ \\
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & -1 & 0 & 0 \\
\circ & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1
\end{vmatrix}
- (-1)^{1+n} \begin{vmatrix}
\lambda & -1 & 0 & \cdots & \circ \\
-1 & \lambda & -1 & \cdots & \circ \\
0 & -1 & \lambda & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\circ & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\
\circ & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\
\circ & \cdots & 0 & -1 & \lambda
\end{vmatrix}$$

Mat. 7

Отже:

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{A}_n}(\lambda) &= \lambda P_n - P_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{1+n} - (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n+3} - P_{n-1} \\
&= \lambda P_n(\lambda) - 2P_{n-1}(\lambda) - 2.
\end{aligned}$$

### 3. Спектри графів Динкіна

#### 3.1 Спектр $A_n$ графа Динкіна

**Твердження 2.** Для графа Динкіна  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) маємо:

$$\begin{aligned} P_{A_n}(\lambda) = P_n(\lambda) &= (\mu - \mu^{-1})^{-1}(\mu^{n+1} - \mu^{-n-1}) \\ &= \prod_{1 \leq j \leq n} (\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{n+1}), \end{aligned}$$

Коли  $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ , тоді:

$$\sigma(A_n) = \{2 \cos \frac{j\pi}{n+1} | j = 1, \dots, n\} \quad \lambda_{A_n} = 2 \cos \frac{\pi}{n+1}.$$

**Доведення.** Згідно твердженню 1 характеристичний многочлен  $A_n$  ( $P_n(\lambda)$ ) задовольняє наступному рекурентному співвідношенню:

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda), \quad n \geq 3,$$

з початковими умовами  $P_1(\lambda) = \lambda$  і  $P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$ . Легко перевірити, що в якості початкових умов можна взяти:  $P_0(\lambda) = 1$ ,  $P_1(\lambda) = \lambda$ . Для рішення рекурентного рівняння складемо і вирішимо характеристичне рівняння рекурентного співвідношення; запишемо загальний розв'язок; знайдемо рішення, яке задовольняє заданим початковим умовам. Отже, характеристичне рівняння  $x^2 - \lambda x + 1 = 0$  рекурентного співвідношення  $P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$  має наступні корені:

$$x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$

Введемо наступне позначення:

$$\mu = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

Другий корінь характеристичного рівняння рекурентного співвідношення дорівнює  $\mu^{-1}$ , тобто  $\mu^{-1} = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ .

Значення  $\lambda$  за відомим  $\mu$  обчислюється за такою формулою:

$$\lambda = \mu + \mu^{-1}$$

Випишемо спільне рішення  $P_n(\lambda) = C(\mu)\mu^n + D(\mu)\mu^{-n}$ . Знайдемо  $C(\mu)$  і  $D(\mu)$ , вважаючи загальному рішенні спочатку  $n = 0$ , а потім  $n = 1$ . Тоді, з урахуванням початкових умов  $P_0(\lambda) = 1$ ,  $P_1(\lambda) = \mu + \mu^{-1}$ , отримуємо:

$$\begin{cases} C(\mu) + D(\mu) = 1 \\ C(\mu)\mu + D(\mu)\mu^{-1} = \mu + \mu^{-1}. \end{cases}$$

Вирішимо систему:

$$C(\mu) = \frac{\mu}{\mu - \mu^{-1}}, \quad D(\mu) = -\frac{\mu^{-1}}{\mu - \mu^{-1}}$$

Отже:

$$P_n(\lambda) = (\mu - \mu^{-1})^{-1}(\mu^{n+1} - \mu^{-n-1}).$$

Прирівнюючи характеристичний многочлен до нуля отримаємо:

$$\mu^{2n+2} = 1 \text{ і } \mu^2 \neq 1$$

Для кожного кореня  $\mu$ ,  $\mu^{-1}$  даватиме те ж саме значення  $\lambda$ , тому  $2n$  різних коренів  $\mu$  будуть відповідати  $n$  різних власним значенням  $A_n$  за  $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ .

Спектр знаходиться як рішення наступної системи:

$$\begin{cases} \mu^{2n+2} = 1, \\ \mu^2 \neq 1, \end{cases}$$

Зауважимо, що ще одне аналітичний вираз для многочлена  $P_n(\lambda)$  при  $|\lambda| < 2$  можна отримати з використанням многочленів Чебишева другого роду. Многочлени Чебишева другого роду  $U_n(x)$  задовольняє рекурентному

співвідношенню:

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1.$$

Отже,  $P_n(\lambda)$  коли  $|\lambda| < 2$  знаходимо за допомогою наступної рівності  $P_{A_n}(\lambda) = U_n(\frac{\lambda}{2})$ , а отже:

$$P_n(\lambda) = \frac{\sin[(n+1) \arccos \frac{\lambda}{2}]}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2})^2}}.$$

### 3.2 Спектр $\tilde{A}_n$ графа Динкіна

**Твердження 3.** Для розширеного графа Динкіна  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 2$ ) маємо:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}_n}(\lambda) &= \mu^{n+1} + \mu^{-n-1} - 2 \\ &= \prod_{0 \leq j \leq n} (\lambda - 2 \cos \frac{2j\pi}{n+1}), \end{aligned}$$

де  $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ , таким чином:

$$\sigma(\tilde{A}_n) = \{2 \cos \frac{2j\pi}{n+1} | j = 0, \dots, n\} \quad \lambda_{\tilde{A}_n} = 2.$$

**Доведення.** Згідно леми для характеристичного многочлена графа Динкіна  $\tilde{A}_n$  ( $n \geq 2$ ) має місце рівність:

$$P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \lambda P_{A_n}(\lambda) - 2P_{A_{n-1}}(\lambda) - 2.$$

Користуючись формулою з твердження 2, маємо:

$$P_{\tilde{A}_n}(\lambda) = \mu^{n+1} + \mu^{-n-1} - 2.$$

Прирівнюючи многочлен до нуля отримаємо, що спектр знаходимо як рішення рівняння  $\mu^{n+1} = 1$  (розв'язується як у прикладі з твердження 2).

Надалі розглянемо інші спектри графів Динкіна не так детально – твердження без доведень.

### 3.3 Спектр $D_n$ графа Динкіна

**Твердження 4.** Для графа Динкіна  $D_n$  ( $n \geq 4$ ) маємо:

$$\begin{aligned}
P_{D_n}(\lambda) &= (\mu + \mu^{-1})(\mu^{n-1} + \mu^{-n+1}) \\
&= \lambda \prod_{0 \leq j \leq n-2} (\lambda - 2 \cos \frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)}),
\end{aligned}$$

де  $\lambda = \mu + \mu^{-1}$ , отже:

$$\sigma(D_n) = \{2 \cos \frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)} | j = 0, \dots, n-2\} \cup \{0\}$$

$$\lambda_{D_n} = 2 \cos \frac{\pi}{2(n-1)}.$$

### 3.4 Спектр $\tilde{D}_n$ графа Динкіна

**Твердження 5.** Для розширеного графа Динкіна  $\tilde{D}_n$  ( $n \geq 4$ ) маємо:

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{D}_n}(\lambda) &= P_{\tilde{A}_3}(\lambda)P_{n-3}(\lambda) \\
&= \lambda^2(\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq n-3} (\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{n-2}).
\end{aligned}$$

Таким чином:

$$\sigma(\tilde{D}_n) = \{2 \cos \frac{j\pi}{n-2} | j = 1, \dots, n-3\} \cup [-2, 0, 0, 2]$$

$$\lambda_{\tilde{D}_n} = 2.$$

### 3.5 Спектри $E_6, E_7, E_8$ графів Динкіна

**Твердження 6.** Для графу Динкіна  $E_6$  маємо:

$$\begin{aligned}
P_{E_6}(\lambda) &= \lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 - 1 \\
&= \prod_{1 \leq j \leq 6} (\lambda - 2 \cos \frac{m_j\pi}{12}),
\end{aligned}$$

де  $m_j = 1, 4, 5, 7, 8, 11$ . Тоді:

$$\sigma(E_6) = \{2 \cos \frac{m_j\pi}{12} | m_j = 1, 4, 5, 7, 8, 11\}$$

$$\lambda_{E_6} = 2 \cos \frac{\pi}{12}.$$

**Твердження 7.** Для графу Динкіна  $E_7$  маємо:



$$\begin{aligned}
P_{E_7}(\lambda) &= \lambda(\lambda^6 - 6\lambda^4 + 9\lambda^2 - 3) \\
&= \prod_{1 \leq j \leq 7} (\lambda - 2 \cos \frac{m_j \pi}{18}),
\end{aligned}$$

де  $m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$ . Тоді:

$$\sigma(E_7) = \{2 \cos \frac{m_j \pi}{18} | m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17\}$$

$$\lambda_{E_7} = 2 \cos \frac{\pi}{18}.$$

**Твердження 8.** Для графу Динкіна  $E_8$  маємо:

$$\begin{aligned}
P_{E_8}(\lambda) &= \lambda^8 - 7\lambda^6 + 14\lambda^4 - 8\lambda^2 + 1 \\
&= \prod_{1 \leq j \leq 8} (\lambda - 2 \cos \frac{m_j \pi}{30}),
\end{aligned}$$

де  $m_j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ . Тоді:

$$\sigma(E_8) = \{2 \cos \frac{m_j \pi}{30} | m_j = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$\lambda_{E_8} = 2 \cos \frac{\pi}{30}.$$

### 3.5 Спектри $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ графів Динкіна

**Твердження 9.** Для графів Динкіна  $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$  маємо:

$$\begin{aligned}
P_{\tilde{E}_6}(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 - 1)^2(\lambda^2 - 4), \\
P_{\tilde{E}_7}(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq 3} (\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{4}), \\
P_{\tilde{E}_8}(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4) \prod_{1 \leq j \leq 4} (\lambda - 2 \cos \frac{j\pi}{5}).
\end{aligned}$$

Таким чином:

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{E}_6) &= [0, \pm 1, \pm 1, \pm 2] \quad \lambda_{\tilde{E}_6} = 2, \\
\sigma(\tilde{E}_7) &= \{2 \cos \frac{j\pi}{4} | j = 1, 2, 3\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\} \quad \lambda_{\tilde{E}_7} = 2, \\
\sigma(\tilde{E}_8) &= \{2 \cos \frac{j\pi}{5} | j = 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\} \quad \lambda_{\tilde{E}_8} = 2.
\end{aligned}$$

На закінчення параграфу наведемо зведену таблицю спектрів графів Динкіна. В описі безлічі власних значень фігурні дужки використовуються для множин, елементи якого різні, а квадратні дужки використовуються для опису власних значень з урахуванням кратності.

$\Gamma$	$\sigma(\Gamma)$
$A_n$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{n+1}   j = 1, \dots, n\}$
$D_n$	$\{2 \cos \frac{(1+2j)\pi}{2(n-1)}   j = 0, \dots, n-2\} \cup \{0\}$
$E_6$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{12}   j = 1, 4, 5, 7, 8, 11\}$
$E_7$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{18}   j = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17\}$
$E_8$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{30}   j = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$
$\tilde{A}_n$	$\{2 \cos \frac{2j\pi}{n+1}   j = 0, \dots, n\}$
$\tilde{D}_n$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{n-2}   j = 1, \dots, n-3\} \cup [-2, 0, 0, 2]$
$\tilde{E}_6$	$[0, \pm 1, \pm 1, \pm 2]$
$\tilde{E}_7$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{4}   j = 1, 2, 3\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}$
$\tilde{E}_8$	$\{2 \cos \frac{j\pi}{5}   j = 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, \pm 1, \pm 2\}$

## **Висновок**

Курсова робота присвячена поглибленому вивченню спектральної теорії графів. У ній представлено три нестандартних методи для обчислення характеристичного многочлена, детально із прикладами пояснюється та знаходяться спектри звичайних та розширених графів Динкіна.

Моє дослідження полягає в тому, що я ознайомила більш детально із розділами спектральної теорії графів як теоретично, так і практично.

Новизною даної роботи є структурована розширена інформація окремих розділів спектральної теорії графів, яка буде корисна читачеві, який прагне дізнатися про них більш поглиблено, такі як обчислення характеристичного многочлена та спектри різних розширених і не тільки графів Динкіна та зрозуміти як використовувати теорію на практиці.

## Література

1. Москалева Ю., Самойленко Ю., Введение в спектральную теорию графов, «Учебное пособие», стор. 26-35, 47-49, 52-53.
2. Москалева Ю., Самойленко Ю., Про спектральну теорію графів, «У світі математики» 2007, т. 13, стор. 26-36.
3. Москалева Ю., Самойленко Ю., Введение в спектральную теорию графов, «Центр учебной литературы», Киев, 2007.
4. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., Спектры графов, теория и применение, «Наукова думка», Киев, 1984.