УДК 517.98

Кашпіровський О. І., Лебідь В. О.

КЛАСИ ЄДИНОСТІ ТА ЛОКАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСКІНЧЕННИХ НЕСИМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для нескінченних несиметричних стаціонарних систем різницевих рівнянь описано клас єдиності розв'язку та спектр різницевого оператора. Побудовані локальні наближення розв'язків, які є аналогом відомого алгоритму обчислення параметрів локальних сплайнів мінімального дефекту.

Ключові слова: системи різницевих рівнянь, клас єдиності розв'язків, спектр, дискретна функція Гріна.

Вступ

У цій статті узагальнюються результати робіт [1; 2] на випадок нескінченної несиметричної трьохдіагональної системи різницевих рівнянь

$$u_{k-1} - 2Au_k + bu_{k+1} = f_k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $b = \rho^2 e^{2\theta i}$, $\rho > 0$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ — комплексне число, A — комплекснозначна матриця розміру $n \times n$, $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ — задана послідовність векторів із $\mathbb{C}^n$, $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ — невідома послідовність векторів із $\mathbb{C}^n$. Щодо послідовності $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ вважаємо, що вона є або обмеженою

$$\|f_k\|_{\mathbb{C}^n} \le C_1 < \infty, \quad C_1 \ge 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

або на зростання послідовності норм $\|f_k\|_{\mathbb{C}^n}$ накладаються обмеження

$$\begin{gathered} \|f_k\|_{\mathbb{C}^n} \le C_2 M_k < \infty, \quad C_2 \ge 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0 < M_k \to \infty, k \to \infty. \end{gathered} \tag{3}$$

Подібні системи у випадку (2) раніше досліджувалися в роботах А. Я. Дороговцева [3; 4] та М. Ф. Городнього [5; 6]. У випадку $b = 1$ в [1; 2] за умов, що послідовність $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ є значеннями гладкої обмеженої функції $f(t)$, тобто $f_k = f(t_k)$, в точках $t_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$, $h > 0$, отримані локальні асимптотичні наближення розв'язку системи (1). При цьому кожне значення розв'язку u_k апроксимується лінійною комбінацією f_{k-1}, f_k, f_{k+1}. Отже, для знаходження значення u_k при фіксованому k не потрібно знаходити інші значення розв'язку, як це доводиться робити в методі прогонки [7].

У цій роботі знайдено клас єдиності розв'язку системи (1), тобто описано таку множину F послідовностей векторів $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ із $\mathbb{C}^n$, для яких система (1) має єдиний у цій множині F розв'язок $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$. На розв'язки з класу єдиності F узагальнені локальні асимптотичні наближення з [1; 2].

Основна частина

Розглянемо спочатку системи (1) з послідовностями $\{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$, $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$, на які не накладено жодних обмежень. Простір усіх можливих послідовностей $\vec{f} = \{f_k, k \in \mathbb{Z}\}$ та $\vec{u} = \{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$, елементи яких належать $\mathbb{C}^n$, позначимо $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$. Отже, $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ можна розглядати як сукупність усіх можливих відображень із $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}^n$. На $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ очевидним чином може бути введена структура векторного простору. Для того, щоб відрізняти вектори із $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ та із $\mathbb{C}^n$, при компактному записі векторів із $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ будемо вживати знак вектора.

Для векторів $\vec{f} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ введемо для зручності зображення у вигляді формального ряду Лорана (ФРЛ-зображення)

$$\vec{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega^k f_k, \quad f_k \in \mathbb{C}^n, \quad \omega \in \mathbb{C}^1.$$

За допомогою ФРЛ-зображення систему (1) запишемо в компактному вигляді

$$L(A, b)\vec{u} = \vec{f}, \tag{4}$$

де $L(A, b) = \omega^{-1} I - 2A + b\omega I$, I — одинична матриця порядку n.

Назвемо $L(A, b)$ різницевим оператором.

Наступна теорема визначає власні числа та власні вектори оператора $L(A, b)$ в $s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$.

Теорема 1. *Нехай e — власний вектор матриці A, що відповідає власному числу λ. Тоді для будь-якого комплексного числа $a \neq 0$ вектор $\vec{f}(e, \lambda, a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a^k \omega^k e$ є власним вектором оператора $L(A, b)$, причому*

$$L(A, b)\vec{f}(e, \lambda, a) = (a^{-1} - 2\lambda + ba)\vec{f}(e, \lambda, a).$$

Доведення цієї теореми зводиться до простої підстановки вектора $\vec{f}(e,\lambda,a)$ у вираз для оператора $L(A,b)$. Зробимо кілька зауважень.

Зауваження 1. Власних векторів оператора $L(A,b)$, відмінних від $\vec{f}(e,\lambda,a)$, не існує.

Зауваження 2. При фіксованих e,a,λ сукупність векторів $\{P_m(k)a^k\omega^k e, k\in\mathbb{Z}\}$ із $s(\mathbb{Z},\mathbb{C}^n)$, де $P_m(k)$ — деякий многочлен степеня $m\in\mathbb{N}$, є інваріантною відносно оператора $L(A,b)$, оскільки

$$L(A,b)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}P_m(k)a^k\omega^k e\Big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}Q_m(k)a^k\omega^k e,$$

де многочлени $P_m(k)$ та $Q_m(k)$ зв'язані співвідношенням

$$\begin{aligned}Q_m(k)=a^{-1}P_m(k-1)-\\ -2\lambda P_m(k)+abP_m(k+1).\end{aligned}\tag{5}$$

При $a=1$ звідси випливає інваріантність відносно оператора $L(A,b)$ многочленів від цілочисельного аргументу $k\in\mathbb{Z}$

$$L(A,b)P_m(k)=Q_m(k).$$

Така інваріантність збережеться і для многочленів, заданих на рівномірній сітці

$$\Delta(h)=\{t_k=kh,k\in\mathbb{Z},h>0\},$$

тобто

$$L(A,b)P_m(kh)=Q_m(kh).$$

Якщо $P_m(x)=\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha x^\alpha$ і $Q_m(x)=\sum_{\alpha=0}^m b_\alpha x^\alpha$, $a_\alpha,b_\alpha\in\mathbb{C}^n$, то внаслідок (5) при заміні k на kh одержимо зв'язок між коефіцієнтами $a_\alpha,b_\alpha,\ \alpha=\overline{0,m}$,

$$\Pi(a_0a_1\dots a_m)^\top=(b_0b_1\dots b_m)^\top,\tag{6}$$

де $\Pi=\Pi(m)=\{\pi_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=\overline{0,m}}$ — верхня трикутна матриця,

$$\begin{gathered}\pi_{\alpha\alpha}=-2A+(b+1)I,\\ \pi_{\alpha\beta}=h^{\beta-\alpha}C_\beta^\alpha\big((-1)^{\alpha+\beta}+b\big)I,\\ 0\le\alpha<\beta\le m.\end{gathered}$$

Зауваження 3. Якщо вектори $e_1,e_2,\dots,e_p$ утворюють жорданову клітину в матриці A з власним числом λ, тобто $Ae_1=\lambda e_1$, $Ae_2=\lambda e_2+e_1$, $Ae_p=\lambda e_p+e_{p-1}$, то при фіксованому $a\neq 0$ сукупність векторів із $s(\mathbb{Z},\mathbb{C}^n)$

$$\vec{u}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a^k\omega^k\Big(\sum_{j=1}^p P_{m_j}(k)e_j\Big),$$

де $P_{m_j}(k)$, $j=\overline{1,p}$, деякі многочлени від k, також очевидно утворюють інваріантну відносно $L(A,b)$ підмножину $s(\mathbb{Z},\mathbb{C}^n)$.

Дія оператора $L(A,b)$ на вектор $\vec{u}$ визначається так

$$\begin{aligned}&L(A,b)\vec{u}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a^k\omega^k\Big(\sum_{j=1}^p Q_{m_j}(k)e_j\Big),\\ &Q_{m_j}(k)=a^{-1}P_{m_j}(k-1)-2\lambda P_{m_j}(k)+\\ &\quad+abP_{m_j}(k+1)-2P_{m_{j+1}}(k),\quad 1\le j\le p,\\ &P_{m_{p+1}}(k)\equiv 0.\end{aligned}$$

Дослідимо зображення розв'язків однорідного рівняння

$$L(A,b)\vec{u}=0.\tag{7}$$

Таке зображення визначається коренями характеристичного рівняння

$$z^{-1}-2\lambda+bz=0.\tag{8}$$

Заміна $z=b^{-\frac12}\zeta=\rho^{-1}e^{-i\theta}\zeta$ рівняння (8) приводить до виду

$$\zeta^{-1}-2b^{-\frac12}\lambda+\zeta=0,$$

з чого випливає $b^{-\frac12}\lambda=\frac12(\zeta+\zeta^{-1})$.

Отже, корені характеристичного рівняння (8) можна виразити через обернені функції Жуковського (див. [8])

$$\begin{aligned}z_1(\lambda)=\rho^{-1}e^{-i\theta}\zeta_1(\rho^{-1}e^{-i\theta}\lambda),\\ z_2(\lambda)=\rho^{-1}e^{-i\theta}\zeta_2(\rho^{-1}e^{-i\theta}\lambda),\end{aligned}$$

де $\zeta_1(\omega)=\omega+\sqrt{\omega^2-1}$, $\zeta_2(\omega)=\omega-\sqrt{\omega^2-1}$.

Вважаємо, що виразу $\sqrt{\omega^2-1}$ відповідає така функція комплексної змінної $w=\sqrt{\omega^2-1}$, що $\lim_{\omega\to\infty}\frac{\sqrt{\omega^2-1}}{\omega}=1$.

Точки $\omega=\pm1$ є точками розгалуження для функції $w=\sqrt{\omega^2-1}$. На особливому для цієї функції відрізку $[-1;1]$ будемо вважати, що

$$\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2-1}\ge 0,$$

тобто, якщо $\omega=\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$, то

$$\sqrt{\cos^2\varphi-1}=i\sin\varphi.$$

Теорема 2. *Нехай e — власний вектор матриці A, що відповідає власному числу λ, для якого $\lambda^2\neq b$. Тоді для довільних комплексних констант C_1 та C_2 вектор*

$$\vec{u}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(C_1z_1^k(\lambda)+C_2z_2^k(\lambda)\big)\omega^k e$$

є розв'язком однорідного рівняння (7).

Зауваження 4. У випадку, коли власний вектор e матриці A має власне число $b^{\frac{1}{2}}$ або $-b^{\frac{1}{2}}$, то безпосередньою перевіркою можна показати, що рівняння (7) має розв'язок

$$\vec{u} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (C_1 + kC_2) b^{\frac{1}{2}k} \omega^k e \text{ при } \lambda = b^{\frac{1}{2}}.$$

Відповідно,

$$\vec{u} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k (C_1 + kC_2) b^{\frac{1}{2}k} \omega^k e \text{ при } \lambda = -b^{\frac{1}{2}}.$$

Зауваження 5. Оскільки обернена функція Жуковського $\zeta_1(\omega) = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$ переводить еліпс

$$\varepsilon(r) = \big\{\omega \in \mathbb{C}^1 : \omega = \tfrac{1}{2}(re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi}), \\ \varphi \in [0, 2\pi], r \geq 1\big\}$$

у коло $C(r) = \{\omega \in \mathbb{C}^1 : |z| = r\}$, то функція

$$z_1(\lambda) = \rho^{-1} e^{-i\theta} \zeta_1(\rho^{-1} e^{-i\theta} \lambda)$$

переводить еліпс

$$E(r, \rho, \theta) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \rho^{-1} e^{-i\theta} \lambda \in \varepsilon(r)\big\} = \\ = \big\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \lambda = \tfrac{1}{2}\rho e^{i\theta}(re^{i\varphi} + r^{-1}e^{-i\varphi}), \\ \varphi \in [0, 2\pi]\big\}$$

у коло $C(r/\rho)$.

(Очевидно, $E(r, 1, 0) = \varepsilon(r)$).

Відповідно, оскільки друга обернена функція Жуковського $\zeta_2(\omega) = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}$ переводить еліпс $\varepsilon(r)$ у коло $C(1/r)$, то функція

$$z_2(\lambda) = \rho^{-1} e^{-i\theta} \zeta_2(\rho^{-1} e^{-i\theta} \lambda)$$

переводить еліпс $E(r, \rho, \theta)$ у коло $C(\frac{1}{r\rho})$.

Зауваження 6. Велика і мала осі еліпса $E(r, \rho, \theta)$ мають відповідно довжини

$$\alpha = \frac{\rho}{2}(r + r^{-1}), \qquad \beta = \frac{\rho}{2}(r - r^{-1}).$$

У комплексній площині $\mathbb{C}^1$ ці осі лежать відповідно на прямих $y = (\operatorname{tg}\theta)x$ та $y = -(\operatorname{ctg}\theta)x$.

Очевидно, при $r = 1$, $\theta = 0$ еліпс $E(r, 1, 0)$ збігається з еліпсом $\varepsilon(r)$ з осями

$$\alpha = \frac{1}{2}(r + r^{-1}), \qquad \beta = \frac{1}{2}(r - r^{-1})$$

відповідно. Велика і мала осі еліпса $\varepsilon(r)$ лежать відповідно на дійсній і уявній осях площини $\mathbb{C}^1$.

При $\rho = 1$ еліпс $E(r, \rho, \theta)$ вироджується у відрізок $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$.

Точки $\pm\sqrt{b} = \pm\rho e^{i\theta}$ є фокусами еліпсів $E(r, \rho, \theta)$.

Сукупність усіх точок $\lambda \in \mathbb{C}^1$, для яких хоча б один із коренів характеристичного рівняння (8) має модуль рівний 1, назвемо спектральною лінією системи (1) і позначимо її $\Gamma(b) = \Gamma(\rho, \theta)$. Через $\mathfrak{D}(\infty)$ позначимо відкриту область із $\mathbb{C}^1$, що лежить ззовні $\Gamma(b)$. Через $\mathfrak{D}(0)$ — відповідно відкриту область, що лежить усередині $\Gamma(b)$.

При $\rho = 1$ лінія $\Gamma(b)$ є відрізком $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$. При цьому обидва характеристичні корені $z_1(\lambda)$ і $z_2(\lambda)$ мають на $\Gamma(b)$ модулі рівні 1. В області $\mathfrak{D}(\infty) = \mathbb{C}\backslash[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$ корінь $z_1(\lambda)$ має модуль більший 1, а $z_2(\lambda)$ має модуль менший 1.

При $\rho = 1$ область $\mathfrak{D}(0)$ є порожньою.

При $\rho > 1$ лінія $\Gamma(b)$ збігається з еліпсом

$$E(\rho, \rho, \theta) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \\ \lambda = \tfrac{1}{2}e^{i\theta}(\rho^2 e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \varphi \in [0, 2\pi]\big\}.$$

На цьому еліпсі $|z_1(\lambda)| = 1$. В області $\mathfrak{D}(\infty)$ $|z_1(\lambda)| > 1$, а в області $\mathfrak{D}(0)$ — $|z_1(\lambda)| < 1$, $|z_2(\lambda)| < \rho^{-1} < 1$ у всій площині $\mathbb{C}^1$.

Таким чином, при $\rho > 1$ всередині еліпса $\Gamma(b)$ обидва характеристичні корені мають модулі менші 1.

При $0 < \rho < 1$ спектральна лінія $\Gamma(b)$ збігається з еліпсом

$$E(\rho, \rho^{-1}, \theta) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \\ \lambda = \tfrac{1}{2}e^{i\theta}(e^{i\varphi} + \rho^{-2} e^{-i\varphi}), \varphi \in [0, 2\pi]\big\}.$$

На цьому еліпсі $|z_2(\lambda)| = 1$. У зовнішній області $\mathfrak{D}(\infty)$ $|z_2(\lambda)| < 1$, а у внутрішній області $\mathfrak{D}(0)$ — $|z_2(\lambda)| > 1$, $|z_1(\lambda)| > \rho^{-1} > 1$ у всій площині $\mathbb{C}^1$.

Отже, якщо спектр матриці $\sigma(A)$ не перетинається зі спектральною лінією $\Gamma(b)$, то однорідне рівняння (7) має єдиний обмежений розв'язок, тобто тривіальний. Для $b = \pm 1$ цей факт раніше встановлено в [5; 6].

Розглянемо питання про представлення загального розв'язку однорідної та неоднорідної системи (1) за допомогою функцій від матриці A.

Теорема 3. *Якщо числа $\lambda = \pm\sqrt{b} = \pm\rho e^{i\theta}$ не належать спектру матриці A, то будь-який розв'язок однорідного операторно-різницевого рівняння* (7) *допускає зображення*

$$\vec{u} = \sum_{k\in Z} \omega^k \big(z_1^k(A) f + z_2^k(A) g\big), \tag{9}$$

де f і g — довільні вектори із C^n.

Теорема 3 є наслідком теореми 2 та зроблених до неї зауважень 4–6.

Зображення (9) розв'язків однорідного рівняння (7) можна узагальнити і на випадок, коли числа $\lambda = \pm\sqrt{b}$ належать $\sigma(A)$.

Наступна теорема визначає зображення обмеженого розв'язку $\vec{u} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ за допомогою дискретної функції Гріна $G(k,\lambda)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Gamma(b)$. В області $\mathfrak{D}(\infty)$ для всіх $\rho > 0$ ця функція має зображення

$$G(k,\lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-b}} z_1^k(\lambda), & k < 0; \\ -\frac{1}{2\sqrt{\lambda^2-b}} z_2^k(\lambda), & k \geq 0. \end{cases}$$

При $\rho > 1$ в області $\mathfrak{D}(0)$ маємо при $\lambda^2 \neq b$

$$G(k,\lambda) = \begin{cases} 0, & k \leq 0; \\ b^{-1} \frac{z_1^k(\lambda) - z_2^k(\lambda)}{z_1(\lambda) - z_2(\lambda)}, & k \geq 1. \end{cases}$$

При $0 < \rho < 1$ в області $\mathfrak{D}(0)$ маємо при $\lambda^2 \neq b$

$$G(k,\lambda) = \begin{cases} \frac{z_1^k(\lambda) - z_2^k(\lambda)}{z_1(\lambda)^{-1} - z_2(\lambda)^{-1}}, & k < 0; \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що у випадку кратних коренів характеристичного рівняння (8) дискретна функція Гріна $G(k,\lambda)$ може бути визначена за допомогою граничного переходу $z_2(\lambda) \to z_1(\lambda)$.

Отже, при $\rho > 1$ і $\lambda^2 = b$ одержимо

$$G(k,\lambda) = \begin{cases} 0, & k \geq 0; \\ kb^{-1} z_1^{k-1}(\lambda), & k \geq 1. \end{cases}$$

Відповідно, для $0 < \rho < 1$ та $\lambda^2 = b$ маємо

$$G(k,\lambda) = \begin{cases} -kz_1^{k+1}(\lambda), & k < 0; \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

Має місце така

Теорема 4. *Якщо* $\sigma(A) \cap \Gamma(b) = \varnothing$ *і* $\vec{f} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$, *то єдиний обмежений розв'язок рівняння* (4)

$$\vec{u} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega^k u_k$$

визначається дискретною згорткою матричнозначної функції $G(k, A)$ *та вектора* $\vec{f}$

$$u_k = \sum_{j \in Z} \omega^k G(k-j,\lambda) f_j. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки в зображенні функції $G(k,\lambda)$ фігурують обмежені частини нескінченних двосторонніх геометричних прогресій $z_1^k(\lambda)$, $z_2^k(\lambda)$, $k \in \mathbb{Z}$, то норми матричних операторів $G(k, A)$, $k \in \mathbb{Z}$, допускають оцінки

$$\|G(k,A)\| \leq Mq^{|k|},$$

де $M > 0$ константа, залежна від матриці A,

$$q = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \max_{j=1,2} \min\bigl(|z_j(\lambda)|, |z_j^{-1}(\lambda)|\bigr) < 1.$$

Отже, ряди (10) є абсолютно збіжними

$$\|u_k\| \leq MC_1 \sum_{l \in \mathbb{Z}} q^{|l|} = MC_1 \frac{1+q}{1-q}.$$

Таким чином, ми показали, що $\vec{u} \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$.

Безпосередньою підстановкою можна упевнитись, що вектор $\vec{u}$ із зображення (10) задовольняє рівняння (4).

Насправді, клас векторів $\vec{f} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$, для яких збігаються ряди (10), можна суттєво розширити, якщо від f_k вимагати виконання оцінок типу (3).

Наступна теорема описує клас єдиності розв'язку рівняння (4).

Теорема 5. *Для всіх матриць A таких, що*

$$\sigma(A) \cap \Gamma(b) = \varnothing,$$

і для всіх векторів $\vec{f} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ *таких, що*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|f_k\|^{\frac{1}{|k|}} \leq 1, \tag{11}$$

існує єдиний розв'язок $\vec{u} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ *рівняння* (4), *що задовольняє*

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|u_k\|^{\frac{1}{|k|}} \leq 1. \tag{12}$$

Для доведення теореми 5 достатньо упевнитись, що, по-перше, з умови (11) випливає абсолютна збіжність рядів (10) і оцінки (12), по-друге, внаслідок теореми 3 для нетривіальних розв'язків однорідного рівняння (7) виконується умова

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \|u_k\|^{\frac{1}{|k|}} \geq q^{-1} > 1.$$

Таким чином, клас єдиності включає вектори $\vec{f} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ з оцінками типу (3) для f_k, у яких послідовність M_k може мати степеневе або субекспоненціальне зростання.

Розглянемо питання про чисельні методи знаходження обмеженого розв'язку системи (1) ($\vec{f} \in s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$). У [5; 6] розглядається наближення $\vec{u}$ розв'язком крайової задачі для усіченої системи, розв'язання якої вимагає застосування методу прогонки.

Значення u_k, $k \in \mathbb{Z}$, можна наблизити частковою сумою ряду (10). Недоліком такого підходу є необхідність знаходження матричної функції $(A^2 - bI)^{\frac{1}{2}}$.

Найбільш цікавим методом наближення u_k, $k \in \mathbb{Z}$, напевно, є метод локальних асимптотичних формул, який є узагальненням методу обчислення параметрів локального сплайну мінімального дефекту. Цей метод базується на згаданій раніше інваріантності многочленів відносно оператора $L(A,b)$.

Нехай f_k, $k \in \mathbb{Z}$, є значеннями чотири рази неперервно диференційовної вектор-функції $f(t)$ на сітці

$$\Delta(h) = \{t_k = kh, k \in \mathbb{Z}, h > 0\}.$$

Запишемо розклад $f(t)$ в околі точки t_k

$$f(t) = f_k + f_k' \triangle t + \frac{1}{2} f_k'' \triangle t^2 + \\ + \frac{1}{6} f_k''' \triangle t^3 + O(\triangle t^4),$$

де $\triangle t = t - t_k$, f_k', f_k'', f_k''' — значення відповідних похідних у точці t_k.

Унаслідок (10) для u_k, користуючись першим рядком матриці, одержимо асимптотичне розвинення

$$u_k = \mathfrak{R} f_k - h(b-1)\mathfrak{R}^2 f_k' + \\ + \frac{1}{2} h^2 \big[2(b-1)^2 \mathfrak{R}^3 - (b+1)\mathfrak{R}^2\big] f_k'' - \\ - \frac{1}{6} h^3 (b-1) \big[-\mathfrak{R}^2 + 6(b+1)\mathfrak{R}^3 - (b-1)^2 \mathfrak{R}^4\big] f_k''',$$

де $\mathfrak{R} = [(b+1)I - 2A]^{-1}$.

Замінюючи f_k', f_k'', f_k''' центральними розділеними різницями

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f_k''' + O(h^4),$$

$$f_k'' = \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2} + O(h^2),$$

$$f_k''' = \frac{f_{k+2} - 2f_{k+1} + 2f_{k-1} - f_{k-2}}{2h^3} + O(h^2),$$

одержимо таку

Теорема 6. *Якщо в рівнянні* (4)

$$\vec{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \omega^k,$$

де $f(t)$ чотири рази неперервно диференційовна вектор-функція така, що

$$\|f^{(j)}(t)\| \le C(1 + |t|^m)$$

при деяких $C > 0$ та $m > 0$, $j = \overline{0,4}$, то для u_k, $k \in \mathbb{Z}$, має місце асимптотичне розвинення

$$u_k = \mathfrak{R} f_k - \frac{1}{2}(b-1)\mathfrak{R}^2 (f_{k+1} - f_{k-1}) + \\ + \frac{1}{2}\big[2(b-1)^2 \mathfrak{R}^3 - (b+1)\mathfrak{R}^2\big] \times \\ \times (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) + \\ + \frac{1}{12}(b-1)\big[-2\mathfrak{R}^2 + 6(b+1)\mathfrak{R}^3 - (b-1)^2\mathfrak{R}^4\big] \times \\ \times (f_{k+2} - 2f_{k+1} + 2f_{k-1} - f_{k-2}) + O(h^4). \tag{13}$$

Якщо вектор-функція $f(t)$ є кубічним многочленом відносно t, то формула (13) *є точною.*

Зробимо кілька зауважень до локальної асимптотичної формули (13).

У симетричному випадку ($b = 1$) формула (13) спрощується. Цей випадок досліджується в роботах [1; 2]. В одновимірному випадку ($n = 1$) система типу (1)

$$u_{k-1} + 4u_k + u_{k+1} = 6f_k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

розглядається при побудові локальних кубічних сплайнів мінімального дефекту. При цьому формули (13) набувають вигляду

$$u_k = -\frac{1}{6} f_{k-1} + \frac{4}{3} f_k - \frac{1}{6} f_{k+1}.$$

У разі, якщо f_k, $k \in \mathbb{Z}$, є значеннями деякого кубічного многочлена на сітці $\Delta(h)$, остання формула дає точний розв'язок системи (14).

Розглянемо питання про спектр різницевого оператора $L(A,b)$, визначеного в $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$. Оскільки для довільного $\mu \in \mathbb{C}^1$

$$L(A,b) - \mu I = \omega^{-1} I - 2A + b\omega I - \mu I = \\ = \omega^{-1} I - 2(A + 0{,}5\mu I) + b\omega I = L(A + 0{,}5\mu I, b),$$

то для існування резольвенти

$$R(\mu) = (L(A + 0{,}5\mu I, b))^{-1}$$

необхідно і достатньо, щоб спектр матриці $A + 0{,}5\mu I$ не перетинався із $\Gamma(b)$.

Нехай

$$\Omega(b,\lambda) = \big\{\mu \in \mathbb{C} : \tfrac{1}{2}(\lambda + \mu) \in \Gamma(b)\big\}.$$

Теорема 7. *Спектр різницевого оператора $L(A,b)$, визначеного в $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$, збігається з об'єднанням $\bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \Omega(b,\lambda)$.*

Таким чином, при $\rho \neq 1$ спектр різницевого оператора $L(A,b)$ є об'єднанням еліпсів з розмірами вдвічі більшими від розмірів $\Gamma(b)$, з центром, зміщеним у точки -2λ, $\lambda \in \sigma(A)$, і аналогічним до $\Gamma(b)$ нахилом великої і малої осей по відношенню до дійсної осі, а при $\rho = 1$ спектр $L(A,b)$ збігається з об'єднанням відрізків $\bigcup_{\lambda \in \sigma(A)} \big[2(\lambda - e^{i\theta}), 2(\lambda + e^{i\theta})\big]$.

При $n = 1$, $A = 0$, $b = 1$ оператор $L(0,1)$ зводиться до тридіагональної матриці, у якої по головній діагоналі стоять нулі, а по верхній і нижній діагоналях — одиниці. Така матриця є матрицею суміжності графа, що є променем нескінченним в обидва боки [9; 10]. Спектральний аналіз такого графа описано в наступній теоремі.

Теорема 8. *Оператор $L(0,1)$ є обмеженим самоспряженим оператором у просторі $l_2(\mathbb{Z})$. Існує унітарний оператор $\mathfrak{U}$ такий, що*

$$\mathfrak{U}L(0,1)\mathfrak{U}^{-1} = J^{\sqrt{2}} \oplus J_0,$$

де $J^{\sqrt{2}}$, J_0 — матриці Якобі, визначені на просторі l_2, і мають вигляд

$$J^{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Абсолютно неперервний спектр кожної із матриць $J^{\sqrt{2}}$, J_0 є однократним і зосереджений на інтервалі $[-2,2]$.

Для кожного $\lambda \in [-2,2]$ вектор-функція

$$\varphi_\lambda = \big(P_0(\lambda), P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_j(\lambda), \dots\big) \qquad (15)$$

є узагальненою власною функцією оператора J_0, що відповідає власному значенню λ, тобто $J_0\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

У представленні (15) $P_j(\lambda)$ є поліномом степеня j від λ, що виражається через поліноми Чебишева другого роду $P_j(\lambda) = U_j(\frac{\lambda}{2})$, де

$$U_j(z) = \frac{\sin((j+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)}.$$

Для поліномів $P_j(\lambda)$ вірне рекурентне співвідношення

$$P_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda) - P_{j-1}(\lambda) \qquad (16)$$

з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$, $P_1(\lambda) = \lambda$.

Спектральна міра, що відповідає абсолютно неперервному спектру матриці J_0, зосереджена на інтервалі $[-2,2]$ та має щільність

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}. \qquad (17)$$

Для матриці $J^{\sqrt{2}}$ довільному $\lambda \in [-2,2]$ відповідає узагальнений власний вектор вигляду

$$\varphi_\lambda = \big(1, \sqrt{2}T_1(\tfrac{\lambda}{2}), \dots, \sqrt{2}T_{j-2}(\tfrac{\lambda}{2}), \dots\big), \qquad (18)$$

де $T_j(z) = \cos(j\arccos z)$ — поліноми Чебишева першого роду.

Спектральна міра, що відповідає абсолютно неперервному спектру матриці $J^{\sqrt{2}}$, зосереджена на інтервалі $[-2,2]$ та має щільність

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4-\lambda^2}}. \qquad (19)$$

Отже, абсолютно неперервний спектр оператора $L(0,1)$ є двократним і зосереджений на інтервалі

$$\sigma_{ac}(L(0,1)) = [-2,2].$$

Висновки

Для системи різницевих рівнянь (1) знайдено клас єдиності розв'язку, а саме встановлено, якою має бути поведінка норм $\|f_k\|_{C^n}$ при $k \to \infty$, щоб система (1) мала єдиний розв'язок у тому самому класі. Знайдено спектр різницевого оператора $L(A,b)$. Встановлені локальні асимптотичні розвинення для розв'язку системи (1), які істотно спрощують знаходження наближеного розв'язку.

Список літератури

1. Кашпіровський О. І. Про локальні апроксимації обмежених розв'язків нескінченних систем різницевих рівнянь / О. І. Кашпіровський, О. В. Семенів, В. О. Яценко // Наукові записки Національного університету «Києво-Могилянська академія». — 2007. — Т. 61 : Фізико-математичні науки. — С. 17–22.
2. Андросенко М. П. Дослідження класів єдиності та локальні наближення розв'язків нескінченної несиметричної системи різницевих рівнянь / М. П. Андросенко, О. І. Кашпіровський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2011. — № 25. — С. 7–11.
3. Дороговцев А. Я. Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве / А. Я. Дороговцев // Теория вероятностей и математическая статистика. — 1990. — Вып. 42. — С. 35–42.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем / А. Я. Дороговцев. — К. : Вища шк., 1992. — 319 с.
5. Городний М. Ф. Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве / М. Ф. Городний // Математические заметки. — 1992. — Т. 51, вып. 4. — С. 17–22.
6. Городній М. Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук / М. Ф. Городній. — К., 2004. — 32 с.
7. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Наука, 1989. — 430 с.
8. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
9. Лебідь В. О. Спектральний аналіз зіркового графа з одним

нескінченним променем / В. О. Лебідь, Л. П. Нижник // Наукові записки НаУКМА. — 2013. — Т. 139 : Фізико-математичні науки. — С. 18–22.
10. Лебідь В. О. Спектральний аналіз локально скінченних графів з одним нескінченним променем / В. О. Лебідь, Л. П. Нижник // Доповіді НАН України. — 2014. — № 3. — С. 29–35.
11. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

O. Kashpirovskyi, V. Lebid

CLASSES OF UNIQUENESS AND LOCAL APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF THE INFINITE ASYMMETRIC SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS

Class unity solutions and the spectrum difference operator are described for infinite asymmetric stationary systems of difference equations. Local approximations of solutions are constructed, which are analogues of known algorithm of parameters calculation for local splines minimal defects.

Keywords: systems of difference equations, class unity solutions, spectrum, discrete Green's function.

Матеріал надійшов 27.06.2014