МЕТРИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ РЕГУЛЯРНИХ ГРУП ПІДСТАНОВОК

©2011 р. Богдана ОЛІЙНИК

Національний університет „Києво-Могилянська Академія”,
вул. Г. Сковороди 2, Київ 01601
e-mail: *bogd@ukma.kiev.ua*

Редакція отримала статтю 17 травня 2011 р.

Досліджується метрична реалізація скінченних груп підстановок. Дається повна характеризація тих регулярних скінченних груп підстановок, які реалізуються як групи ізометрій метричних просторів. Показано, що мінімальне метричне зображення кожної з таких груп є групою ізометрій метричного простору, метрика в якому набуває 2, 3, 4, або 5 різних значень.

1 Вступ

Нехай $\mathcal{K}$ — деякий клас скінченних дискретних структур: графів, гіперграфів, частково впорядкованих множин, метричних просторів, тощо. Кожна структура S із класу $\mathcal{K}$ визначена над деякою множиною X носієм S. Підстановки множини X, які зберігають структуру S в цілому, називають її автоморфізмами. Групу всіх автоморфізмів $AutS$ структури S природно розглядати як групу підстановок на множині X. Нагадаємо, що групи підстановок (G, X) і (H, Y) ізоморфні, якщо існує пара відображень $f : G \to H$, $\delta : X \to Y$ таких, що f — ізоморфізм груп, δ — бієкція, причому для довільних $x \in X$, $g \in G$ виконується рівність $\delta(x^g) = \delta(x)^{f(g)}$, де x^g є образом елемента x під дією підстановки g.

УДК: 519.11; MSC 2000: 20B25

Ключові слова і фрази: регулярна група, 2*-замкнена група підстановок, метрична реалізовність, група ізометрій, мінімальне метричне зображення.

Означення 1. *Групу підстановок* (G, X) *називатимемо* $\mathcal{K}$*-реалізовною, якщо в класі* $\mathcal{K}$ *існує об'єкт* S *з носієм* Y *такий, що групи підстановок* (G, X) *і* $(\mathrm{Aut}\, S, Y)$ *є ізоморфними.*

Проблеми характеризації $\mathcal{K}$-реалізовних груп підстановок для переважної більшості класів дискретних структур є далекими від розв'язання. А тому вони, як правило, досліджуються для різних типів скінченних груп підстановок. Одним з найбільш досліджених в цьому відношенні є клас регулярних груп підстановок. Група підстановок (G, X) називається регулярною, якщо для довільних елементів x_1, x_2 існує точно одна підстановка $g \in G$ така, що $x_1^g = x_2$. Інакше кажучи, (G, X) регулярна, якщо G діє на X транзитивно і $|G| = |X|$.

Проблема реалізації регулярних груп підстановок у вигляді повних груп автоморфізмів простих (неорієнтованих) графів досліджувалася ще з 70-х років минулого століття (т. зв. GRR-проблема). Зусиллями ряду математиків [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] було повністю охарактеризовано всі регулярні групи підстановок, які реалізуються автоморфізмами простих графів. При цьому було встановлено певні твердження, які мають значно ширшу сферу застосувань.

В даній роботі ми досліджуємо метричну реалізацію скінченних груп підстановок. Базуючись на підходах, розроблених при дослідженні GRR-проблеми, і використовуючи встановлені при цьому твердження, ми даємо повну характеризацію тих регулярних скінченних груп підстановок, які реалізуються як групи ізометрій метричних просторів.

В роботі розглядаються лише скінченні метричні об'єкти (групи підстановок, графи, метричні простори), хоча деякі зі сформульованих результатів можна перенести на нескінченний випадок. Всі позначення в статті загальноприйняті, для визначення загальновживаних термінів ми відсилаємо читача до монографій [8], [9], [10], [11], [12].

2 2- і 2*-замкнені групи підстановок

За дією групи G на множині X природно визначаються її дії на декартовому квадраті $X^2 = X \times X$ і множині $X^{\{2\}}$ всіх 2-елементних підмножин множини X. А саме, для довільних $(x, y) \in X^2$, $\{x, y\} \in X^{\{2\}}$ і $g \in G$ покладемо

$$(x, y)^g = (x^g, y^g), \tag{1}$$

$$\{x, y\}^g = \{x^g, y^g\}. \tag{2}$$

Орбіти груп підстановок підстановок (G, X^2) і $(G, X^{\{2\}})$ називаються, відповідно, орбіталами і симетризованими орбіталами групи підстановок (G, X). Для бінарного відношення $\alpha \subset X^2$, як звичайно, покладемо $\alpha^{-1} = \{(y, x)| \ (x, y) \in \alpha\}$. Відношення $\alpha \cup \alpha^{-1} \subseteq X^2$ називається симетризацією відношення α. Існує очевидна взаємнооднозначна відповідність між симетризаціями недіагональних орбіт групи підстановок (G, X^2) і орбітами $(G, X^{\{2\}})$. При цьому орбітал α групи підстановок (G, X) називається діагональним, якщо $\alpha \subset D_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$. Єдиним діагональним орбіталом транзитивної групи підстановок (G, X) є діагональне відношення D_X. Зауважимо також, що орбітали і симетризовані орбітали утворюють розбиття множин X^2 та $X^{\{2\}}$ відповідно.

Нехай $R = \langle R_1, R_2, \ldots, R_s \rangle$ — множина бінарних відношень на множині X. Підстановка $g \in S(X)$ зберігає відношення R_i, $1 \le i \le s$, якщо для довільної пари $(x, y) \in R_i$ її образ (x^g, y^g) також міститься в R_i. Підстановка $g \in S(X)$ називається автоморфізмом системи відношень R, якщо вона зберігає кожне відношення з цієї системи. Групу автоморфізмів системи відношень R позначатимемо $\mathrm{Aut}R$.

Символом $\mathrm{Orb}_2(G, X)$ позначатимемо множину орбіталів групи підстановок (G, X), а символом $\mathrm{Orb}_2^*(G, X)$ — множину її симетризованих орбіталів.

Означення 2. *i)* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}_2(G, X))$ *називається* 2*-замиканням групи підстановок* (G, X), *а група підстановок* $\mathrm{Aut}(\mathrm{Orb}_2^*(G, X))$ *— її симетризованим* 2*-замиканням або* 2^**-замиканням.*

ii) Група підстановок (G, X) *називається* 2*-замкненою (*2^**-замкненою), якщо вона дорівнює своєму* 2*-замиканню (*2^**-замиканню).*

2-замикання групи підстановок (G, X) будемо позначати символом $G^{(2)}$, а її симетризоване 2-замикання — символом $G^{\{2\}}$. 2-замкнені чи, відповідно, 2^*-замкнені групи підстановок природним чином характеризуються в термінах автоморфізмів реберно-кольорових простих орграфів чи графів. Кожне k-кольорове розфарбування ребер повного простого орграфа чи графа з множиною вершин X задає розбиття множин $X^2 \setminus D_X$ і $X^{\{2\}}$, відповідно, на k підмножин. Тобто k-кольоровому розфарбуванню ребер повного простого орграфа (графа) відповідає k антирефлексивних відношень (антирефлексивних симетричних відношень), заданих на множині X, що утворюють розбиття множини $X^2 \setminus D_X$ (X^2). Автоморфізмом повного кольорового простого орграфа (графа) називається така підстановка множини його вершин, яка зберігає кольори ребер. Має місце таке добре відоме твердження.

Лема 1 ([13])**.** *Група підстановок (G, X) 2-замкнена тоді і тільки тоді, коли вона є групою автоморфізмів деякого повного кольорового простого орграфа.*

3 Метрична реалізація і 2^*-замкненість груп підстановок

Групу підстановок (G, X) називатимемо метрично реалізовною, якщо вона реалізується в класі метричних просторів в сенсі означення 1. Нехай (X, d_X) — скінченний метричний простір, $\mathrm{Dist}(X, d_X)$ — множина значень метрики d_X, $\mathrm{Dist}^*(X, d_X) = \mathrm{Dist}(X, d_X) \setminus \{0\}$. Для довільного $a \in \mathrm{Dist}(X, d_X)$ символом R_a позначимо бінарне відношення, задане на множині X, визначене рівністю

$$R_a = \{(x, y) \mid (x, y) \in X^2,\ d(x, y) = a\}. \tag{3}$$

Зрозуміло, що відношення R_a, $a \in \mathrm{Dist}(X, d_X)$, утворюють розбиття множини X^2, причому $R_0 = D_X$. Кожне з відношень R_a є симетричним, а тому при довільному $a \neq 0$ відношенню R_a взаємнооднозначно відповідає підмножина $\widehat{R}_a$ із $X^{\{2\}}$, визначена рівністю

$$\widehat{R}_a = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in R_a\}. \tag{4}$$

Підмножини $\widehat{R}_a$, $a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)$, в свою чергу утворюють розбиття множини $X^{\{2\}}$. Безпосередньо з означень родин множин (3) і (4) випливає

Лема 2. *Підстановка $g \in S(X)$ буде ізометрією простору X тоді і лише тоді, коли вона зберігає системи відношень $\langle R_a, a \in \mathrm{Dist}(X, d_X)\rangle$ і $\langle \widehat{R}_a, a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)\rangle$.*

Доведення. $\Rightarrow$ Якщо g — ізометрія простору X, то вона зберігає відстані між точками, а, отже, будуть зберігатись системи відношень $\langle R_a, a \in \mathrm{Dist}(X, d_X)\rangle$ і $\langle \widehat{R}_a, a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)\rangle$.

$\Leftarrow$ Нехай тепер підстановка $g \in S(X)$ зберігає відношення $\langle R_a, a \in \mathrm{Dist}(X, d_X)\rangle$ і $\langle \widehat{R}_a, a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)\rangle$. Оскільки g — підстановка, то вона є біекцією на множині X. Якщо $(x, y) \in R_a$, то образ (x^g, y^g) також належить множині R_a, тобто

$$d(x, y) = d(x^g, y^g) = a.$$

А це означає, що g зберігає відстані між точками, тобто є ізометрією. $\square$

Якщо група підстановок (G, X) є метрично реалізовною, то існує метричний простір (Y, d) такий, що (G, X) ізоморфна $(\mathrm{Isom}(Y, d), Y)$ як група підстановок. Це означає, що існує біекція $f : Y \to X$ така, що ввівши на множині X метрику d' рівністю

$$d'(x_1, x_2) = d(f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in X,$$

дістанемо метричний простір (X, d'), для якого має місце рівність

$$\mathrm{Isom}(X, d') = (G, X).$$

Іншими словами, кожна метрично реалізовна група підстановок може бути реалізована як група ізометрій певного метричного простору на своїй основній множині.

Теорема 1. *Для групи підстановок (G, X) наступні вимоги є рівносильними:*

i) (G, X) *є* 2^**-замкненою;*

ii) (G, X) *реалізується як група автоморфізмів повного кольорового графа;*

iii) (G, X) *є метрично реалізовною.*

Доведення. Пересвідчимося, що правильними є імплікації $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$.

$i) \Rightarrow ii)$ Якщо (G, X) є 2^*-замкненою, то G збігається з групою автоморфізмів родини своїх симетризованих орбіталів $\mathrm{Orb}_2^*(G, X)$. Симетризовані орбітали утворюють розбиття множини $X^{\{2\}}$, яка є множиною ребер повного графа з множиною вершин X. Отже, родина симетризованих орбіталів $\mathrm{Orb}_2^*(G, X)$ задає на X повний реберно-кольоровий граф, а (G, X) є групою автоморфізмів цього графа.

$ii) \Rightarrow iii)$ Нехай (G, X) є групою автоморфізмів повного реберно-кольорового, розфарбованого у k кольрів графа Γ, заданого на множині X. Тоді множина ребер $X^{\{2\}}$ розбивається на k підмножин R_1, R_2, ..., R_k. Задамо на множині X функцію d двох змінних, поклавши для довільних $x, y \in X$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y, \\ k + i, & \text{якщо } \{x, y\} \in R_i, 1 \leq i \leq k. \end{cases} \tag{5}$$

Зрозуміло, що d є додатно визначеною і симетричною. Крім того, оскільки для довільних $x, y \in X$ виконується оцінка $k \leq d(x, y) \leq 2k$, то нерівність трикутника виконується при довільному виборі точок $x, y, z \in X$. Таким чином відношення R_1, R_2, ..., R_k визначають метрику d і за лемою 2 отримуємо

$$\mathrm{Isom}(X, d) = \mathrm{Aut}\langle R_1, \dots, R_k\rangle = Aut\Gamma.$$

$iii) \Rightarrow i)$ Нехай (X, d) — метричний простір, $\langle \widehat{R}_a, a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)\rangle$ — розбиття множини $X^{\{2\}}$, яке визначається метрикою d. Якщо $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \in X^{\{2\}}$ містяться в одній орбіті групи $\mathrm{Isom}X$, то $d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2)$, тобто при деякому $b \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)$ маємо $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\} \in \widehat{R}_b$. Це означає, що розбиття $\mathrm{Orb}_2^*(\mathrm{Isom}X, X)$ множини $X^{\{2\}}$ є подрібненням розбиття, що визначається метрикою d. А тому, підгрупа симетричної групи $S(X)$, яка складається з усіх підстановок, що зберігають кожну підмножину із розбиття $\mathrm{Orb}_2^*(\mathrm{Isom}X, X)$, міститься в підгрупі всіх підстановок із $S(X)$, які зберігають кожну з підмножин $\widehat{R}_a$, $a \in \mathrm{Dist}^*(X, d_X)$. За лемою 2 остання рівна $\mathrm{Isom}X$. Таким чином, група підстановок $(\mathrm{Isom}X, X)$ є 2^*-замкненою. □

4 Реалізовність регулярних груп у вигляді груп ізометрій метричних просторів

Кожна регулярна група підстановок ізоморфна своєму лівому або правому регулярному зображенню, коли група діє на множині своїх елементів лівими або правими зсувами. А саме, елемент $g \in G$ діє як підстановка $x \to xg$, $x \in G$, для правих зсувів і як підстановка $x \to g^{-1}x$, $x \in G$ — для лівих. У випадку абелевих груп ліве і праве регулярні зображення групи рівні, а транзитивна абелева група підстановок є регулярною.

Орбітали групи G, яка діє на множині своїх елементів правими зсувами, описуються таким чином. Для довільного елемента $a \in G$ покладемо

$$Q_a = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} = a\}. \tag{6}$$

Зокрема, $Q_e = D_G$ — діагональ прямого добутку $G \times G$.

Лема 3. *Нехай регулярна група G діє на множині своїх елементів правими зсувами. Кожен орбітал G при такій дії рівний для певного елемента $a \in G$ множині Q_a, що визначена рівністю* (6) *і містить $|G|$ елементів.*

Доведення. Фіксуємо деякий елемент $a \in G$. Пересвідчимося, що множина Q_a є інваріантною відносно правих зсувів. Справді, якщо $(x, y) \in Q_a$, а $\gamma_g : z \to zg$, $z \in G$, — правий зсув на елемент $g \in G$, то

$$(x, y)^{\gamma_g} = (xg, yg),$$

а через те, що

$$(xg) \cdot (yg)^{-1} = xgg^{-1}y^{-1} = xy^{-1} = a,$$

отримаємо $(x, y)^{\gamma_g} \in Q_a$.

Нехай тепер $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Q_a$. Тобто $x_1y_1^{-1} = x_2y_2^{-1} = a$. Розглянемо правий зсув $\gamma_{x_1^{-1}x_2}$, тоді

$$x_1^{\gamma_{x_1^{-1}x_2}} = x_1x_1^{-1}x_2;$$

$$y_1^{\gamma_{x_1^{-1}x_2}} = y_1x_1^{-1}x_2 = a^{-1}x_2 = y_2x_2^{-1}x_2 = y_2.$$

Отже (x_1, y_1) і (x_2, y_2) належать одному орбіталу групи G. Таким чином Q_a є орбіталом. Оскільки індукована дія групи G на кожному орбіталі є регулярною, то $|Q_a| = |G|$. $\square$

Лема 4. *Симетризація відношення Q_a, $a \in G$, рівна відношенню*

$$\hat{Q}_a = \{(x, y) \in G \times G \mid xy^{-1} \in \{a, a^{-1}\}\}. \tag{7}$$

Зокрема, відношення Q_a буде симетричним тоді і тільки тоді, коли $a^2 = e$.

Доведення. За означенням орбітала Q_a маємо $Q_a^{-1} = Q_{a^{-1}}$. А тому симетризація відношення Q_a дорівнює відношенню $Q_a \cup Q_{a^{-1}} = \hat{Q}_a$. Рівність $Q_a = Q_{a^{-1}}$ виконується тоді й лише тоді, коли $a = a^{-1}$, тобто a є елементом другого порядку. $\square$

Нагадаємо, що графом Келі групи G, в якій виділено систему твірних H, називається розфарбований орієнтовний граф $C_H(G)$, визначений таким чином. Множиною вершин $C_H(G)$ є множина елементів G. Вершини $g_1, g_2 \in G$ з'єднані дугою кольору h, $h \in H$, в напрямку від g_1 до g_2, якщо $g_1 \cdot h = g_2$. З означення графа Келі випливає, що для довільної групи G і її системи твірних H має місце співвідношення

$$\mathrm{Aut} C_H(G) \simeq G.$$

Лема 5. *Кожна регулярна група підстановок, яка має множину твірних, що складається з k елементів, може бути реалізована як група всіх автоморфізмів повного орієнтованого графа, дуги якого розфарбовано $k+1$ кольором. Зокрема, кожна регулярна група підстановок є 2-замкненою.*

Доведення. Нехай H — k-елементна система твірних групи G. Кольоровий граф $C_H(G)$ можна доповнити до повного орієнтованого кольорового графу, з'єднуючи дугою кожну пару g_1, g_2 тих його вершин, які в $C_H(G)$ не були з'єднані, і фарбуючи всі такі дуги новим, додатковим кольором. Отримаємо повний реберно-кольоровий орієнтовний

граф, група автоморфізмів якого ізоморфна групі G, яка діє на множині його вершин регулярно. За побудовою, дуги таким чином визначеного повного графа розфарбовано в $k+1$ колір. $\square$

Приклад 1. *При довільному натуральному* n *симетрична група* S_n *і знакозмінна група* A_n *можуть бути породжені двома підстановками* [10]. *Отже, регулярне зображення* S_n *і регулярне зображення* A_n *(групи підстановок степенів* $n!$ *і* $\frac{n!}{2}$ *відповідно) реалізуються як групи автоморфізмів повних кольорових орграфів з* $n!$ *чи, відповідно,* $\frac{n!}{2}$ *вершинами, дуги яких розфарбовано трьома кольорами.*

Лема 6. *Нехай група* G *має такий автоморфізм* $f : G \to G$, *що для довільного* $x \in G$ *маємо* $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$. *Тоді розширення* G' *за допомогою автоморфізму* f *дії групи* G *на собі правими зсувами має ті ж симетризовані орбітали, що й група* G.

Доведення. Зрозуміло, що симетризовані орбітали групи G' не менші (в сенсі теоретико множинного включення) ніж орбітали групи G. З іншого боку, образ $f(\hat{Q}_a)$ складається з пар $(f(x), f(y))$, $(x, y) \in \hat{Q}_a$. Оскільки

$$f(x) \cdot f(y^{-1}) = f(x \cdot y^{-1}) \in \{f(a), f(a^{-1})\} = \{a, a^{-1}\},$$

то $f(\hat{Q}_a) = \hat{Q}_a$. А тому для довільного елемента $g \in G'$ має місце рівність $g(\hat{Q}_a) = \hat{Q}_a$, тобто симетризовані орбітали при переході до групи G' не склеюються. □

Лема 7. *Нехай* G *— абелева група, яка діє на множині своїх елементів правими зсувами. Група підстановок* (G, G) *є* 2^**-замкненою тоді і лише тоді, коли* G *— елементарна абелева* 2*-група.*

Доведення. $(\Leftarrow)$ Якщо G є елементарною абелевою 2-групою, то для довільного елемента $g \in G$ маємо $g^2 = e$, звідки $\hat{Q}_g = Q_g$. Отже, кожен орбітал такої групи збігається зі своєю симетризацією, а тому 2-замикання групи G дорівнює її 2^*-замиканню. Оскільки G є 2-замкненою, то вона буде також і 2^*-замкненою.

$(\Rightarrow)$ Нехай дія групи G на собі правими зсувами є 2^*-замкненою. Оскільки G — абелева, то відображення $f : G \to G$ таке, що $f(x) = x^{-1}$ для довільного елемента $x \in G$, є автоморфізмом G. За лемою 6 розширення G' групи G за допомогою автоморфізму f має ті ж симетризовані орбітали, що й група G при дії на множині її елементів. Тому для 2^*-замкненості G необхідно, щоб $G = G'$, тобто автоморфізм f був тотожним відображенням. А це має місце лише тоді, коли G є елементарною абелевою 2-групою. □

Нагадаємо, що діциклічною групою Dic_n називається неабелева група порядку $4n$, яка є розширенням циклічної групи порядку 2 за допомогою циклічної групи порядку $2n$. Ця група може бути задана твірними і визначальними співвідношеннями таким чином

$$Dic_n = \langle a, x \mid a^{2n} = 1,\ x^2 = 1,\ x^{-1}ax = a^{-1} \rangle.$$

Вона може бути реалізована як підгрупа мультиплікативної групи тіла кватерніонів, породжена двома кватерніонами: $a = \cos\frac{\pi}{n} + i \sin\frac{\pi}{n}$, $x = j$.

Якщо $n = 2^k$, $k > 1$, то діциклічна група Dic_n називається узагальненою групою кватерніонів, а при $n = 2$ вона є групою кватерніонів порядку 8.

Широким узагальненням класу діциклічних груп є т.зв. узагальнені діциклічні групи. Нехай A — довільна абелева група, яка має елементи порядку 2. Зафіксуємо елемент $x \in A$, який має порядок 2. Узагальненою діциклічною групою називається розширення G циклічної групи порядку 2 за допомогою групи A таке, що G породжується підрупою A і елементом y, для яких виконуються співвідношення:

$$[G : A] = 2,\ y^2 = x,\ y^{-1}ay = a^{-1} \text{ для довільного } a \in A.$$

Так сконструйована група G позначається символом $Dic(A, x)$.

Основна властивість узагальнених діциклічних груп в контексті нашого дослідження була сформульована в праці М. Уоткінса [7].

Лема 8 ([7], теорема 2)**.** *Для групи G наступні твердження рівносильні:*

i) G є узагальненою діциклічною групою;

ii) G є неабелевою групою, в якій існує нетотожній автоморфізм $f \in \mathrm{Aut}G$ такий, що $f(g) = g^{\pm 1}$ для довільного елемента $g \in G$.

В праці Л. Бабаі [14] було встановлено, що автоморфізм f можна замінити на довільну підстановку з такою ж властивістю.

Лема 9 ([14], теорема 2)**.** *Для групи G наступні твердження еквівалентні:*

i) існує нетотожній автоморфізм $f \in \mathrm{Aut}G$ такий, що $f(g) = g^{\pm 1}$ для довільного елемента $g \in G$;

ii) існує група підстановок H, яка діє на множині елементів групи G і містить праве регулярне зображення G така, що для довільної підстановки f зі стабілізатора одиничного елемента G в групі H рівність $f(g) = g^{\pm 1}$ виконується для всіх елементів $g \in G$.

Використовуючи сформульовані допоміжні твердження доведемо таку теорему.

Теорема 2. *i) Абелева група, яка діє регулярно, є метрично реалізовною тоді і лише тоді, коли вона є елементарною абелевою.*

ii) Неабелева регулярна група підстановок є метрично реалізовною в тому і лише в тому разі, коли вона не ізоморфна жодній узагальненій діциклічній групі.

Доведення. *i)* За лемою 7 група є 2^*-замкненою регулярною абелевою групою підстановок тоді і тільки тоді, коли вона є елементарною абелевою 2-групою. Залишається застосувати теорему 1.

ii) Нехай G — неабелева регулярна група підстановок. Якщо група G не є 2^*-замкненою, то існує підстановка $f \in S(G)$, яка зберігає всі симетризовані орбітали (лема 6). Це можливо тоді і лише тоді, коли

1) f належить до стабілізатора одиничного елемента групи G в $S(G)$;

2) для довільного елемента $x \in G$ виконується одна з рівностей $f(x) = x^{\pm 1}$.

За лемою 9 звідси випливає, що існує автоморфізм f' групи G такий, що для довільного елемента $x \in G$ маємо $f'(x) = x^{\pm 1}$, а за лемою 8 звідси дістаємо, що G — узагальнена діциклічна група.

З іншого боку, якщо G — узагальнена діциклічна група, то існує автоморфізм $f \in \mathrm{Aut}G$ такий, що $f(x) = x^{\pm 1}$, $x \in G$, і розширюючи згідно з лемою 6 групу G за допомогою цього автоморфізму, отримаємо більшу групу G', яка має на множині G ті ж самі симетризовані орбітали, що й група G. Теорему повністю доведено. $\square$

Зазначимо, що в наших тезах [15] у формулюванні другої з теорем було пропущено слово ббабелевих". Правильне формулювання цього твердження відповідає пункту i) теореми 2. З теорем 1 і 2 випливає також, що у повідомлені [16] при характеризації груп автоморфізмів повних (неорієнтовних) кольорових графів Келі регулярних груп підстановок було пропущено випадок узагальнених діциклічних груп. Згідно з нашою теоремою 1, правильне формулювання теореми 1 із [16] відповідає пункту ii) нашої теореми 2.

Якщо G є групою ізометрій метричного простору (X, d), причому дія G на X є транзитивною, то набір відстаней від заданої точки простору до інших його точок не залежить від вибору точки. Отже, $\mathrm{Dist}(X, d_X)$ для простору з транзитивною групою ізометрій є не більше ніж n-елементною множиною.

Теорема 3. *Нехай група G містить k інволюцій і реалізується як регулярна група ізометрій метричного простору (X, d_X). Тоді*

$$|\mathrm{Dist}^*(X, d_X)| \leq \frac{|G| + k - 1}{2}. \tag{8}$$

Доведення. Кількість орбіталів групи G при регулярній дії за лемою 3 дорівнює $|G|$. При симетризації орбіталів ті з них, що відповідають елементам порядку > 2 за лемою 4 склеюються попарно, а орбіталі, які відповідають інволюціям є симетричними відношеннями. А тому кількість симетричних орбіталів групи G дорівнює $k+1$, а несиметричних відповідно $|G|-k-1$. При симетризації орбіталі дають $\frac{1}{2}(|G|-k-1)$ симетризованих орбіталів. А тому загальна кількість симетризованих орбіталів групи G при регулярній дії дорівнює

$$\frac{1}{2}(|G| - k - 1) + k + 1 = \frac{|G| + k + 1}{2}.$$

Оскільки число ненульових значень метрики d дорівнює кількості симетризованих орбіталів і $|\mathrm{Dist}^*(X, d_X)| = |\mathrm{Dist}(X, d_X)| - 1$, отримуємо потрібну нерівність (8). $\square$

Зауважимо, що оцінка (8) досягається. Зокрема, для групи C_2 в нерівності (8) отримуємо рівність.

5 Мінімальні зображення регулярних груп ізометріями метричних просторів

Означення 3. *Зображення групи G в якості регулярної групи ізометрій метричного простору (X, d) назвемо мінімальним, якщо $G \simeq \mathrm{Isom}(X, d)$, причому кількість значень метрики d є мінімальною можливою для того, щоб таке співвідношення виконувалось.*

В більшості випадків оцінка, наведена в теоремі 3, є далекою від точної. Використовуючи відомі результати з теорії графів, кількість значень метрики при мінімальних зображеннях можна уточнити. Для цього скористаємося таким твердженням Ґ.Д. Ґодсіла [2].

Теорема 4 ([2]). *Регулярна група підстановок зображується як група автоморфізмів простого (неорієнтованого) графа тоді й лише тоді, коли:*

1) *вона є елементарною абелевою 2-групою, крім груп $C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$;*

2) *вона є неабелевою групою, яка відмінна від узагальненої діциклічної групи і не належить до груп з нижче наведеного списку з 10 груп*

   - *діедральні групи D_3, D_4, D_5;*
   - *знакозмінна група A_4;*
   - *$Q \times C_3$, $Q \times C_4$, де Q — група кватерніонів порядку 8;*
   - *$\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, abc = bca = cab\rangle$;*
   - *$\langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^5\rangle$;*
   - *$\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^2 = 1, ab = ba, (ac)^2 = (bc)^2 = 1\rangle$;*
   - *$\langle a, b, c \mid a^3 = b^2 = c^3 = 1, ac = ca, bc = cb, b^{-1}ab = ac\rangle$.*

Кожен простий граф Γ можна розглядати як повний неорієнтований граф з тією ж множиною вершин, ребра якого розфарбовані в два кольори. А тому групи підстановок, що реалізуються як групи автоморфізмів простих графів, — це ті і лише ті групи, які реалізуються як групи ізометрій метричних просторів, метрика в яких набуває лише трьох значень. З теореми 4 випливає, що для визначення числа значень метрики мінімальних метричних зображень всіх інших регулярних

груп потрібно дослідити мінімальні зображення 13 груп із теореми 4. Як сказано в [17] це було зроблено польським математиком М. Слівінським (неопубліковано). Він встановив, що група $C_2^4 = C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$ реалізується як група автоморфізмів повного графа, ребра якого пофарбовано 4 кольорами, а всі інші групи з наведеного списку реалізуються як групи автоморфізмів реберно 3-кольорових неорієнтовних повних графів. Отже, C_2^4 реалізується як група ізометрій метричного простору, метрика в якому може набувати не більше ніж 5 значень, а всі інші групи із списку теореми 4 — як групи ізометрій метричних просторів, метрика в яких набуває не більше ніж 4 значення. Підсумовуючи, отримаємо таке твердження

Теорема 5. *Нехай регулярна група G зображується як група ізометрій метричного простору. Мінімальне метричне зображення цієї групи є групою ізометрій метричного простору, метрика в якому набуває*

- 2 *значення, якщо $G = C_2$,*
- 4 *значення, якщо група G належить до списку теореми* 4, *але відмінна від C_2^4;*
- 5 *значень, коли $G = C_2^4$;*
- 3 *значення в усіх інших випадках.*

[1] *Babai L.* On a conjecture of M.E. Watkins on graphical regular representations of finite groups // Compositio Math. — 1978. — **37**. — P. 291–296.

[2] *Godsil C.D.* GRR's for non-solvable groups // Algebraic methods in graph theory, Conf. Szeged 1978, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 25. — 1981. — **I**. — P. 221–239.

[3] *Imrich W., Watkins M.E.* On graphical representations of cyclic extensions of groups // Pacific J. Math. — 1974. — **55**. — P. 461–477.

[4] *Nowitz L.A.* On the non-existence of graphs with transitive generalized dicyclic groups // J. Comb. Theory. — 1967. — **4**. — P. 49–51.

[5] *Nowitz L.A., Watkins M.E.* Graphical regular representations of non-abelian groups. I. // Can. J. Math. — 1972. — **24**. — P. 993–1008.

[6] *Nowitz L.A., Watkins M.E.* Graphical regular representations of non-abelian groups. II. // Can. J. Math. — 1972. — **24**. — P. 1009–1018.

[7] *Watkins M.E.* On the action of non-Abelian groups on graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. — 1971. — **11**. — P. 95–104.

[8] *Biggs N.* Algebraic graph theory. 2nd ed. — Cambridge Univ. Press, 1994. — 176 p.

[9] *Deza M.M., Laurent M.* Geometry of cuts and metrics. — Berlin: Springer, 1997. — 587 p.

[10] *Сущанський В.І., Сікора В.С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. — Чернівці: Рута, 2003. — 255 с.

[11] *Wielandt H.* Finite permutation groups. — New York and London: Academic Press, 1964. — 122 p.

[12] *Wielandt H.* Permutation groups through invariant relations and invariant functions. — Ohio State University, 1969.

[13] *Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.* On the 2-closures of finite permutation groups // J. London Math. Soc., II. Ser. — 1988. — **37**, № 2. — P. 241–252.

[14] *Babai L.* Symmetry groups of vertex-transitive polytopes // Geom. Dedicata. — 1977. — **6**. — P. 331–337.

[15] *Oliynyk B.* On realizability of permutation groups as isometry groups // Ukrainian Mathematical Congress. Abstract. — 2009.

[16] *Ганюшкін О. Г., Сущанський В. І.* Скінченні метричні простори з широким спектром значень метрики // Доповіді НАН України. — 1995. — № 11. — С. 5–7.

[17] *Grech M.* Regular symmetric groups of Boolean functions // Discrete Math. — 2010. — **310**, № 21. — P. 2877–2882.

METRIC REALIZATION OF REGULAR PERMUTATION GROUPS

Bogdana OLIYNYK

National University of “Kyiv-Mohyla Academy”,
2 Skovorody Str., Kyiv 01601, Ukraine

e-mail: *bogd@ukma.kiev.ua*

Metric realization of finite permutation groups is investigated. It is obtained complete characterization of the regular finite permutation groups, which are realized as isometry groups of metric spaces. It is shown that the minimum metric representation of each of such groups is the isometry group of a metric space, in which metric takes 2, 3, 4 or 5 different values.