Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Реферат на тему:

ЦІНОУТВОРЕННЯ ОПЦІОНІВ НА ДРОБОВО-ФІНАНСОВОМУ РИНКУ

Виконавець: Гуцало А.В.
Науковий керівник: Щестюк Н.Ю..,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Метою роботи є застосування субдифузійної моделі із зворотним Гаусівским субординатором до реальних фінансових даних

Дифузійна модель динаміки фінансового ринку

Ціна облігації: $B_t = B_0 e^{rt}$ (1.1)

r - річна процентна ставка.

Рух основних ризикових активів S_t:

$$dS_t = \mu S_t dt + \delta S_t dW_t \qquad (2.1)$$

μ — річна швидкість дрейфу S(t); σ — річний стандарт відхилення прибутковості акцій; Wt — стандартний броунівський рух

Справедлива ціна опціону: $C(S_0, K, T, r, \delta) = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$ (3.1)

де $d_1 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \; d_2 = \frac{\log \frac{S_0}{K} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$

Недоліки дифузійної моделі B-S: позитивна кореляція квадратичних прибутків, не підходить для періодів з нерухомими змінами ціни акцій.

Субдифузійна модель динаміки фінансового ринку: застосування стохастичного часу посилання

Ціна облігації: $B_t = B_0 e^{rH(t)}$ (1.2)

Рух основних ризикових активів S_t:

$$dS_t = \left(\mu + \frac{\delta^2}{2}\right) S_t dH(t) + \delta S_t dW_{H(t)} \quad (2.2)$$

$H(t)$ - hitting time, $G(t)$ - waiting time

$$H(t) = \inf(\tau > 0 : G(\tau) > t))$$

Gausian subordinator

PDF зворотнього гаусівського G(δt,γ):

$$g(x,t) = \frac{\delta t}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{\delta\gamma t - \frac{\delta^2 t^2}{2x} - \frac{\gamma^2 x}{2}}, \qquad x > 0.$$

Моменти q-го порядку визначаються як:

$$E[G^q(t)] \sim \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^q t^q, \qquad t \to \infty.$$

Inverse Gausian subordinator посилання

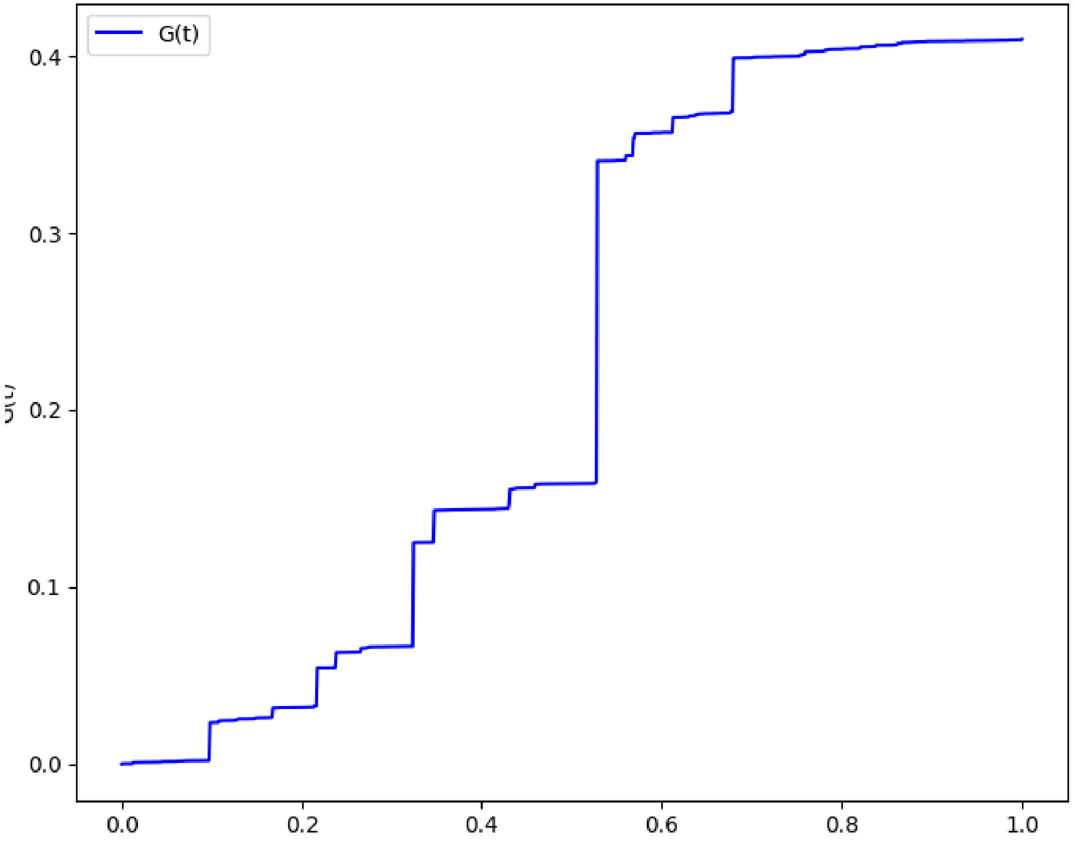
Щільність H(t) має вигляд:

$$h(x,t) = \frac{\delta}{\pi} e^{\delta\gamma x - \frac{\gamma^2}{2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty}}{y + \frac{\gamma^2}{2}} * \left[\gamma sin\left(\delta x\sqrt{2y}\right) + \sqrt{2y}cos\left(\delta x\sqrt{2y}\right)\right]dy$$

Моменти q-го порядку визначаються як:

$$E[H^q(t)] \sim \begin{cases} \left(\frac{1}{\delta\sqrt{2}}\right)^q t^{q/2} & \text{при } \gamma = 0 \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^q t^q & \text{при } \gamma > 0 \end{cases}, \qquad t \to \infty.$$

Simulation of waiting time



Симуляція $G(t)$:

Для кожного часового крроку i:

1.1 Генеруємо стандартну нормальну випадкову змінну N.

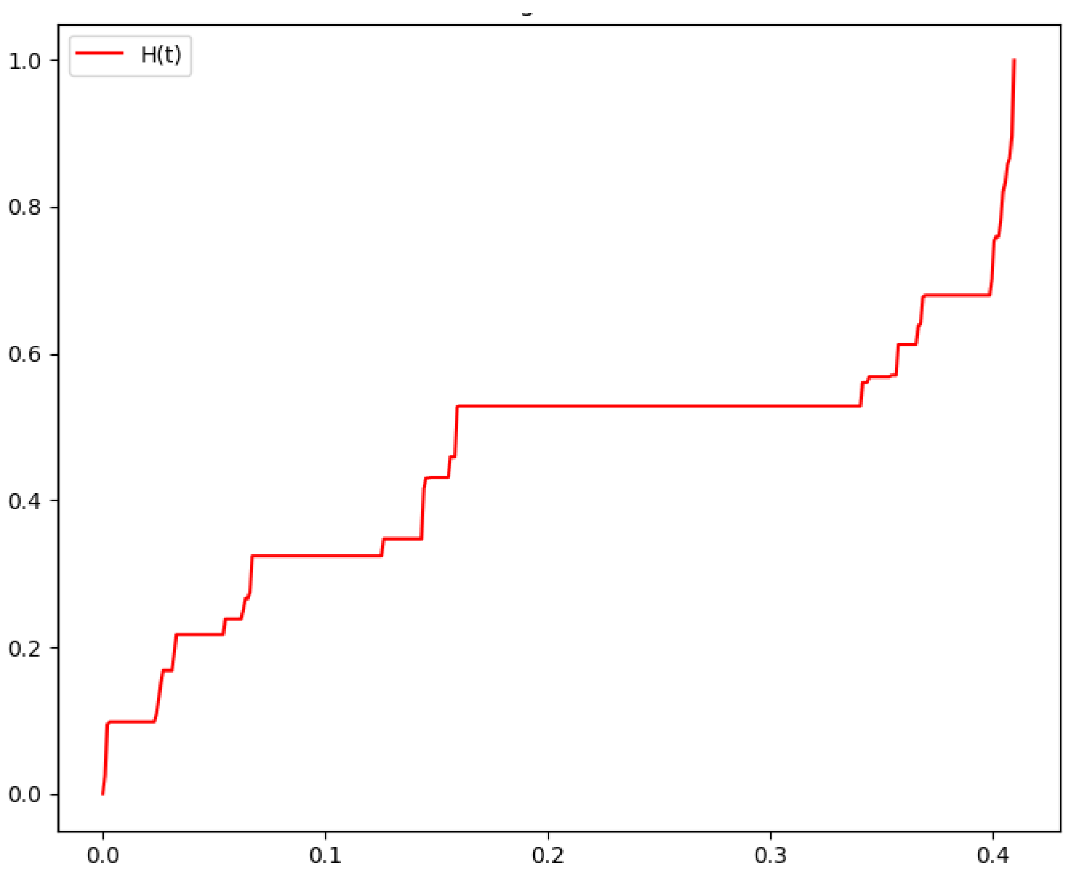
1.2 Призначаємо $X = N^2$.

1.3 Визначаємо $Y = dt + \frac{X}{2} + \sqrt{dt}$.

1.4 Генеруємо рівномірну [0, 1] випадкову змінну U.

1.5 Якщо $U \leq \frac{dt}{dt+Y}$, повертаємо Y; інакше повернутаємо $\frac{(dt)^2}{Y}$.

Simulation of hitting time



$$H(t) = \inf\,(\tau > 0 : G(\tau) > t))$$

Генерація $H(t)$:

$$H_\Delta(t) = [\min\{n \in N : G(\Delta n) > t\} - 1]\Delta, \quad n = 1, 2, \ldots$$

де Δ – довжина кроку,
$G(\Delta n)$ – значення оберненого Гаусівського процесу $G(t)$.

Sub-diffusive model: option pricing посилання

Справедлива ціна європейського call option в субдифузійному режимі визначається як:

$$C_{sub}(S_0, K, T, r, \delta) = C(S_0, K, \mathrm{H(t)}, r, \delta) = \int_0^{\infty} C(S_0, K, x, r, \delta) h(x, t) dx'$$

Тут h(x, t) – це PDF для H(t), а $C(S_0, K, x, r, \delta)$ розраховується за моделлю Блека-Шоулза.

Для часткового випадку: $\gamma = 0$ та $\delta = 1$.

$$h(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-ty} cos\left(x\sqrt{2y}\right) dy = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\left(\sqrt{2x}\right)^2}{4t}} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \qquad t > 0$$

Wylomanska, A., Kumar, A., Połoczánski, R., Vellaisamy, P., Inverse Gaussian and its inverse process as the subordinators of fractional Brownian motion

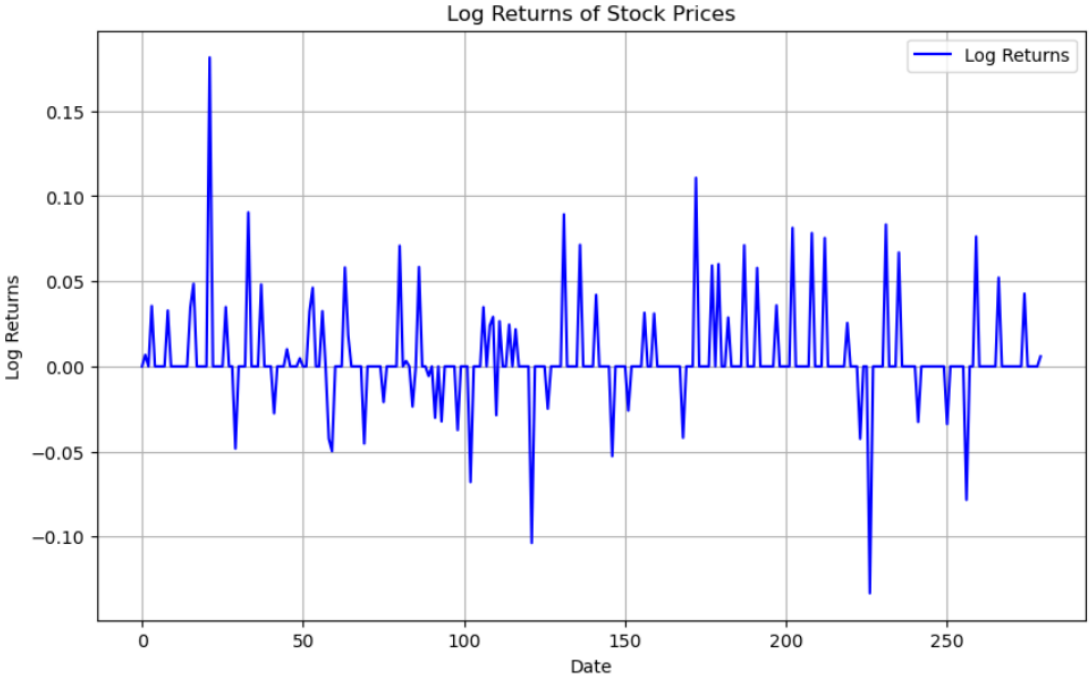
Метод Монте-Карло

За методом Монте-Карло, справедлива ціна опціну може бути визначена як:

$$C_{sub}(S_0, K, T, r, \sigma) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C(S_0, K, T, H_i(T), \sigma)$$

M. Magdziarz, Option Pricing in Subdiffusive Bachelier Model,
Appl. 145 (2009)

Застосування субдифузійної моделі до реальних фінансових даних. NVIDIA



Вхідні дані. Визначення параметрів

Початкові значення: S0 = 1038, K = 1000, r = 2%, sigma = 45%

$\gamma = 1$ та $\delta = 1$. T = {1/24; 1/3; 2/3}

Expiration Dates	Option	Strategy	Moneyness	Type
June 2024	Composite	Calls & Puts	Near the Money	All (Types)

Calls								Puts					
Exp. Date	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.	Strike	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int.
June 7, 2024													
Jun 7	96.83	+43.10 ▲	108.00	109.20	225	342	935.00	3.75	-37.48 ▼	3.55	3.85	450	314
Jun 7	92.00	-33.70 ▼	105.50	106.90	8	5	937.50	4.20	-1.45 ▼	3.80	4.05	97	76
Jun 7	102.96	+49.36 ▲	103.50	104.65	324	579	940.00	4.25	-39.60 ▼	4.05	4.35	754	916
Jun 7	103.55	+8.15 ▲	101.00	102.40	17	5	942.50	4.09	-1.16 ▼	4.30	4.65	97	82
Jun 7	99.40	+48.10 ▲	98.65	100.55	652	444	945.00	4.45	-41.78 ▼	4.55	4.95	565	608
Jun 7	100.80	+1.80 ▲	96.60	98.10	12	9	947.50	5.10	-4.50 ▼	4.85	5.15	278	227
Jun 7	96.00	+46.70 ▲	94.40	95.70	1514	2306	950.00	5.42	-43.58 ▼	5.15	5.50	1771	877
Jun 7	82.80	-6.83 ▼	92.25	93.60	11	10	952.50	5.35	-3.91 ▼	5.50	5.90	102	61
Jun 7	82.36	+35.79 ▲	90.10	91.45	292	342	955.00	6.00	-45.60 ▼	5.75	6.15	293	268
Jun 7	86.00	+41.10 ▲	85.85	87.35	213	555	960.00	6.79	-51.11 ▼	6.55	7.00	941	724
Jun 7	85.80	+44.55 ▲	81.75	83.05	275	444	965.00	7.45	-50.45 ▼	7.35	7.85	651	311
Jun 7	77.65	+36.88 ▲	77.65	78.95	257	453	970.00	8.50	-53.80 ▼	8.25	8.80	870	529
Jun 7	76.35	+38.20 ▲	73.70	75.00	167	206	975.00	9.70	-52.40 ▼	9.30	9.85	651	399

Результати

```
def hitting_time(G_t, t, delta_t):
    H_t = abs((find_min_index(G_t, t) - 1) * delta_t)
    return H_t

def monte_carlo_option_price(S, K, T, r, sigma, n_simulations):
    option_prices = []
    for _ in range(n_simulations):
        G_t = inverse_gaussian_subordinator(delta, gamma, T, N_steps)
        while G_t[-1]<1:
            G_t = inverse_gaussian_subordinator(delta, gamma, T, N_steps)
        H_t = hitting_time(G_t, T, delta_t)
        call_price = black_scholes_call_price(S0, K, H_t, r, sigma)
        option_prices.append(call_price)
    return np.mean(option_prices)

def black_scholes_call_price(S, K, T, r, sigma):
    with np.errstate(divide='ignore', invalid='ignore'):
        d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma**2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
        d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)
        call_price = S * norm.cdf(d1) - K * norm.cdf(d2) * np.exp(-r * T) * norm.cdf(d2)
    return call_price
```

Точність моделі

Дата	B-S	M-C	реальні
7 june	26,67	33,27	39,75
20 september	151,79	125,72	131,25
17 january	226,38	165,03	184

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2}$$

RMSE субдифузійної моделі: 12,006

RMSE дифузійної моделі: 28,219

Висновки

Субдифузійна модель допомагає визничити більш точно справедоиву ціну опціону, коли в фінансовій моделі є періоди застоїв.

У даній роботі:

- Було проведено симуляцію hitting time та waiting time.
- Запроваджено твердження для справедливої ціни опціону.
- Застосовано метод Монте-Карло для реальних даних. Написано програмний код на мові Python. Зроблено порівняння точності.