

Міністерство освіти та науки України  
Національний університет “Києво-Могилянська академія”  
Факультет природничих наук  
Кафедра фізико-математичних наук

**Магістерська робота**  
освітній ступень - магістр

**на тему: «ІНТЕГРОВАНА МОДЕЛЬ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ  
ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТУ ТРИРІВНЕВОГО АТОМА»**

Виконав студент 2 року навчання  
спеціальності

104 Фізика та астрономія

Горбиць Вадим Валерійович

Керівник Бернацька Ю. М.

кандидат фізико-математичних наук,

доцент

Рецензент Іоргов М. З.

(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена

з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

Київ – 2020

# ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> . . . . .	4
1 <b>Мета</b> . . . . .	4
2 <b>Актуальність задачі</b> . . . . .	4
<b>Розділ 1 Огляд літератури</b> . . . . .	6
1.1 <b>Початкова модель Джейнса-Каммінгса</b> . . . . .	6
1.2 <b>Розширені варіанти моделі Джейнса-Каммінгса</b> . . . . .	6
1.2.1 <b>Часозалежна модель Джейнса-Каммінгса</b> . . . . .	6
1.2.2 <b>Моделі Джейнса-Каммінгса з квантованим рухом</b> . . . . .	8
1.2.3 <b>Багаторівневі варіанти моделі Джейнса-Каммінгса</b> . . . . .	10
1.2.3.1 <b>Дворівневий атом з двома ідентичними модами</b> . . . . .	10
1.2.3.2 <b>Два ідентичні дворівневі атоми у одномодовому полі</b> . . . . .	10
<b>Розділ 2 Трирівнева модель взаємодії атома з електромагнітним полем</b> . . . . .	12
2.1 <b>Постановка задачі</b> . . . . .	12
2.2 <b>Трирівнева модель</b> . . . . .	14
2.3 <b>Зв'язок з алгеброю <math>\mathfrak{sl}(3)</math></b> . . . . .	16
2.3.1 <b><math>\Lambda</math>-конфігурація</b> . . . . .	19
2.3.1.1 <b>Гамільтоніан та рівняння руху в <math>\Lambda</math>-конфігурації</b> . . . . .	20
2.3.2 <b><math>V</math>-конфігурація</b> . . . . .	21
2.3.2.1 <b>Гамільтоніан та рівняння руху у <math>V</math>-конфігурації</b> . . . . .	23
2.3.3 <b><math>\Xi</math>-конфігурація</b> . . . . .	23
2.3.3.1 <b>Гамільтоніан та рівняння руху у <math>\Xi</math>-конфігурації</b> . . . . .	24
2.3.4 <b>Загальний гамільтоніан</b> . . . . .	25
2.4 <b>Усереднення і перехід до класичної моделі</b> . . . . .	27

2.4.1	Чисельний розв'язок $\Lambda$ -моделі . . . . .	27
2.4.1.1	Збудження з одним електроном і одним фотоном	27
2.4.1.2	Збудження двох мод з одним електроном . . . . .	30
2.4.2	Побудова інтегрованої моделі в $\Lambda$ -конфігурації . . . . .	38
2.5	Результати . . . . .	43
2.6	Висновки . . . . .	43
<b>Бібліографія . . . . .</b>		<b>45</b>

# ВСТУП

## 1 Мета

Метою даної роботи є вивчення моделі взаємодії трирівневого атома із двома модами електромагнітного поля, що базується на усередненні рівнянь Гейзенберга у стандартній квантовомеханічній моделі, і подальша побудова інтегрованої динамічної моделі, що еволюціонує згідно таких самих рівнянь.

Після опису квантовомеханічної моделі взаємодії трирівневого атома із двомодовим електромагнітним полем та здійсненням його усереднення, вивчимо розв'язки динамічної моделі, отриманої усередненням. Розв'язки знайдемо чисельно для рівнянь руху, отриманих усередненням рівнянь Гейзенберга. Таким чином здійснимо перевірку відповідності знайдених рівнянь до реальної фізичної картини. Це дає підставу покласти рівняння в основу побудови інтегрованої моделі.

## 2 Актуальність задачі

Моделі, що описують зв'язок псевдо-спінових та бозонних динамічних об'єктів дуже розповсюджені у фізиці з двох причин:

- вони достатньо точно охоплюють важливі компоненти досліджуваних фізичних систем;
- вони дозволяють отримати еволюцію фізичної системи у вигляді системи диференціальних рівнянь, що в більшості випадків досить просто вирішується чисельно, а в деколи навіть можна отримати аналітичні розв'язки. Це полегшує моделювання фізичних процесів.

Список напрямлень експериментальних робіт, в яких задіяні такі моделі, включає у себе: фізика твердих речовин, ядерно-магнітний резонанс, спі-

ймані йони, конденсати Бозе-Ейнштейна, квантова оптика, атомна оптика та квантова електродинаміка резонаторів[1]. Найпростіший приклад експериментального застосування таких моделей – атом у резонаторі з одно-модовим полем, частота якого підібрана так, що активний лише один перехід між двома рівнями, тоді ефективна модель відповідає взаємодії дворівневої частинки з гармонічним осцилятором. Якщо можна знехтувати рухом атома та застосувати наближення хвилі що обертається, то еволюція описується аналітично інтегрованою моделлю Джейнса-Каммінгса[2]. На основі цієї моделі пророблено багато теоретичної та експериментальної роботи. Зокрема були зроблені такі передбачення: затухання-відновлення[3], атомне розходження[4–7], зтискання поля[8–10], неруйнуючі виміри[11, 12], відновлення стану[13, 14], однофотонні стани Фока[15], суперпозиції когерентних станів з великою амплітудою[16, 17], декогерентність[18, 19]. Серед цих передбачень чимало підтвердилися експериментально. Крім цього подібні моделі можуть застосовуватися у квантовій інформатиці при моделюванні поведінки кубітів[20].

## Розділ 1

### Огляд літератури

#### 1.1 Початкова модель Джейнса-Каммінгса

Джейнс та Каммінгс у своїй статті [2] досліджували атом, що може перебувати тільки у двох станах та знаходиться в одномодовому полі фотонів. Вони переслідували дві мети: 1. Прояснити взаємозв'язок між квантовою теорією випромінення (в якій електромагнітне поле описується операторами) та напівкласичною теорією (в якій електромагнітне поле вважається визначеною функцією від часу). Вони встановили, що можна додати взаємодію поля на молекулу та молекули на поле у напівкласичну теорію та отримати закономірності обміну енергії між молекулою та полем і когерентні властивості майже такі самі як і в квантовій теорії. Зокрема показано, що напівкласична теорія передбачає спонтанне випромінення з таким самим коефіцієнтом розпаду як і в квантовій електродинаміці. 2. Напівкласична теорія застосована до мазера у випадку довільного розподілу швидкостей молекул. Виявилось, що вимірювані параметри мазера залежать лише від 5-10% найповільніших молекул. Крім цього вони вираховували теоретичний вплив амплітуди та частоти малих збурень на мазер.

#### 1.2 Розширені варіанти моделі Джейнса-Каммінгса

Різноманітні розширені варіанти моделі Джейнса-Каммінгса використовуються у резонансній квантовій електродинаміці [1]. Найпоширеніші варіанти: багаторівнева модель Дж-К, часозалежна модель Дж-К, та модель Дж-К з квантованим рухом.

##### 1.2.1 Часозалежна модель Джейнса-Каммінгса

В початковій моделі Джейнса-Каммінгса атом вважався замкнутим на одному місці впродовж взаємодії, тому не вводили параметрів залежних від часу, еволюція отримувалася у вигляді

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\Psi(t=0)\rangle \quad (1.1)$$

Для врахування такого руху до Гамільтоніану додають доданок атомарного руху разом з варіаціями деяких мод поля. Але в багатьох випадках можна замінити оператор імпульсу на класичний імпульс  $p=mv$  та позицію на  $x=vt$ , де  $mv = p_0 = \langle p \rangle_{t=0}$ . Оскільки кінетична енергія замінюється середнім значенням, то  $p$  з невеликою похибкою буде константою руху, або зміна  $p$  буде невеликою у порівнянні зі енергією процесу взаємодії. Якщо  $dp/dt \ll p/T$ , для деякого часу  $T$ , достатньо мала, то можна вважати процес досить адіабатичним. Переходячи до наближення хвилі що обертається  $\exp(-ip_0^2/2m) \exp(ip_0^2/2m)$ , рівняння Шрьодінгера для моделі ДК набуває вигляду

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (1.2)$$

для деякої моди збудження отримуємо  $2 \times 2$  блок

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} a_+(n,t) \\ a_-(n,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta/2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & -\Delta/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_+(n,t) \\ a_-(n,t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

де  $\Delta$  та  $g$  можуть залежати від часу. Незважаючи на простий вигляд рівняння (1.3) рідко вирішується аналітично. Зазвичай знаходять асимптотичні рішення для  $t \rightarrow \infty$  при деякого відомого початкового стану системи. Найчастіше обирають прості початкові стани вигляду  $|a_-^0(n)\rangle = 1$ . Розв'язок може бути представлений у вигляді матриці розсіювання що з'єднує початковий та кінцевий стани.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} a_+^\infty(n,t) \\ a_-^\infty(n,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_n} & e^{-i\phi_n} \sqrt{1-\omega_n} \\ -e^{i\phi_n} \sqrt{1-\omega_n} & \sqrt{\omega_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_+^0(n,t) \\ a_-^0(n,t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

У Табл. 1.1 представлені деякі розв'язані моделі та вигляд залежності їх параметрів від часу.

Модель	$\Delta(t)/2$	$g(t)\sqrt{n}$
Нульовий детюнінг[21]	$\Delta(t)/2 \equiv 0$	будь-яке $g(t)$
Landau-Zener[22, 23]	$\Delta_0 t$	$g_0 \sqrt{n}$
Rozen-Zener[24]	$\Delta_0$	$g_0 \sqrt{n} \operatorname{sech}(t/T)$
Demkov-Kunike 1[25]	$\bar{E} + E_0 \tanh(t/T)$	$g_0 \sqrt{n}$
Demkov-Kunike 2[25]	$\bar{E} + E_0 \tanh(t/T)$	$g_0 \sqrt{n} \operatorname{sech}(t/T)$

Табл. 1.1: Вигляд часозалежних параметрів для деяких розрахованих  $2 \times 2$  моделей.

### 1.2.2 Моделі Джейнса-Каммінгса з квантованим рухом

У більшості експериментів кінетична енергія атома набагато більша за енергію взаємодії, можна використати напівкласичний підхід, кінетична енергія відкидається та позиція атома вважається часозалежною. Але завдяки лазерному охолодженню можливі експерименти з надхолодними атомами з температурами близько 1 мкК. Такі енергії руху атомів досить близькі до енергій взаємодії, їх не можна викидати з Гамільтоніану. Рівняння Шрьодінгера для набору квантових чисел  $\Sigma$

$$\left\{ p^2 + \begin{bmatrix} \Delta/2 & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & -\Delta/2 \end{bmatrix} \right\} |\phi_\Sigma\rangle = E_\Sigma |\phi_\Sigma\rangle \quad (1.5)$$

Коли атом проходить через резонатор перпендикулярно до повздовжньої моди Фабрі-Перо резонатора параметр взаємодії має вигляд Гауссіану. Такий



розподіл ускладнює аналітичний розв'язок задачі, тому підбирають спрощені варіанти розподілу  $g(x)$ . Якщо представити стан атома і поля у вигляді  $\{|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n-1,+\rangle \pm |n,-\rangle)\}$  задача зводиться до задачі розсіяння частинки на потенціальній ямі або бар'єрі.  $|\psi_{+}\rangle$  відчуває бар'єр,  $|\psi_{-}\rangle$  відчуває яму. Маємо чотири амплітуди розсіяння для поєднаного стану: відбиття збудженого атома  $R_{n-1,+}$ , відбиття незбудженого атома  $R_{n,-}$ , та відповідні проходження  $T_{n-1,+}$ ,  $T_{n,-}$ . Вони пов'язані з амплітудами розсіяння  $\rho_n^{\pm}$  та  $\tau_n^{\pm}$

$$\begin{aligned} R_{n-1,+} &= \frac{1}{2}(\rho_n^{+} + \rho_n^{-}), \\ R_{n,-} &= \frac{1}{2}(\rho_n^{+} - \rho_n^{-}), \\ T_{n-1,+} &= \frac{1}{2}(\tau_n^{+} + \tau_n^{-}), \\ T_{n,-} &= \frac{1}{2}(\tau_n^{+} - \tau_n^{-}) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для розподілу  $g(x)$  у вигляді функції Меса

$$g(x) = \begin{cases} g_0, & x \in (0,L) \\ 0, & x \notin (0,L) \end{cases} \tag{1.7}$$

та для початкових умов при яких атом у збудженому стані розв'язок [26]

$$\begin{aligned} \rho_n^{\pm} &= i\Delta_n^{\pm} \sin(k_n^{\pm} L), \\ \tau_n^{\pm} &= [\cos(k_n^{\pm} L) - i\Sigma_n^{\pm} \sin(k_n^{\pm} L)]^{-1}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

де

$$\begin{aligned} k_n^{\pm} &= (k \mp \kappa_n^2)^{1/2}, \\ \Delta_n^{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{k_n^{\pm}}{k} - \frac{k}{k_n^{\pm}} \right), \\ \Sigma_n^{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{k_n^{\pm}}{k} + \frac{k}{k_n^{\pm}} \right), \\ \kappa_n &= \sqrt[4]{g_0^2(n+1)}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

### 1.2.3 Багаторівневі варіанти моделі Джейнса-Каммінгса

Багаторівневі варіанти моделі Джейнса-Каммінгса відрізняються від базової або більшою кількістю рівнів атома, або більшою кількістю мод поля, або комбінацією з обох.

**1.2.3.1 Дворівневий атом з двома ідентичними модами** Модель дворівневого атома з двома модами що мають ідентичні частоти та поляризацію задається Гамільтоніаном[27]

$$\hat{H}_{2m} = \frac{\Omega}{2}\sigma_z + \omega a_1^\dagger a_1 + \omega a_2^\dagger a_2 + g_1(a_1^\dagger \sigma^- + a_1 \sigma^+) + g_2(a_2^\dagger \sigma^- + a_2 \sigma^+)$$

Вводять оператори бозонів у вигляді

$$A = K_{12}(g_2 a_1 - g_1 a_2), \quad (1.10)$$

$$B = K_{12}(g_1 a_1 + g_2 a_2), \quad (1.11)$$

де  $K_{12} = (g_1^2 + g_2^2)^{-1/2}$ , після цього Гамільтоніан можна подати у вигляді

$$\hat{H}_{2m} = \frac{\Omega}{2}\sigma_z + K_{12}^{-1}(B\sigma^+ + B^\dagger\sigma^-).$$

В такому вигляді задача вирішується аналогічно до звичайної моделі Джейнса-Каммінгса, у якій одномодовий стан поля  $|n\rangle$  замінено на двомодовий  $|j\rangle = \frac{(B^\dagger)^j}{\sqrt{j!}}|0,0\rangle$ .

**1.2.3.2 Два ідентичні дворівневі атоми у одномодовому полі**  
Описується задача Гамільтоніаном

$$\hat{H}_{2a} = \Delta a^\dagger a + g[a^\dagger(\sigma_1^- + \sigma_2^-) + a(\sigma_1^+ + \sigma_2^+)]$$

де використано  $N = a^\dagger a + \frac{1}{2}\sigma_{z1} + \frac{1}{2}\sigma_{z2} = \text{const}$ , цю задачу інколи називають моделлю Тревіса-Каммінгса або моделлю Дікке[28]. Стан системи розкладається по чотирьом базовим станам

$$\{|n-1, +, -\rangle, |n, -, -\rangle, |n-1, -, +\rangle, |n-2, +, +\rangle\}$$

Гамільтоніан у матричному представленні

$$\hat{H}_{2a} = \begin{pmatrix} (n-1)\Delta & g\sqrt{n} & 0 & g\sqrt{n-2} \\ g\sqrt{n} & n\Delta & g\sqrt{n} & 0 \\ 0 & g\sqrt{n} & (n-1)\Delta & g\sqrt{n-1} \\ g\sqrt{n-2} & 0 & g\sqrt{n-1} & (n-2)\Delta \end{pmatrix}.$$

## Розділ 2

Трирівнева модель взаємодії атома з електромагнітним  
полем

## 2.1 Постановка задачі

Взаємодію сталого електромагнітного поля  $\mathbf{E}$  (завжди можна перейти до такої системи відліку, де залишається тільки електричне поле) з атомом можна описати у дипольному наближенні таки гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F - e\mathbf{r}\mathbf{E},$$

Тут  $\mathcal{H}_F$  та  $\mathcal{H}_A$  — енергії поля та атома за відсутності взаємодії. В дипольному наближенні поле вважається однорідним у всьому атомі.

Енергію вільного поля можна виразити через оператори народження і знищення мод із частотами  $\omega_{\mathbf{k}}$ :

$$\mathcal{H}_F = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}.$$

Оператори  $\mathcal{H}_A$  та  $e\mathbf{r}$  можна записати через оператори атомних переходів  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$  з рівня  $j$  на рівень  $i$ , де  $\{|i\rangle\}$  — повний набір власних енергетичних станів атома, тобто  $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ . Позначимо власні значення оператора  $\mathcal{H}_A$  через  $E_i$ , тобто  $\mathcal{H}_A|i\rangle = E_i|i\rangle$  і можемо записати

$$\mathcal{H}_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i E_i \sigma_{ii}.$$

Позначаючи через  $P_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$  матричний елемент електричного дипольного переходу, запишемо оператор  $e\mathbf{r}$ . Оператор електричного поля  $\mathbf{E}$  запишемо через оператори народження і знищення мод із частотами  $\omega_{\mathbf{k}}$ . А саме:

$$e\mathbf{r} = \sum_{i,j} P_{ij}\sigma_{ij}, \quad \mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}\dagger}),$$

де  $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}/(2\varepsilon_0V)}$ ,  $\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}\}$  — базис дійсних одиничних векторів поляризації.

Збираючи до купи усі доданки, матимемо

$$\mathcal{H} = \sum_i E_i\sigma_{ii} + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar \sum_{i \neq j} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{ij}\sigma_{ij}(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger), \quad g_{\mathbf{k}}^{ij} = -P_{ij}\mathcal{E}_{\mathbf{k}}\mathbf{e}_{\mathbf{k}}/\hbar.$$

Якщо вважати, що стала взаємодії атома із полем однакова для усіх рівнів  $g_{\mathbf{k}} = g_{\mathbf{k}}^{ij} = g_{\mathbf{k}}^{ji}$ , то останній доданок набуває вигляду

$$\hbar \sum_{i < j} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji})(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger).$$

Для кожного набору  $\sigma_{ii}$ ,  $\sigma_{jj}$ ,  $\sigma_{ji}$ ,  $\sigma_{ij}$ , де  $E_i < E_j$ , зручно використовувати позначення:

$$2\sigma_z = \sigma_{ii} - \sigma_{jj}, \quad \sigma_- = \sigma_{ij}, \quad \sigma_+ = \sigma_{ji}.$$

Оператор  $\sigma_+$  переводить атом із нижнього стану  $|i\rangle$  з енергією  $E_i$  у верхній стан  $|j\rangle$  з енергією  $E_j$ . Оскільки  $E_i < E_j$ , то  $E_i - E_j = -\Omega_{ij}\hbar$ , де  $\Omega_{ij}$  — частота переходу  $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$ . Оператори  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$ ,  $\sigma_z$  утворюють  $\mathfrak{sl}(2)$ -трійку і вони задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$[\sigma_z, \sigma_+] = 2\sigma_+, \quad [\sigma_z, \sigma_-] = -2\sigma_-, \quad [\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$$

і в матричному вигляді для дворівневого атома можуть бути реалізовані такими матрицями:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

У нових позначення гамільтоніан набуває вигляду

$$\mathcal{H} = - \sum_a \hbar \Omega_a \sigma_z^a + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar \sum_a \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\sigma_+^a + \sigma_-^a) (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger),$$

де індекс  $a$  пробігає усі атомні переходи. У виразі для гамільтоніану нехтуємо сталим доданком.

В останній сумі, що описує взаємодію електромагнітного поля з атомом, кожен доданок містить чотири члени:  $\sigma_+ \hat{a}_{\mathbf{k}}$ ,  $\sigma_- \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $\sigma_+ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $\sigma_- \hat{a}_{\mathbf{k}}$ . Член  $\sigma_+ \hat{a}_{\mathbf{k}}$  описує процес поглинання фотону моди  $\mathbf{k}$  і переведення атома з нижнього рівня  $|i\rangle$  у верхній рівень  $|j\rangle$ , член  $\sigma_- \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  описує зворотній процес переходу атома з верхнього рівня  $|j\rangle$  у нижній  $|i\rangle$  та випромінювання фотону моди  $\mathbf{k}$ . Енергія зберігається в обох випадках. Член  $\sigma_+ \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$  описує процес переходу атома у стан з більшою енергією та випромінювання фотону, що потребує збільшення енергії на  $\hbar(\Omega_a + \omega_a)$ . Аналогічно член  $\sigma_- \hat{a}_{\mathbf{k}}$  описує процес, який проходить із втратою енергії  $\hbar(\Omega_a + \omega_a)$ . Тут враховано, що частота моди поля та резонансна частота атома можуть не збігатися, тобто є розстройка. В наближеній хвилі, яка обертається (RWA), нехтують доданками, які не зберігають енергію. Наближений гамільтоніан має вигляд

$$\mathcal{H} = - \sum_a \hbar \Omega_a \sigma_z^a + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hbar \sum_a \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\sigma_+^a \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sigma_-^a \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger).$$

## 2.2 Трирівнева модель

У трирівневій моделі атома з усіх його рівнів виділяють три, які беруть участь у атомних переходах, збуджених світлом певних частот. Поставимо у відповідність цим рівням квантові стани:

- $|n_1, l_1, m_1\rangle$  або простіше  $|1\rangle$  з енергією<sup>1</sup>  $\mathcal{E}_1 = -Z^2/(2n_1^2)$ ,

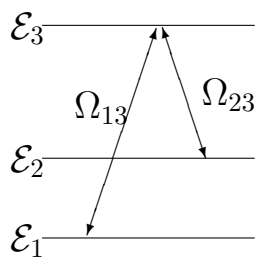
<sup>1</sup>Нагадаємо, що енергія атомного стану визначається так:  $\mathcal{E} = -Z^2/(2n^2)$ , де через  $Z$  позначено заряд атома, а  $n$  — головне квантове число, яке набуває значень  $1, 2, \dots$ , тобто  $\mathcal{E} = -Z^2/2$  є енергією першого най-

- $|n_2, l_2, m_2\rangle$  або  $|2\rangle$  з енергією  $\mathcal{E}_2 = -Z^2/(2n_2^2)$ ,
- $|n_3, l_3, m_3\rangle$  або  $|3\rangle$  з енергією  $\mathcal{E}_3 = -Z^2/(2n_3^2)$ ,

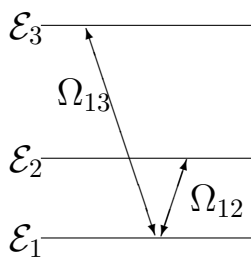
які є власними для атомного гамільтоніана  $\mathcal{H}_A$ . Надалі будемо вважати, що  $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3$ .

Модель Джейнса—Каммінгса працює з дипольним наближенням взаємодії атома з електромагнітним полем. Як показує обчислення матричних елементів оператора електричного дипольного моменту, у дипольній взаємодії беруть участь лише ті пари станів, для яких орбітальні квантові числа відрізняються на одиницю. Серед набору з трьох рівнів можна знайти не більше двох пар таких станів. Тоді третя пара рівнів буде мати або однакові орбітальні числа, або їх орбітальні числа відрізнятимуться на 2. Якщо орбітальні квантові числа рівні, то ... Між парою рівнів, які мають різницю в орбітальних квантових числах рівну 2, можуть реалізуватись квадрупольні переходи, інтенсивність яких ... менша за інтенсивність дипольних переходів. Тому у моделях типу Джейнса—Каммінгса такі переходи не розглядають — просто «забороняють» таке випромінювання.

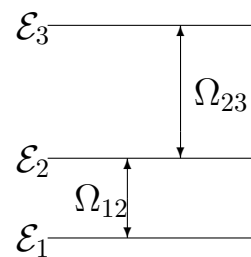
Будемо розглядати таку комбінацію трьох атомних рівнів, серед яких дві пари зв'язані дипольними переходами. В залежності від того, як співвідносяться енергії цих рівнів, можливі три схеми процесів випромінювання-поглинання: їх називають  $\Lambda$ ,  $V$  та  $\Xi$ -конфігураціями:



$\Lambda$ -конфігурація



$V$ -конфігурація



$\Xi$ -конфігурація

нижчого рівня. Наведена формула дає енергію в атомних одиницях енергії  $\epsilon_a = e^2/a = \mu e^4/\hbar^2 \approx 27,21$  еВ, де  $e$  — заряд електрона,  $\mu$  — зведена маса системи ядро—електрон. Тоді реальне значення енергії становить  $\mathcal{E}\epsilon_a$ .

На схемах переходів позначені лише дипольні атомні переходи та вказано частоти переходів:  $\hbar\Omega_{12} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ ,  $\hbar\Omega_{13} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1$ ,  $\hbar\Omega_{23} = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$ .

Найкраще вивчена  $\Lambda$ -конфігурація [29–34].

Для опису процесів випромінювання та поглинання фотонів будемо використовувати оператори народження  $\hat{a}_k^\dagger$  та знищення  $\hat{a}_k$  фотона з частотою  $\omega_k$ , тобто  $k$ -ї моди електромагнітного поля; вони задовольняють стандартні комутаційні співвідношення

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{km}, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_m] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] = 0.$$

## 2.3 Зв'язок з алгеброю $\mathfrak{sl}(3)$

Нагадаємо, що в базисі  $\{|i\rangle\}$  власних станів атомного гамільтоніана  $\mathcal{H}_A$  атомний перехід з рівня  $|j\rangle$  на рівень  $|i\rangle$  описує оператор  $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ . Нас будуть цікавити лише оператори переходів між трьома обраними рівнями. Відносно операції комутування  $[\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\sigma}_{kl}] = \hat{\sigma}_{il}\delta_{kj} - \hat{\sigma}_{kj}\delta_{il}$  такі оператори утворюють алгебру  $\mathfrak{sl}(3)$ :

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{21}] &= \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}, & [\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{31}] &= \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33}, & [\hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{32}] &= \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33}, \\ [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{12}] &= \hat{\sigma}_{12}, & [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{21}] &= -\hat{\sigma}_{21}, & [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{13}] &= \hat{\sigma}_{13}, & [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{31}] &= -\hat{\sigma}_{31}, \\ [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{12}] &= -\hat{\sigma}_{12}, & [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{21}] &= \hat{\sigma}_{21}, & [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{23}] &= \hat{\sigma}_{23}, & [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{32}] &= -\hat{\sigma}_{32}, \\ [\hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{13}] &= -\hat{\sigma}_{13}, & [\hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{31}] &= \hat{\sigma}_{31}, & [\hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{23}] &= -\hat{\sigma}_{23}, & [\hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{32}] &= \hat{\sigma}_{32}, \\ [\hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{13}] &= 0, & [\hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{31}] &= -\hat{\sigma}_{32}, & [\hat{\sigma}_{21}, \hat{\sigma}_{13}] &= \hat{\sigma}_{23}, & [\hat{\sigma}_{21}, \hat{\sigma}_{31}] &= 0 \\ [\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{23}] &= 0, & [\hat{\sigma}_{13}, \hat{\sigma}_{32}] &= \hat{\sigma}_{12}, & [\hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{31}] &= \hat{\sigma}_{21}, & [\hat{\sigma}_{31}, \hat{\sigma}_{32}] &= 0. \end{aligned}$$

Цю властивість операторів атомних переходів для трирівневої моделі атома було зауважено у статтях [30, 35]. У монографії [36] алгебраїчну структуру цих операторів показано більш загально. Так, оператори які зв'язують пару



рівнів:  $\hat{\sigma}_{ik}, \hat{\sigma}_{ki}, \hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{kk}$  утворюють  $\mathfrak{sl}(2)$ -трійку, а саме:

$$[\hat{\sigma}_{ik}, \hat{\sigma}_{ki}] = \hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{kk}, \quad [\hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{kk}, \hat{\sigma}_{ik}] = 2\hat{\sigma}_{ik}, \quad [\hat{\sigma}_{ii} - \hat{\sigma}_{kk}, \hat{\sigma}_{ki}] = -2\hat{\sigma}_{ki}. \quad (2.1)$$

Ці спостереження узагальнюються на  $n$ -рівневу модель атома — оператори відповідних атомних переходів утворюють алгебру Лі  $\mathfrak{sl}(n)$ .

Такий зв'язок між набором операторів атомних переходів та алгеброю Лі дозволяє використати матричне представлення алгебри Лі, алгебри  $\mathfrak{sl}(3)$  у випадку трирівневої моделі:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{X}_1^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{H}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{X}_2^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{X}_2^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{H}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{X}_3^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{X}_3^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{H}_3 &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ [\hat{X}_1^+, \hat{X}_1^-] &= \hat{H}_1, & [\hat{X}_2^+, \hat{X}_2^-] &= \hat{H}_2, & [\hat{X}_3^+, \hat{X}_3^-] &= \hat{H}_3, \\ [\hat{H}_1, \hat{X}_1^+] &= 2\hat{X}_1^+, & [\hat{H}_2, \hat{X}_2^+] &= 2\hat{X}_2^+, & [\hat{H}_3, \hat{X}_3^+] &= 2\hat{X}_3^+, \\ [\hat{H}_1, \hat{X}_1^-] &= -2\hat{X}_1^-, & [\hat{H}_2, \hat{X}_2^-] &= -2\hat{X}_2^-, & [\hat{H}_3, \hat{X}_3^-] &= -2\hat{X}_3^-. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут елементи алгебри згруповані у  $\mathfrak{sl}(2)$ -трійки, причому комутаційні співвідношення збігаються з (2.1).

Випишемо явно всі комутаційні співвідношення алгебри  $\mathfrak{sl}(3)$ :

$$\begin{aligned}
[\hat{X}_1^+, \hat{X}_1^-] &= \hat{H}_1, & [\hat{H}_1, \hat{X}_1^+] &= 2\hat{X}_1^+, & [\hat{H}_1, \hat{X}_1^-] &= -2\hat{X}_1^-, \\
[\hat{H}_1, \hat{X}_3^+] &= \hat{X}_3^+, & [\hat{H}_1, \hat{X}_3^-] &= -\hat{X}_3^-, & [\hat{H}_1, \hat{X}_2^+] &= -\hat{X}_2^+, \\
[\hat{H}_1, \hat{X}_2^-] &= \hat{X}_2^-, & [\hat{X}_1^+, \hat{X}_3^+] &= [\hat{X}_1^-, \hat{X}_3^-] = 0, & [\hat{X}_1^-, \hat{X}_3^+] &= \hat{X}_2^+, \\
[\hat{X}_1^+, \hat{X}_3^-] &= -\hat{X}_2^-, & [\hat{X}_2^+, \hat{X}_2^-] &= \hat{H}_2, & [\hat{H}_2, \hat{X}_2^+] &= 2\hat{X}_2^+, \\
[\hat{H}_2, \hat{X}_2^-] &= -2\hat{X}_2^-, & [\hat{H}_2, \hat{X}_3^+] &= \hat{X}_3^+, & [\hat{H}_2, \hat{X}_3^-] &= -\hat{X}_3^-, \\
[\hat{H}_2, \hat{X}_1^+] &= -\hat{X}_1^+, & [\hat{H}_2, \hat{X}_1^-] &= \hat{X}_1^-, & [\hat{X}_2^+, \hat{X}_1^-] &= [\hat{X}_2^-, \hat{X}_1^+] = 0, \\
[\hat{X}_2^+, \hat{X}_1^+] &= -\hat{X}_3^+, & [\hat{X}_2^-, \hat{X}_1^-] &= \hat{X}_3^-, & [\hat{X}_3^+, \hat{X}_3^-] &= \hat{H}_3, \\
[\hat{H}_3, \hat{X}_3^+] &= 2\hat{X}_3^+, & [\hat{H}_3, \hat{X}_3^-] &= -2\hat{X}_3^-, & [\hat{H}_3, \hat{X}_2^+] &= \hat{X}_2^+, \\
[\hat{H}_3, \hat{X}_2^-] &= -\hat{X}_2^-, & [\hat{H}_3, \hat{X}_1^+] &= \hat{X}_1^+, & [\hat{H}_3, \hat{X}_1^-] &= -\hat{X}_1^-, \\
[\hat{X}_3^+, \hat{X}_2^+] &= [\hat{X}_3^-, \hat{X}_2^-] = 0, & [\hat{X}_3^+, \hat{X}_2^-] &= \hat{X}_1^+, & [\hat{X}_3^-, \hat{X}_2^+] &= -\hat{X}_1^-.
\end{aligned}$$

Атомні стани будемо представляти через стандартний базис у  $\mathbb{C}^3$ :

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередня перевірка виявляє:  $\hat{X}_1^+|2\rangle = |1\rangle$ ,  $\hat{X}_1^-|1\rangle = |2\rangle$ . В подальшому будемо асоціювати з матрицею  $\hat{X}_1^+$  оператор  $\hat{\sigma}_{12}$  опускання зі стану  $|2\rangle$  у стан  $|1\rangle$ , з матрицею  $\hat{X}_1^-$  — оператор  $\hat{\sigma}_{21}$  підняття зі стану  $|1\rangle$  у стан  $|2\rangle$ , а з матрицею  $\hat{H}_1$  — оператор  $\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}$ , який описує інверсну заселеність станів  $|1\rangle$  та  $|2\rangle$ . Замість позначень  $\hat{\sigma}_{12}$ ,  $\hat{\sigma}_{21}$ ,  $\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}$  будемо використовувати  $\hat{S}_1^-$ ,  $\hat{S}_1^+$ ,  $-\hat{S}_1^z$ . Аналогічні зв'язки та зміну позначень використаємо для інших пар рівнів. набір операторів  $\{\hat{S}_a\}$  теж утворює алгебру  $\mathfrak{sl}(3)$ , причому служить в ній дуальним базисом. В цьому проглядається стандартна схема побудови інтегровних систем, для яких фазовим простором служить простір дуальний до алгебри петель, побудованої на алгебрі Лі.

З огляду на матричне представлення алгебри Лі, будемо зв'язувати індекс 1 з переходом  $1 \leftrightarrow 2$ , індекс 2 — з переходом  $2 \leftrightarrow 3$ , індекс 3 — з переходом  $1 \leftrightarrow 3$ . Опишемо всі три конфігурації, використовуючи спільні позначення та фіксоване розташування рівнів:  $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3$ .

### 2.3.1 $\Lambda$ -конфігурація

Розглянемо конфігурацію з переходами  $1 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 2$ . Позначимо резонансні частоти переходів через

$$\Omega_{13} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1), \quad \Omega_{23} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2).$$

З усіх мод електромагнітного поля доцільно виділити дві з частотами  $\omega_{13}$ ,  $\omega_{23}$ , близькими до резонансних частот атома:  $\Omega_{13} - \omega_{13} = \Delta_{13}$ ,  $\Omega_{23} - \omega_{23} = \Delta_{23}$ , де через  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{23}$  позначено розстройку (або детюнінг). Позначаючи атомні рівні через квантові числа:

для лінійно поляризованого світла

$$\begin{aligned} |n_1, l, m\rangle &\rightarrow |n_3, l+1, m\rangle \rightarrow |n_2, l, m\rangle && \text{або} \\ |n_1, l, m\rangle &\rightarrow |n_3, l+1, m\rangle \rightarrow |n_2, l+2, m\rangle && \text{або} \\ |n_1, l, m\rangle &\rightarrow |n_3, l-1, m\rangle \rightarrow |n_2, l-2, m\rangle && \text{або} \\ |n_1, l, m\rangle &\rightarrow |n_3, l-1, m\rangle \rightarrow |n_2, l, m\rangle. \end{aligned}$$

запишемо в матричному представленні оператор, який описує дипольну взаємодію:

$$\begin{aligned} e\mathbf{r}\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle n_3, l+1, m | \hat{z} | n_1, l, m \rangle \\ 0 & 0 & \langle n_3, l+1, m | \hat{x}_- | n_2, l, m+1 \rangle \\ \langle n_1, l, m | \hat{z} | n_3, l+1, m \rangle & \langle n_2, l, m+1 | \hat{x}_+ | n_3, l+1, m \rangle & 0 \end{pmatrix} = \\ 4\pi g &\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{13}} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathcal{R}_{n_2, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+2)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{23}} \\ \frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{13}} & -\frac{\mathcal{R}_{n_2, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+2)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{23}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Бачимо, що два недіагональні елементи зануляються, і запису такого оператора достатньо векторів  $\hat{X}_2^\pm$ ,  $\hat{X}_3^\pm$  з базису (2.2). Тому для запису діагонального оператора заселе-

ностей атомних рівнів в даній конфігурації візьмемо на роль базису в підалгебрі Картана відповідні елементи:  $\hat{H}_2, \hat{H}_3$ , тоді  $\hat{H}_1 = \hat{H}_3 - \hat{H}_2$ .

Модельний гамільтоніан  $\Lambda$ -конфігурації в наближенні хвилі, що обертається, має вигляд

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_\Lambda = & \mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} + \hbar \omega_{13} \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \hbar \omega_{23} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \\ & \hbar g_{13} (\hat{\sigma}_{31} \hat{a}_3 + \hat{\sigma}_{13} \hat{a}_3^\dagger) + \hbar g_{23} (\hat{\sigma}_{32} \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_{23} \hat{a}_2^\dagger). \end{aligned} \quad (2.3)$$

З наведених вище комутаційних співвідношень дістаємо

$$\begin{aligned} \hat{X}_3^+ & \sim \hat{\sigma}_{13} = \hat{S}_3^-, & \hat{X}_3^- & \sim \hat{\sigma}_{31} = \hat{S}_3^+, & \hat{H}_3 & \sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33} = -\hat{S}_3^z, \\ \hat{X}_2^+ & \sim \hat{\sigma}_{23} = \hat{S}_2^-, & \hat{X}_2^- & \sim \hat{\sigma}_{32} = \hat{S}_2^+, & \hat{H}_2 & \sim \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33} = -\hat{S}_2^z, \\ \hat{X}_1^+ & \sim \hat{\sigma}_{12} = \hat{S}_1^-, & \hat{X}_1^- & \sim \hat{\sigma}_{21} = \hat{S}_1^+, & \hat{H}_1 & \sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = \hat{S}_2^z - \hat{S}_3^z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Розв'язуючи систему рівнянь на  $\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}$ , знаходимо:

$$\begin{cases} \hat{S}_3^z = \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{S}_2^z = \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{33} = \mathbb{I}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 - 2\hat{S}_3^z + \hat{S}_2^z) \\ \hat{\sigma}_{22} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 + \hat{S}_3^z - 2\hat{S}_2^z) \\ \hat{\sigma}_{33} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 + \hat{S}_2^z + \hat{S}_3^z) \end{cases}$$

Тоді діагональна частина гамільтоніана набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} &= \frac{1}{3}(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - 2\mathcal{E}_1) \hat{S}_3^z + \frac{1}{3}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - 2\mathcal{E}_2) \hat{S}_2^z + \frac{1}{3}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \mathbb{I}_3 = \\ &= \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{13} - \Omega_{23}) \hat{S}_3^z + \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{23} - \Omega_{13}) \hat{S}_2^z = \frac{1}{3} \hbar \Omega_{13} (2\hat{S}_3^z - \hat{S}_2^z) + \frac{1}{3} \hbar \Omega_{23} (2\hat{S}_2^z - \hat{S}_3^z). \end{aligned}$$

Сталий доданок  $\frac{1}{3}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)$  в подальшому будемо відкидати.

Зауважимо, що набір операторів  $\{\hat{S}_1^-, \hat{S}_1^+, \hat{S}_2^-, \hat{S}_2^+, \frac{1}{3}(2\hat{S}_2^z - \hat{S}_3^z), \hat{S}_3^-, \hat{S}_3^+, \frac{1}{3}(2\hat{S}_3^z - \hat{S}_2^z)\}$ , якщо використати для нього те саме матричне представлення (2.2), є дуальними відносно скалярного добутку  $\langle A, B \rangle = \text{Tr} AB$  до базису матриць  $\{\hat{X}_1^+, \hat{X}_1^-, \hat{X}_2^+, \hat{X}_2^-, \hat{H}_2, \hat{X}_3^+, \hat{X}_3^-, \hat{H}_3\}$ . У цьому легко переконатися безпосереднім обчисленням:

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & (\hat{H}_2)^* &= \frac{1}{3}(2\hat{H}_2 - \hat{H}_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \hat{H}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & (\hat{H}_3)^* &= \frac{1}{3}(2\hat{H}_3 - \hat{H}_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**2.3.1.1 Гамільтоніан та рівняння руху в  $\Lambda$ -конфігурації** Остаточно, модельний гамільтоніан  $\Lambda$ -конфігурації набуває вигляду<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Надалі покладемо  $\hbar = 1$ .

$$\hat{\mathcal{H}}_\Lambda = \frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{13} - \Omega_{23})\hat{S}_3^z + \frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{23} - \Omega_{13})\hat{S}_2^z + \hbar\omega_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3 + \hbar\omega_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- + \hat{a}_3\hat{S}_3^+) + \hbar g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- + \hat{a}_2\hat{S}_2^+). \quad (2.5)$$

Запишемо рівняння руху у форму Гайзенберга:  $i\hbar d\hat{S}_a/dt = [\hat{S}_a, \hat{\mathcal{H}}_\Lambda]$  для цієї конфігурації:

$$i\frac{d\hat{S}_2^-}{dt} = \Omega_{23}\hat{S}_2^- + g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_1^+ - g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_2^z \quad (2.6)$$

$$i\frac{d\hat{a}_2}{dt} = \omega_{23}\hat{a}_2 + g_{23}\hat{S}_2^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^+}{dt} = -\Omega_{23}\hat{S}_2^+ - g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_1^- + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^z \quad (2.7)$$

$$i\frac{d\hat{a}_2^\dagger}{dt} = -\omega_{23}\hat{a}_2^\dagger - g_{23}\hat{S}_2^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^z}{dt} = -g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+) - 2g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+) \quad (2.8)$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^-}{dt} = \Omega_{13}\hat{S}_3^- - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_3^z + g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_1^- \quad (2.9)$$

$$i\frac{d\hat{a}_3}{dt} = \omega_{13}\hat{a}_3 + g_{13}\hat{S}_3^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^+}{dt} = -\Omega_{13}\hat{S}_3^+ + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^z - g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_1^+ \quad (2.10)$$

$$i\frac{d\hat{a}_3^\dagger}{dt} = -\omega_{13}\hat{a}_3^\dagger - g_{13}\hat{S}_3^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^z}{dt} = -2g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+) - g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+);$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^-}{dt} = (\Omega_{13} - \Omega_{23})\hat{S}_1^- - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_2^+ + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_3^-, \quad \Omega_{13} - \Omega_{23} = \Omega_{12}$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^+}{dt} = -(\Omega_{13} - \Omega_{23})\hat{S}_1^+ + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_2^- + g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_3^+$$

Рівняння для змінних  $\hat{S}_2^-, \hat{S}_2^+, \hat{S}_2^z, \hat{S}_3^-, \hat{S}_3^+, \hat{S}_3^z$ , які присутні у гамільтоніані  $\mathcal{H}_\Lambda$ , виявляються незамкненими, оскільки у правій частині з'являються оператори  $\hat{S}_1^-, \hat{S}_1^+$  — додамо також рівняння для цих операторів. Зауважимо, що доданки з операторами  $\hat{S}_1^-, \hat{S}_1^+$  суперечать закону збереження енергії і їх можна відкинути.

### 2.3.2 V-конфігурація

Розглянемо конфігурацію з переходами  $3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2$ . Позначимо резонансні частоти переходів  $\Omega_{12} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1), \Omega_{13} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1)$ . Так само виберемо моди електромагнітного поля з частотами  $\omega_{12}, \omega_{13}$ , близькими до резонансних частот атома, детюнінг позначимо через  $\Delta_{12}, \Delta_{13}$ .

$$\begin{aligned}
& 1 : |n_1, l, m\rangle, \quad 2 : |n_2, l+1, m+1\rangle, \quad 3 : |n_3, l+1, m\rangle, \\
er\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 0 & \langle n_2, l+1, m+1 | \hat{x}_+ | n_1, l, m \rangle & \langle n_3, l+1, m | \hat{z} | n_1, l, m \rangle \\ \langle n_1, l, m | \hat{x}_- | n_2, l+1, m+1 \rangle & 0 & 0 \\ \langle n_1, l, m | \hat{z} | n_3, l+1, m \rangle & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
4\pi g & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_2, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+2)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{12}} & \frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{13}} \\ -\frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_2, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+2)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{\mathcal{R}_{n_1, l, n_3, l+1}}{(2l+3)(2l+1)} \frac{(l+m+1)!}{(l-m)!} \sqrt{\omega_{13}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Для запису такого оператора достатньо векторів  $\hat{X}_1^\pm$ ,  $\hat{X}_3^\pm$ , відповідно виберемо базис в підалгебрі Картана:  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_3$ , тоді  $\hat{H}_2 = \hat{H}_3 - \hat{H}_1$ .

Модельний гамільтоніан в наближенні хвилі, що обертається

$$\hat{\mathcal{H}}_V = \mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} + \hbar \omega_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar \omega_{13} \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \hbar g_{12} (\hat{\sigma}_{21} \hat{a}_1 + \hat{\sigma}_{12} \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_{13} (\hat{\sigma}_{31} \hat{a}_3 + \hat{\sigma}_{13} \hat{a}_3^\dagger). \quad (2.11)$$

Використаємо співвідношення (2.4), єдиною відмінністю буде інший базис в підалгебрі Картана:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &\sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = -\hat{S}_1^z, & \hat{H}_3 &\sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33} = -\hat{S}_3^z, & \hat{H}_2 &\sim \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33} = \hat{S}_1^z - \hat{S}_3^z; \\
\begin{cases} \hat{S}_1^z = \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{S}_3^z = \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{33} = \mathbb{I}_3 \end{cases} &\Rightarrow & \begin{cases} \hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 - \hat{S}_1 - \hat{S}_3) \\ \hat{\sigma}_{22} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 - \hat{S}_3 + 2\hat{S}_1) \\ \hat{\sigma}_{33} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 - \hat{S}_1 + 2\hat{S}_3) \end{cases}
\end{aligned}$$

перетворимо атомний гамільтоніан:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} &= \frac{1}{3}(2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3) \hat{S}_1^z + \frac{1}{3}(2\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \hat{S}_3^z + \frac{1}{3}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \mathbb{I}_3 = \\
&= \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{12} - \Omega_{13}) \hat{S}_1^z + \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{13} - \Omega_{12}) \hat{S}_3^z = \frac{1}{3} \hbar (2\hat{S}_1^z - \hat{S}_3^z) \Omega_{12} + \frac{1}{3} \hbar (2\hat{S}_3^z - \hat{S}_1^z) \Omega_{13}.
\end{aligned}$$

Також можна зауважити, що набір операторів  $\{\hat{S}_1^-, \hat{S}_1^+, \frac{1}{3}(2\hat{S}_1^z - \hat{S}_3^z), \hat{S}_2^-, \hat{S}_2^+, \hat{S}_3^-, \hat{S}_3^+, \frac{1}{3}(2\hat{S}_3^z - \hat{S}_1^z)\}$ , якщо використати для нього матричне представлення (2.2), є дуальними відносно скалярного добутку  $\langle A, B \rangle = \text{Tr } AB$  до базису матриць  $\{\hat{X}_1^+, \hat{X}_1^-, \hat{H}_1, \hat{X}_2^+, \hat{X}_2^-, \hat{X}_3^+, \hat{X}_3^-, \hat{H}_3\}$ .

**2.3.2.1 Гамільтоніан та рівняння руху у  $V$ -конфігурації** Модельний гамільтоніан  $V$ -конфігурації набуває вигляду

$$\hat{\mathcal{H}}_V = \frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{12} - \Omega_{13})\hat{S}_1^z + \frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{13} - \Omega_{12})\hat{S}_3^z + \hbar\omega_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_{13}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- + \hat{a}_1\hat{S}_1^+) + \hbar g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- + \hat{a}_3\hat{S}_3^+). \quad (2.12)$$

Запишемо рівняння руху у формі Гайзенберга:  $i\hbar d\hat{S}_a/dt = [\hat{S}_a, \hat{\mathcal{H}}_V]$  для цієї конфігурації:

$$i\frac{d\hat{S}_1^-}{dt} = \Omega_{12}\hat{S}_1^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_1^z - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_2^+, \quad (2.13)$$

$$i\frac{d\hat{a}_1}{dt} = \omega_{12}\hat{a}_1 + g_{12}\hat{S}_1^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^+}{dt} = -\Omega_{12}\hat{S}_1^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^z + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_2^- \quad (2.14)$$

$$i\frac{d\hat{a}_1^\dagger}{dt} = -\omega_{12}\hat{a}_1^\dagger - g_{12}\hat{S}_1^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^z}{dt} = -2g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) - g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+) \quad (2.15)$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^-}{dt} = \Omega_{13}\hat{S}_3^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_2^- - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_3^z \quad (2.16)$$

$$i\frac{d\hat{a}_3}{dt} = \omega_{13}\hat{a}_3 + g_{13}\hat{S}_3^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^+}{dt} = -\Omega_{13}\hat{S}_3^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_2^+ + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^z \quad (2.17)$$

$$i\frac{d\hat{a}_3^\dagger}{dt} = -\omega_{13}\hat{a}_3^\dagger - g_{13}\hat{S}_3^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^z}{dt} = -g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) - 2g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+);$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^-}{dt} = (\Omega_{13} - \Omega_{12})\hat{S}_2^- - g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_3^- + g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_1^+ \quad \Omega_{13} - \Omega_{12} = \Omega_{23}$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^+}{dt} = -(\Omega_{13} - \Omega_{12})\hat{S}_2^+ + g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_3^+ - g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_1^-$$

Рівняння для змінних  $\hat{S}_1^-, \hat{S}_1^+, \hat{S}_1^z, \hat{S}_3^-, \hat{S}_3^+, \hat{S}_3^z$ , які входять у гамільтоніан  $\mathcal{H}_A$ , виявляються незамкненими — у правій частині з'являються оператори  $\hat{S}_2^-, \hat{S}_2^+$ , для яких також записано рівняння руху. Хоча доданки з операторами  $\hat{S}_2^-, \hat{S}_2^+$  можна відкинути, оскільки вони суперечать закону збереження енергії.

### 2.3.3 $\Xi$ -конфігурація

Для повноти картини розглянемо ще одну можливу конфігурацію з переходами  $3 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 1$ . Позначимо резонансні частоти обраних переходів

$$\Omega_{12} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1), \quad \Omega_{23} = \hbar^{-1}(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2).$$

Моди електромагнітного поля з частотами  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$ , близькими до резонансних частот атома, детюнінг позначимо через  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{23}$ .

Для запису оператора дипольного моменту достатньо векторів  $\hat{X}_1^\pm$ ,  $\hat{X}_2^\pm$ , відповідно виберемо базис в підалгебрі Картана:  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_2$ , тоді  $\hat{H}_3 = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ .

Модельний гамільтоніан в наближенні хвилі, що обертається

$$\hat{\mathcal{H}}_\Xi = \mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} + \hbar \omega_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar \omega_{23} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hbar g_{12} (\hat{\sigma}_{21} \hat{a}_1 + \hat{\sigma}_{12} \hat{a}_1^\dagger) + \hbar g_{23} (\hat{\sigma}_{32} \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_{23} \hat{a}_2^\dagger). \quad (2.18)$$

Використаємо співвідношення (2.4) з іншим базисом в підалгебрі Картана:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 \sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22} = -\hat{S}_1^z, \quad \hat{H}_2 \sim \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{33} = -\hat{S}_2^z, \quad \hat{H}_3 \sim \hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{33} = -\hat{S}_1^z - \hat{S}_2^z; \\ \begin{cases} \hat{S}_1^z = \hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{11} \\ \hat{S}_2^z = \hat{\sigma}_{33} - \hat{\sigma}_{22} \\ \hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{33} = \mathbb{I}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 - 2\hat{S}_1 - \hat{S}_2) \\ \hat{\sigma}_{22} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 + \hat{S}_1 - \hat{S}_2) \\ \hat{\sigma}_{33} = \frac{1}{3}(\mathbb{I}_3 + \hat{S}_1 + 2\hat{S}_2) \end{cases} \end{aligned}$$

і запишемо атомний гамільтоніан:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2 \hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3 \hat{\sigma}_{33} &= \frac{1}{3}(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - 2\mathcal{E}_1) \hat{S}_1^z + \frac{1}{3}(2\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \hat{S}_2^z + \frac{1}{3}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3) \mathbb{I}_3 = \\ &= \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{12} + \Omega_{23}) \hat{S}_1^z + \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{23} + \Omega_{12}) \hat{S}_2^z = \frac{1}{3} \hbar (2\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z) \Omega_{12} + \frac{1}{3} \hbar (2\hat{S}_2^z + \hat{S}_1^z) \Omega_{23}. \end{aligned}$$

### 2.3.3.1 Гамільтоніан та рівняння руху у $\Xi$ -конфігурації

Остаточо, модельний гамільтоніан  $\Xi$ -конфігурації набуває вигляду

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_\Xi &= \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{12} + \Omega_{23}) \hat{S}_1^z + \frac{1}{3} \hbar (2\Omega_{23} + \Omega_{12}) \hat{S}_2^z + \hbar \omega_{12} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar \omega_{23} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \\ &+ \hbar g_{12} (\hat{a}_1^\dagger \hat{S}_1^- + \hat{a}_1 \hat{S}_1^+) + \hbar g_{23} (\hat{a}_2^\dagger \hat{S}_2^- + \hat{a}_2 \hat{S}_2^+). \quad (2.19) \end{aligned}$$

Запишемо також рівняння руху у формі Гайзенберга:

$i\hbar d\hat{S}_a/dt = [\hat{S}_a, \hat{\mathcal{H}}_\Xi]$  для цієї конфігурації:



$$i\frac{d\hat{S}_1^-}{dt} = \Omega_{12}\hat{S}_1^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_1^z + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_3^- \quad (2.20)$$

$$i\frac{d\hat{a}_1}{dt} = \omega_{12}\hat{a}_1 + g_{12}\hat{S}_1^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^+}{dt} = -\Omega_{12}\hat{S}_1^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^z - g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_3^+ \quad (2.21)$$

$$i\frac{d\hat{a}_1^\dagger}{dt} = -\omega_{12}\hat{a}_1^\dagger - g_{12}\hat{S}_1^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_1^z}{dt} = -2g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) + g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+)$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^-}{dt} = \Omega_{23}\hat{S}_2^- - g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_3^- - g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_2^z \quad (2.22)$$

$$i\frac{d\hat{a}_2}{dt} = \omega_{23}\hat{a}_2 + g_{23}\hat{S}_2^-$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^+}{dt} = -\Omega_{23}\hat{S}_2^+ + g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_3^+ + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^z \quad (2.23)$$

$$i\frac{d\hat{a}_2^\dagger}{dt} = -\omega_{23}\hat{a}_2^\dagger - g_{23}\hat{S}_2^+$$

$$i\frac{d\hat{S}_2^z}{dt} = g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) - 2g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+) \quad (2.24)$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^-}{dt} = (\Omega_{12} + \Omega_{23})\hat{S}_3^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_2^- + g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_1^- \quad \Omega_{12} + \Omega_{23} = \Omega_{13}$$

$$i\frac{d\hat{S}_3^+}{dt} = -(\Omega_{12} + \Omega_{23})\hat{S}_3^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_2^+ - g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_1^+$$

### 2.3.4 Загальний гамільтоніан

Усі три конфігурації є частковими випадками моделі

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \mathcal{E}_1\hat{\sigma}_{11} + \mathcal{E}_2\hat{\sigma}_{22} + \mathcal{E}_3\hat{\sigma}_{33} + \hbar\omega_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + \hbar\omega_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2 + \hbar\omega_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3 + \\ & + \hbar g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- + \hat{a}_1\hat{S}_1^+) + \hbar g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- + \hat{a}_2\hat{S}_2^+) + \hbar g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- + \hat{a}_3\hat{S}_3^+), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де присутні три моди поля і оператори усіх трьох переходів. Очевидно, лише два переходи можуть бути дипольними, третій є квадрупольним. Інверсні заселеності дипольних переходів пропонується брати в якості базиса підалгебри Картана, яка описує діагональну частину матриці.

Атомний гамільтоніан записаний у загальному вигляді. Працюючи в контексті алгебри  $\mathfrak{sl}(3)$  безслідових матриць, ми обирали базис для кожної моделі свій, однак кожний базис підходить і для всіх інших. Водночас можна працювати в контексті алгебри  $\mathfrak{gl}(3)$ , тоді  $\hat{\sigma}_{ii}$  є цілком прийнятним базисом.

Запишемо рівняння руху для загальної моделі, беручи дипольні переходи як у  $\Lambda$ -моделі, тобто з діагональною частиною вигляду  $\frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{13} - \Omega_{23})\hat{S}_3^z + \frac{1}{3}\hbar(2\Omega_{23} - \Omega_{13})\hat{S}_2^z$ .

$$i \frac{d\hat{S}_1^-}{dt} = \Omega_{12}\hat{S}_1^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_1^z + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_3^- - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_2^+ \quad (2.26)$$

$$i \frac{d\hat{a}_1}{dt} = \omega_{12}\hat{a}_1 + g_{12}\hat{S}_1^-$$

$$i \frac{d\hat{S}_1^+}{dt} = -\Omega_{12}\hat{S}_1^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^z - g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_3^+ + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_2^- \quad (2.27)$$

$$i \frac{d\hat{a}_1^\dagger}{dt} = -\omega_{12}\hat{a}_1^\dagger - g_{12}\hat{S}_1^+$$

$$i \frac{d\hat{S}_2^-}{dt} = \Omega_{23}\hat{S}_2^- - g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_3^- - g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_2^z + g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_1^+ \quad (2.28)$$

$$i \frac{d\hat{a}_2}{dt} = \omega_{23}\hat{a}_2 + g_{23}\hat{S}_2^-$$

$$i \frac{d\hat{S}_2^+}{dt} = -\Omega_{23}\hat{S}_2^+ + g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_3^+ + g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^z - g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_1^- \quad (2.29)$$

$$i \frac{d\hat{a}_2^\dagger}{dt} = -\omega_{23}\hat{a}_2^\dagger - g_{23}\hat{S}_2^+$$

$$i \frac{d\hat{S}_2^z}{dt} = g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) - 2g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+) - g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+) \quad (2.30)$$

$$i \frac{d\hat{S}_3^-}{dt} = \Omega_{13}\hat{S}_3^- - g_{12}\hat{a}_1\hat{S}_2^- + g_{23}\hat{a}_2\hat{S}_1^- - g_{13}\hat{a}_3\hat{S}_3^z \quad (2.31)$$

$$i \frac{d\hat{a}_3}{dt} = \omega_{13}\hat{a}_3 + g_{13}\hat{S}_3^-$$

$$i \frac{d\hat{S}_3^+}{dt} = -\Omega_{13}\hat{S}_3^+ + g_{12}\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_2^+ - g_{23}\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_1^+ + g_{13}\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^z \quad (2.32)$$

$$i \frac{d\hat{a}_3^\dagger}{dt} = -\omega_{13}\hat{a}_3^\dagger - g_{13}\hat{S}_3^+$$

$$i \frac{d\hat{S}_3^z}{dt} = -g_{12}(\hat{a}_1^\dagger\hat{S}_1^- - \hat{a}_1\hat{S}_1^+) - g_{23}(\hat{a}_2^\dagger\hat{S}_2^- - \hat{a}_2\hat{S}_2^+) - 2g_{13}(\hat{a}_3^\dagger\hat{S}_3^- - \hat{a}_3\hat{S}_3^+).$$

Порівнюючи отримані рівняння з рівняннями Гейзенберга для  $\Lambda$ -конфігурації (2.8), бачимо, що останні можна отримати з (2.30) покладанням  $g_{12} = 0$  та відкиданням рівнянь для  $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger$ , оскільки ці оператори зникають із системи рівнянь. Подібним чином, рівняння Гейзенберга для  $V$ -конфігурації (2.15) отримують з (2.30) покладанням  $g_{23} = 0$  та відкиданням рівнянь для  $\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ , а рівняння Гейзенберга для  $\Xi$ -конфігурації (2.24) отримують з (2.30) покладанням  $g_{13} = 0$  та відкиданням рівнянь для  $\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger$ .

Усі три конфігурації трирівневої моделі атома містяться в задачі із гамільтоніаном загального вигляду (2.25). Таку постановку слід вважати більш реалістичною, оскільки «заборони» переходів природа не розуміє. Між третьою парою станів реалізується квадрупольний перехід, який має меншу інтенсивність і тому його не було помічено в експерименті.

Розв'яжемо рівняння (2.30) чисельно.

## 2.4 Усереднення і перехід до класичної моделі

Перехід до класичної моделі здійснимо усередненням по станах

$$|1, n_2, n_3\rangle, \quad |2, n_2, n_3\rangle, \quad |3, n_2, n_3\rangle,$$

які є прямим добутком власних станів атомного гамільтоніана: позначаємо їх  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ ,  $|3\rangle$ , та власних станів  $|n_2\rangle$ ,  $|n_3\rangle$  операторів кількості фотонів  $\hat{N}_2 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ ,  $\hat{N}_3 = \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3$ , що відповідають модам, пов'язаним із переходами 2 – 3 та 1 – 3. Стан системи будемо описувати вектором

$$|\psi\rangle = \sum_{n_2, n_3} (c_1(n_2, n_3)|1, n_2, n_3\rangle + c_2(n_2, n_3)|2, n_2, n_3\rangle + c_3(n_2, n_3)|3, n_2, n_3\rangle).$$

Коефіцієнти  $c_k(n_2, n_3)$  є комплекснозначними функціями кількості фотонів  $n_2$ ,  $n_3$  двох мод. При усередненні нехтуємо квантовими кореляціями між змінними операторами електромагнітного поля та атомними операторами, тобто

$$\langle \psi | \hat{a} \hat{S} | \psi \rangle \approx \langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle \cdot \langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle.$$

Усереднені величини  $\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle$  та  $\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle$  будемо інтерпретувати наступним чином. Усереднені оператори знищення  $a_k^- = a_k^x + i a_k^y$  та народження  $a_k^+ = a_k^x - i a_k^y$  фотонів моди  $k$  дають вектор напруженості електричного поля  $\mathbf{a}_k = (a_k^x, a_k^y, 0)$ , віднесений до центра атома. Усереднені оператори переходу між парою рівнів  $S_k^- = S_k^x + i S_k^y$  та  $S_k^+ = S_k^x - i S_k^y$  дають вектор дипольного моменту  $\mathbf{d}_k = (S_k^x, S_k^y, 0)$ , який описує орієнтацію електронної хмари при переході електрона з одного стану в інший. До вектора дипольного моменту можна приєднати в якості третьої компоненти усереднений оператор  $S_k^z$ , який описує інверсну заселеність відповідної пари рівнів. Можна вважати, що вектор  $\mathbf{S}_k = (S_k^x, S_k^y, S_k^z)$  «слідкує» за електроном під час переходу.

Усереднення рівняння Гейзенберга дає аналогічні рівняння на усереднені величини  $\langle \psi | \hat{a} | \psi \rangle$  та  $\langle \psi | \hat{S} | \psi \rangle$ . Ці рівняння визначають класичну модель системи, що розглядається.

### 2.4.1 Чисельний розв'язок $\Lambda$ -моделі

Вивчимо чисельний розв'язок рівнянь (2.8)  $\Lambda$ -конфігурації за різних початкових умов. Візьмемо систему, електронні рівні якої мають значення  $\mathcal{E}_1 = 1$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4$ ,  $\mathcal{E}_3 = 5$ . Покладемо  $\hbar = 1$  і частоти випромінювання візьмемо резонансними:  $\omega_k = \Omega_k$ .

**2.4.1.1 Збудження з одним електроном і одним фотоном** Оберемо початкові умови, що відповідають одному надлишковому електрону на одному з рівнів

і один фотон певної моди. При збудженні моди 1 – 3 та наявності одного надлишкового електрона на рівні  $|2\rangle$  взаємодія між електромагнітним полем і атомом відсутня. Так само як і при збудженні моди 2 – 3 та наявності одного надлишкового електрона на рівні  $|1\rangle$ .

Інтерес представляє еволюція системи, коли 1) надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|1\rangle$  і збуджується мода 1 – 3, графіки інверсних заселеностей рівнів 1 – 3 та 2 – 3 показано на рис. 2.1, 2) надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|2\rangle$  і збуджується мода 2 – 3, графіки інверсних заселеностей показано на рис. 2.2.

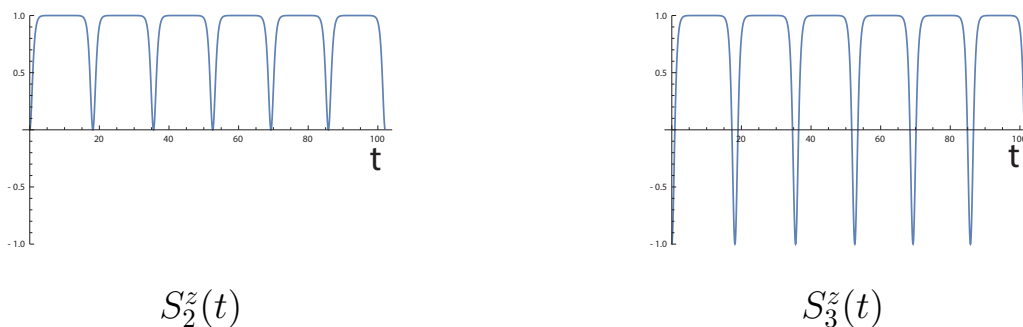


Рис. 2.1: Графіки залежності інверсних заселеностей  $S_2^z(t)$  та  $S_3^z(t)$  від часу  $t$ , коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|1\rangle$  і збуджене поле моди, що відповідає переходу 1 – 3;

початкові умови:  $\mathbf{a}_3(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_3(0) = (0,0, -1)$ .

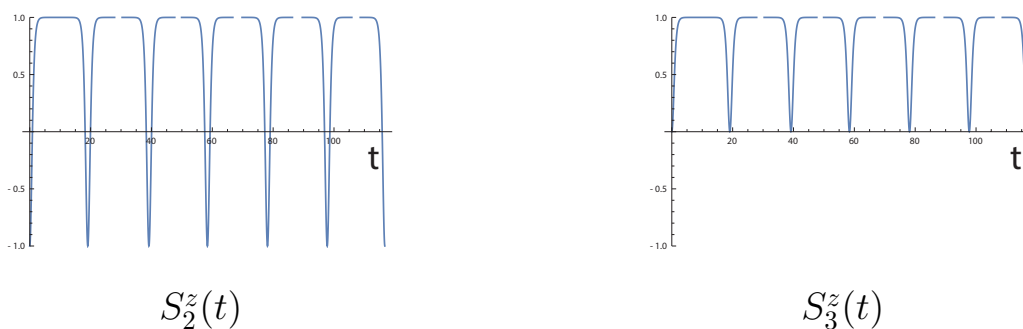


Рис. 2.2: Графіки залежності інверсних заселеностей  $S_2^z(t)$  та  $S_3^z(t)$  від часу  $t$ , коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|2\rangle$  і збуджене поле моди, що відповідає переходу 2 – 3;

початкові умови:  $\mathbf{a}_3(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_3(0) = (0,0, -1)$ .

В обох випадках електрон переходить на верхній рівень  $|3\rangle$  і «зависає» протягом майже

всього циклу Рабі і далі швидко опускається на нижній рівень, і так само швидко піднімається на верхній рівень, починаючи новий цикл. На рис. 2.3 показано поведінку вектора  $\mathbf{S}_3$  переходу 1 – 3 протягом циклу Рабі та суміщені графіки  $\mathbf{a}_3$  і  $\mathbf{d}_3$  протягом половини циклу Рабі, коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|1\rangle$ . Аналогічно поведінку вектора  $\mathbf{S}_2$  переходу 2 – 3 протягом циклу Рабі та суміщені графіки  $\mathbf{a}_2$  і  $\mathbf{d}_2$  протягом половини циклу Рабі, коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|2\rangle$  представлено на рис. 2.4. Спостерігаємо, що вектор напруженості електромагнітного поля  $\mathbf{a}_3$ , зобра-

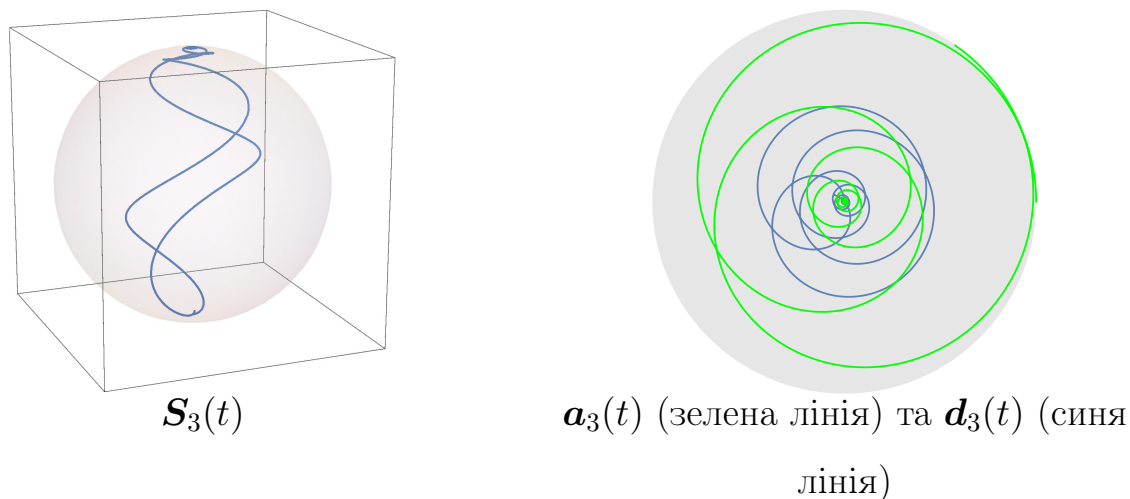


Рис. 2.3: Графіки залежності векторів  $\mathbf{S}_3(t)$ ,  $\mathbf{a}_3(t)$  та  $\mathbf{d}_3(t)$  від часу  $t$ , коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|1\rangle$  і збуджене поле моди, що відповідає переходу 1 – 3;

початкові умови:  $\mathbf{a}_3(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_3(0) = (0,0, -1)$ .

жений у системі координат атома, рухається у протифазі до вектора дипольного моменту  $\mathbf{d}_3$ . Так само зв'язані вектори  $\mathbf{a}_2(t)$  та  $\mathbf{d}_2(t)$ . Водночас вектори напруженості електромагнітного поля та дипольного моменту прецесують навколо осі вздовж орієнтації атомного переходу, як бачимо на графіках рис. 2.5. Отже, відбувається сильна скорельована взаємодія електромагнітного поля з електронною густиною атома. Зауважимо, що вектори  $\mathbf{a}_3(t)$  та  $\mathbf{a}_2(t)$  в обох випадках лежать всередині одиничного диска, який окреслює область атома. Іншими словами, динаміка із «зависанням» на верхньому рівні характеризується тим, що вектор напруженості електромагнітного поля не виходить за межі атома.

Якщо у систему вкачується більше енергії, ніж потрібно для переведення електрона на верхній рівень, то електрон здійснює швидкі осциляції Рабі і не затримується на верхньому рівні, графіки інверсних заселеностей рівнів 1 – 3 та 2 – 3, коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|3\rangle$  показано на рис. 2.6, а також графіки залежностей  $\mathbf{S}_3(t)$ ,

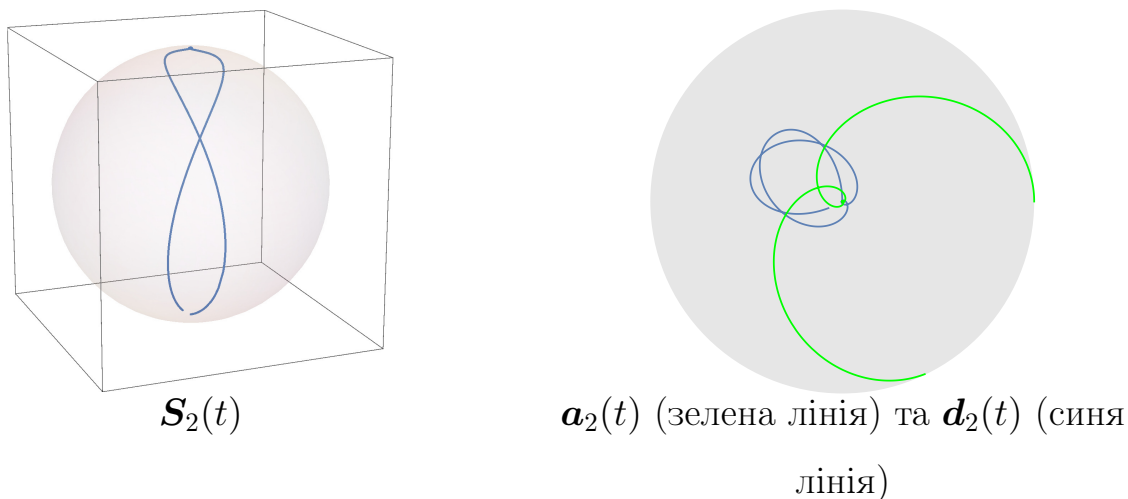


Рис. 2.4: Графіки залежності векторів  $\mathbf{S}_2(t)$ ,  $\mathbf{a}_2(t)$  та  $\mathbf{d}_2(t)$  від часу  $t$ , коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|2\rangle$  і збуджене поле моди, що відповідає переходу  $2 - 3$ ; початкові умови:  $\mathbf{a}_2(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_2(0) = (0,0, -1)$ .

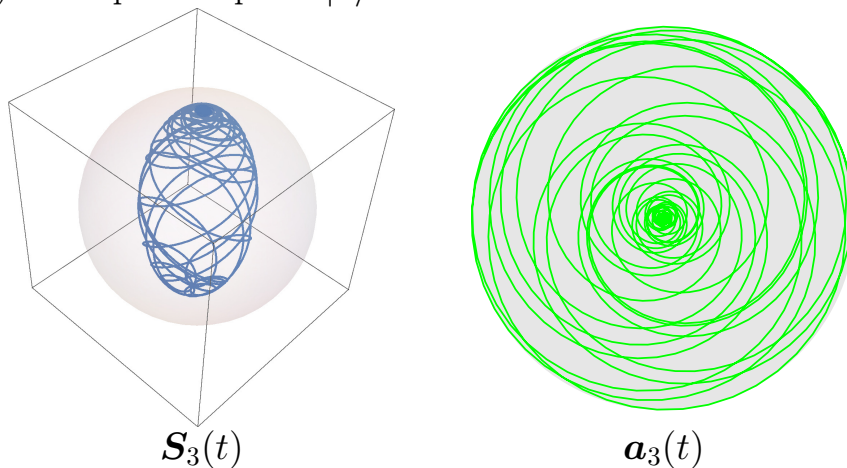
$\mathbf{a}_3(t)$  від часу  $t$ . Таку саму поведінку спостерігаємо, коли надлишковий електрон сидить на одному з нижніх рівнів і збільшена потужність електромагнітного поля. Частоту коливань Рабі можна зменшити, зменшуючи інтенсивність електромагнітного поля, і навпаки: збільшити, збільшуючи інтенсивність поля. Швидкі осциляції Рабі супроводжуються напруженістю електромагнітного поля, яка виходить за межі атома.

Розглянемо також випадки, коли частота випромінювання не є резонансною, а відрізняється на 10% від частоти атомного переходу. Це показано на графіках рис. 2.7. В усіх випадках вектора  $\mathbf{S}_3(t)$  та  $\mathbf{S}_2(t)$  не досягають верхньої позиції, іншими словами, електрон не переходить повністю на верхній рівень. Коливання електронної густини між крайніми позиціями відбувається осциляторно. А вектор  $\mathbf{a}_k$  не перетворюється на нуль і лежить зовні певного околу центра атома.

Наведені вище приклади еволюції системи стосувались збудження лише однієї моди електромагнітного поля. В цьому випадку дістаємо картину, близьку до поведінки дворівневої моделі.

**2.4.1.2 Збудження двох мод з одним електроном** Тепер розглянемо випадок, коли збуджені обидві моди із резонансними частотами:  $\omega_{13} = \Omega_{13}$ ,  $\omega_{23} = \Omega_{23}$ . При одному надлишковому електроні на рівні  $|1\rangle$  під дією випромінювання цей електрон піднімається на перехід  $1 - 3$  і досягає позиції, коли електронна рідина рівномірно розподі-

а) електрон на рівні  $|1\rangle$



б) електрон на рівні  $|2\rangle$

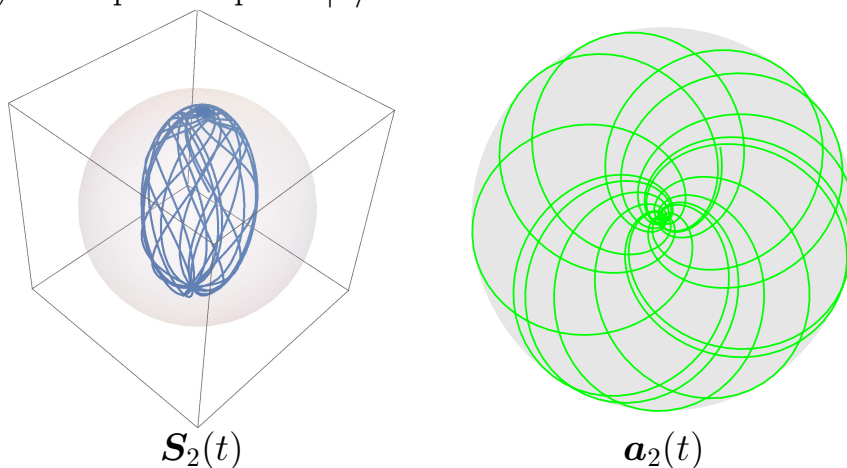


Рис. 2.5: Графіки залежності від часу  $t$ , з початковими умовами: а)  $\mathbf{a}_3(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_3(0) = (0,0, -1)$  б)  $\mathbf{a}_2(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_2(0) = (0,0, -1)$ .

ляється між рівнями  $|1\rangle$  та  $|3\rangle$ , де затримується більше половини цикла Рабі, див. графік для  $S_3^z(t)$  на рис. 2.8 а). При цьому частина електронної рідини відтягається з рівня  $|3\rangle$  на рівень  $|2\rangle$ , графік для  $S_2^z(t)$  на рис. 2.8 а), так що виникає осциляторне коливання між рівнями  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$ , див. графік для  $S_1^z(t)$  на рис. 2.8 а). Схожа картина спостерігається, коли один надлишковий електрон розташований на рівні  $|2\rangle$ , графіки на рис. 2.8 б). Динаміку векторів  $\mathbf{S}_1$ ,  $\mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{S}_3$  для випадків а) надлишкового електрона на рівні  $|1\rangle$ , б) надлишкового електрона на рівні  $|2\rangle$ , в) надлишкових електронів на рівнях  $|1\rangle$  та  $|2\rangle$ , г) надлишкового електрона на рівні  $|3\rangle$  показано на рис. 2.9. За наявності одного надлишкового електрона на рівні  $|1\rangle$  або  $|2\rangle$ , випадки а) та б), найбільше коливання електронної рідини спостерігається між рівнями  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$ . Це означає, що електрон не досягає верхнього рівня, тобто випромінювання другої моди блокує перехід. Більш виразно ця ситуація спостерігається, якщо взяти початкові умови із двома електронами на рівні  $|1\rangle$ , див. рис. 2.10

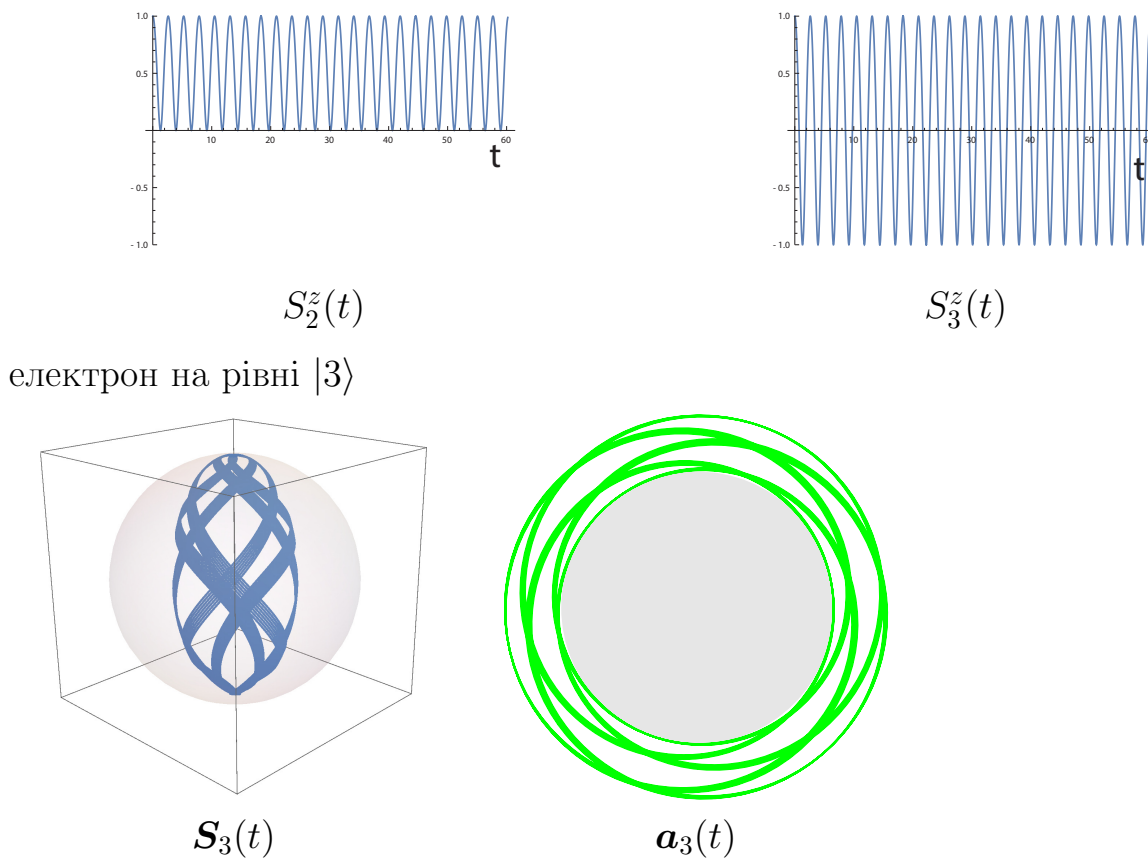


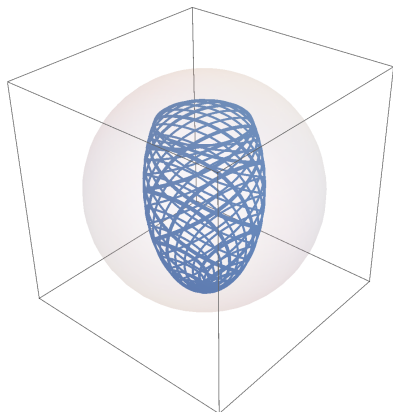
Рис. 2.6: Графіки залежностей від часу  $t$ , коли один надлишковий електрон знаходиться на рівні  $|3\rangle$  і збуджене поле моди, що відповідає переходу  $1 - 3$ ; початкові умови:  $\mathbf{a}_3(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_2(0) = (1,0,0)$ ,  $\mathbf{S}_3(0) = (1,0,0)$ .

Повноцінний перехід на верхній рівень не відбувається навіть, коли на обох рівнях  $|1\rangle$  та  $|2\rangle$  розташовано по одному надлишковому електрону, випадок в). Електрони здійснюють синхронні осциляторні коливання вздовж переходів  $1 - 3$  та  $2 - 3$ , однак не досягають верхнього рівня. При цьому електронна заселеність рівнів  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  залишається однаковою. Режим із зависанням на верхньому рівні спостерігається, якщо розмістити на рівнях  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  по два електрони. Верхнього рівня досягає по одному електрону з кожного переходу, при цьому електронна заселеність рівнів  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  залишається однаковою, як видно з графіків рис. 2.11.

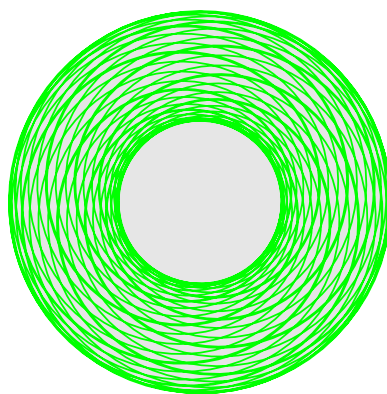
Випадок г) наявності надлишкового електрона на рівні  $|3\rangle$  відрізняється тим, що переходи  $1 - 3$  та  $2 - 3$  не завершуються повним зміщенням електрона на жоден з нижніх рівнів. Та якщо розташувати на рівні  $|3\rangle$  два надлишкових електрона, то вони здійснять синхронний перехід на нижні рівні, так що на кожен з рівнів  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  прийде по одному електрону, причому електронна заселеність рівнів  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  залишиться однаковою.



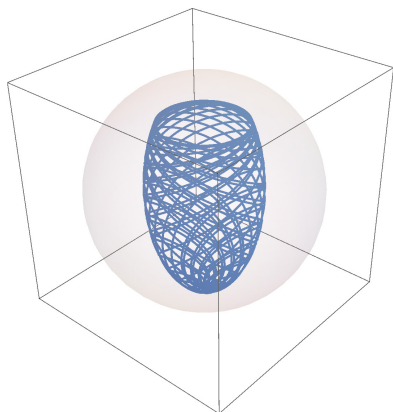
електрон на рівні  $|1\rangle$



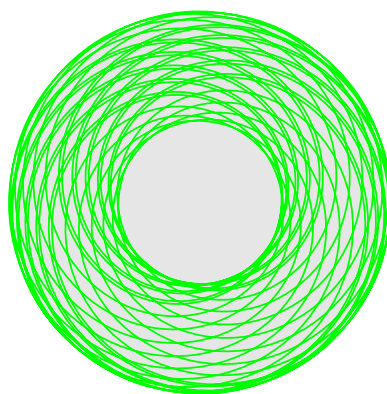
а)  $\mathbf{S}_3(t)$ ,  $\omega_{13} = 1.1\Omega_{13}$



$\mathbf{a}_3(t)$ ,  $\omega_{13} = 1.1\Omega_{13}$

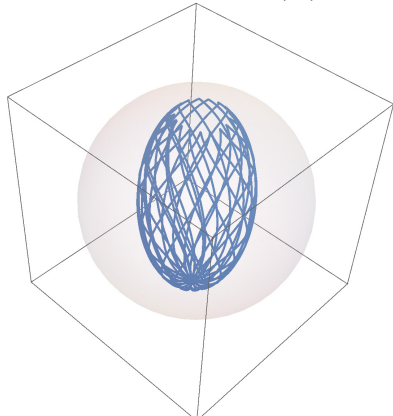


$\mathbf{S}_3(t)$ ,  $\omega_{13} = 0.9\Omega_{13}$

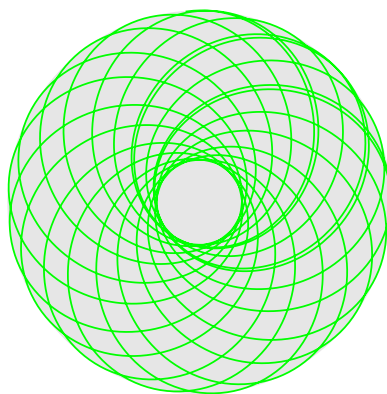


$\mathbf{a}_3(t)$ ,  $\omega_{13} = 0.9\Omega_{13}$

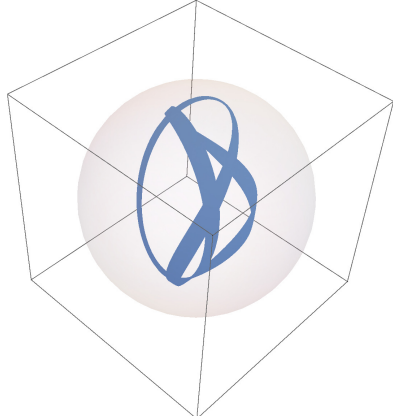
електрон на рівні  $|2\rangle$



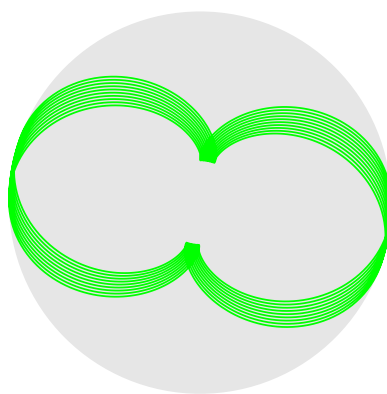
б)  $\mathbf{S}_2(t)$ ,  $\omega_{23} = 1.1\Omega_{23}$



$\mathbf{a}_2(t)$ ,  $\omega_{23} = 1.1\Omega_{23}$



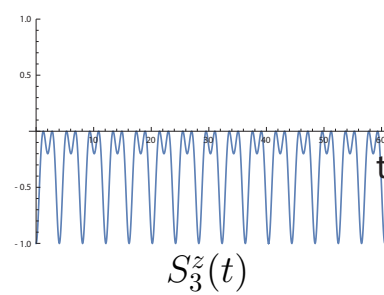
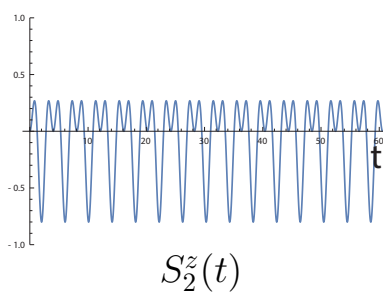
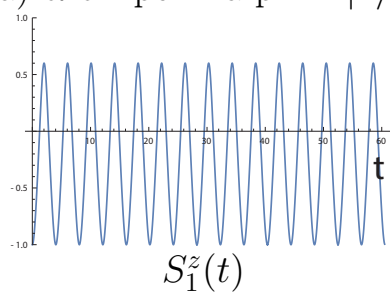
$\mathbf{S}_2(t)$ ,  $\omega_{23} = 0.9\Omega_{23}$



$\mathbf{a}_2(t)$ ,  $\omega_{23} = 0.9\Omega_{23}$

Рис. 2.7: Графіки залежностей від часу  $t$  з початковими умовами: а)  $\mathbf{a}_3(0) =$

а) електрон на рівні  $|1\rangle$



б) електрон на рівні  $|2\rangle$

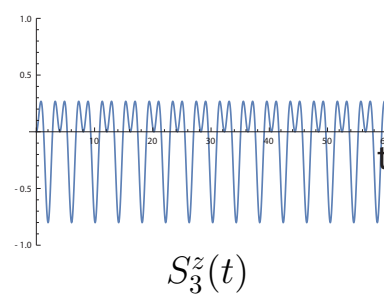
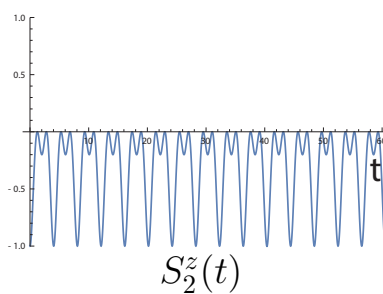
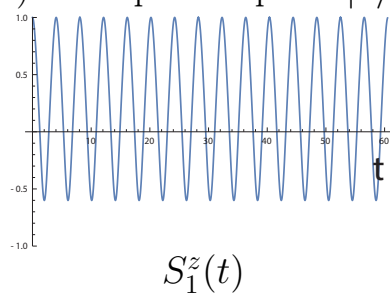
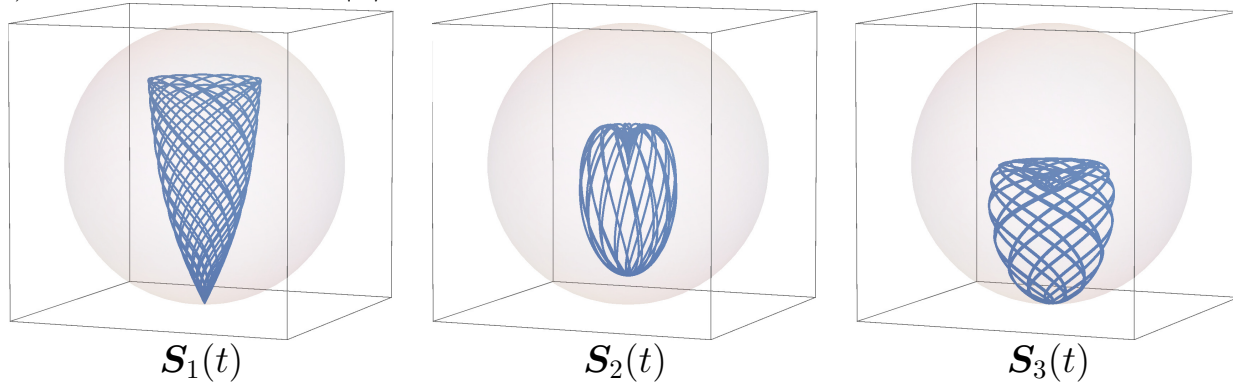
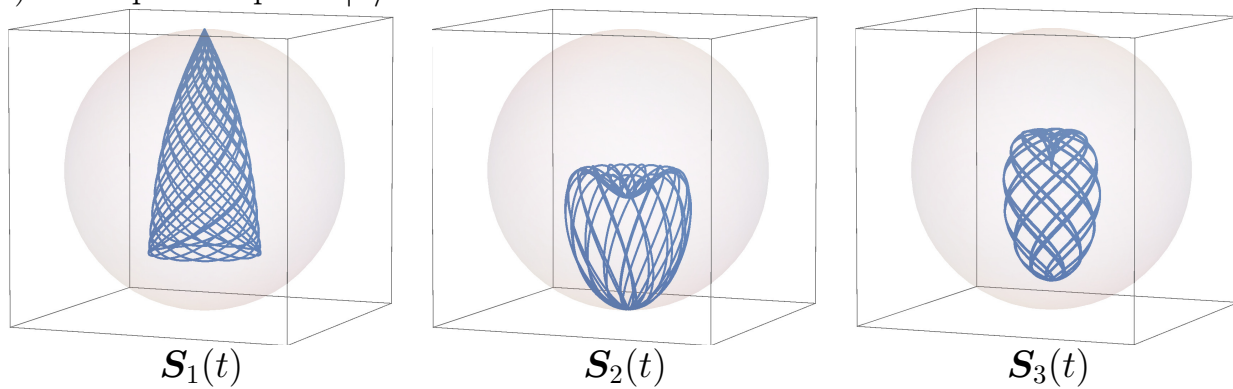


Рис. 2.8: Зміна в часі інверсної заселеності рівнів.

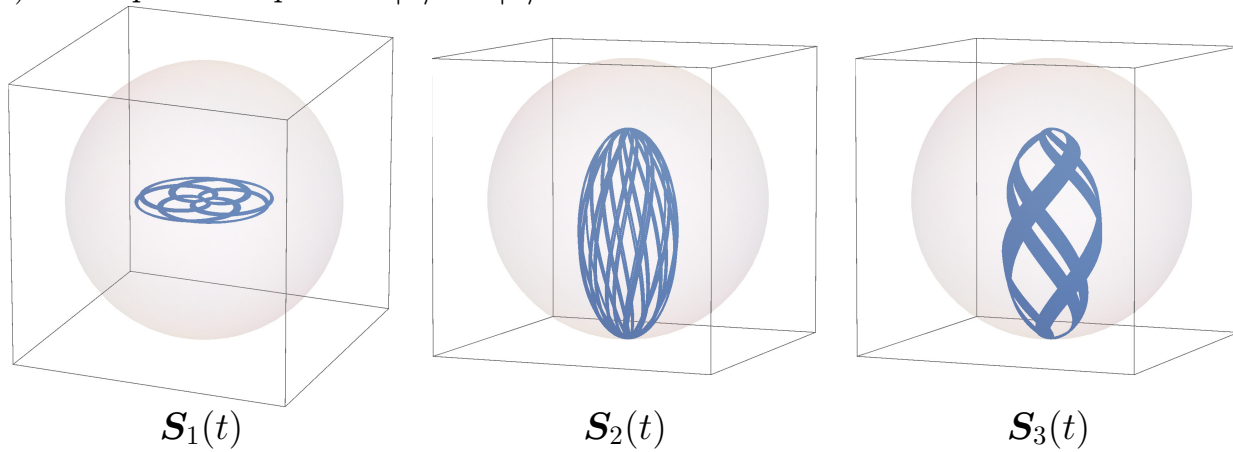
а) электрон на рівні  $|1\rangle$



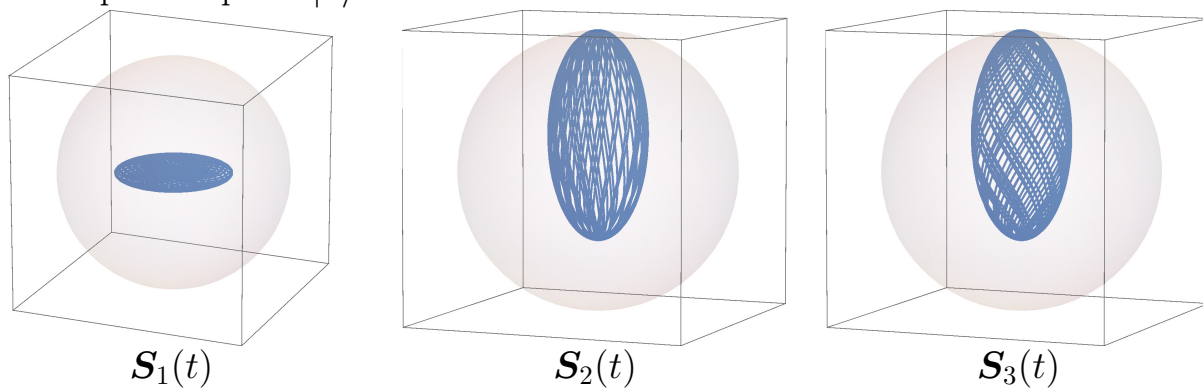
б) электрон на рівні  $|2\rangle$



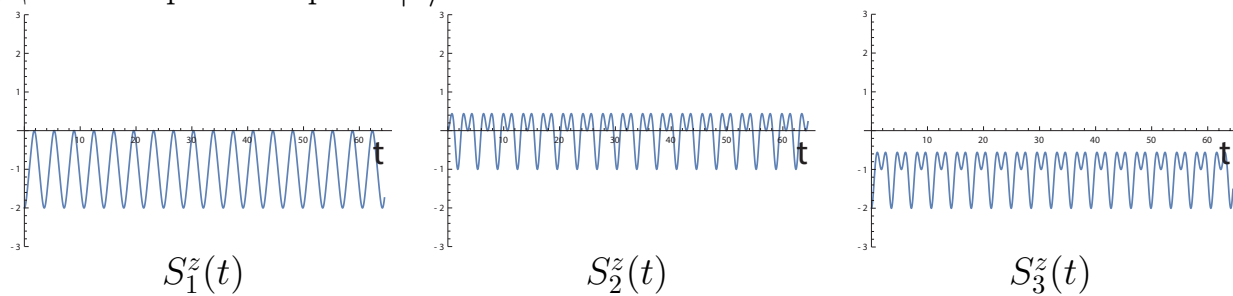
в) електрони на рівнях  $|1\rangle$  та  $|2\rangle$



г) электрон на рівні  $|3\rangle$



Два електрони на рівні  $|1\rangle$



Часова динаміка інверсних заселеностей рівнів.

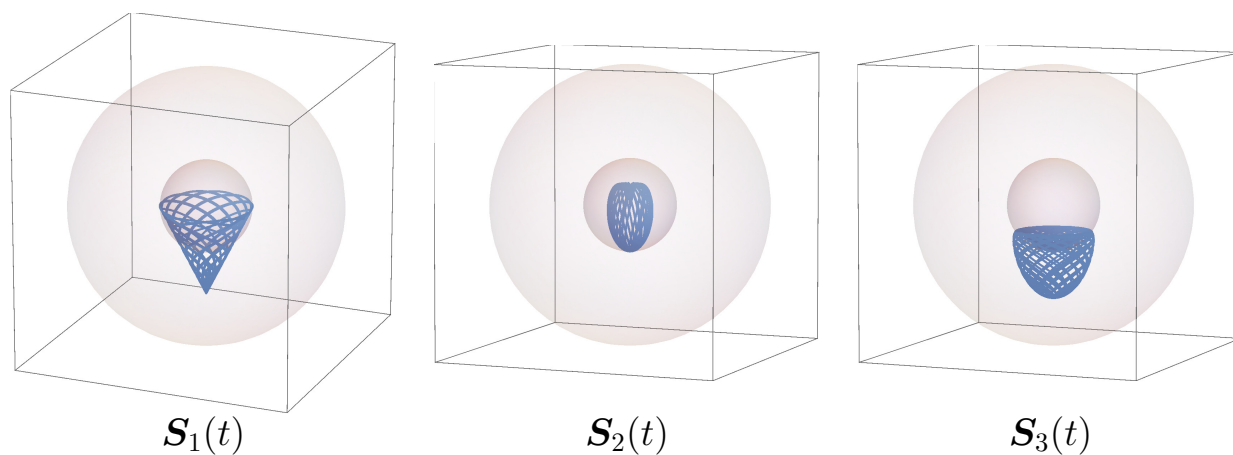
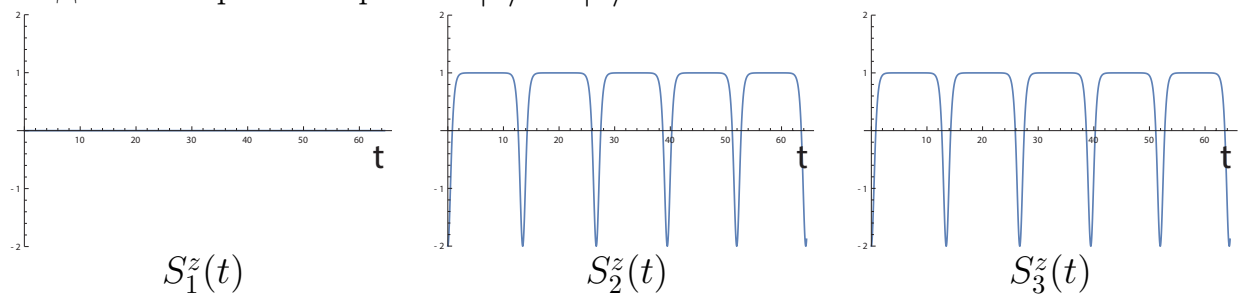


Рис. 2.10: Часова динаміка векторів  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  впродовж одного циклу Рабі.

По два електрони на рівнях  $|1\rangle$  та  $|2\rangle$



Часова динаміка інверсних заселеностей рівнів.

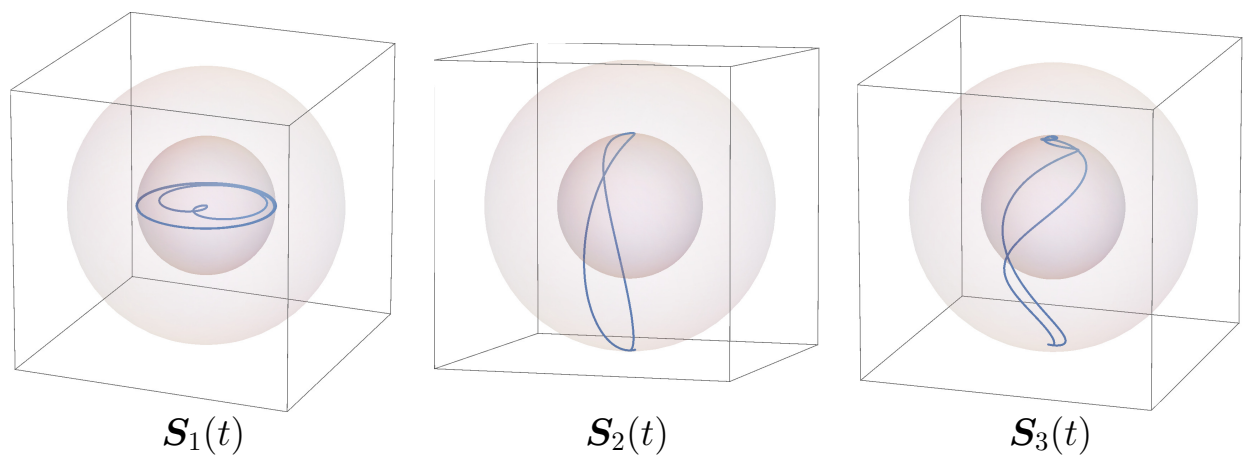


Рис. 2.11: Часова динаміка векторів  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  впродовж одного циклу Рабі.

### 2.4.2 Побудова інтегровної моделі в $\Lambda$ -конфігурації

Побудуємо загальну модель типу Джейнса–Каммінгса для трирівневого атома на коприєднаній орбіті алгебри петель  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$ . Алгебра петель є прямим добутком алгебри  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  та рядів Лорана  $\mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$ . Для побудови інтегровних моделей використовують функції зі сінченною кількістю доданків.

Спочатку будемо враховувати всі переходи і введемо базис алгебри  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  наступним чином

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 X_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & H_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 X_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Базис орієнтований на  $\Lambda$ -конфігурацію, бо в підалгебрі Картана (яка є максимальною комутативною підалгеброю) в якості базисних елементів обрано  $H_2$  та  $H_3$ . Очевидно, комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 [X_2, Y_2] &= H_2, & [H_2, X_2] &= 2X_2, & [H_2, Y_2] &= -2Y_2, \\
 [H_2, X_3] &= X_3, & [H_2, Y_3] &= -Y_3, & [H_2, X_1] &= -X_1, & [H_2, Y_1] &= Y_1, \\
 [X_3, Y_3] &= H_3, & [H_3, X_3] &= 2X_3, & [H_3, Y_3] &= -2Y_3, \\
 [H_3, X_2] &= X_2, & [H_3, Y_2] &= -Y_2, & [H_3, X_1] &= X_1, & [H_3, Y_1] &= -Y_1, \\
 [X_3, Y_2] &= X_1, & [X_3, Y_1] &= -X_1, & [Y_3, X_2] &= -Y_1, & [Y_3, X_1] &= Y_1.
 \end{aligned}$$

всі інші комутатори нульові.

Введення білінійної форми на алгебрі Лі

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr } AB$$

дозволяє визначити дуальний базис:

$$\begin{aligned}
 X_1^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_1^* &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 X_2^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & Y_2^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_2^* &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 X_3^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & Y_3^* &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H_3^* &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Елемент простору  $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ , дуального  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , запишемо у вигляді

$$\hat{\xi} = \lambda \hat{\xi}^{(-2)} + \hat{\xi}^{(-1)} + \frac{1}{\lambda} \hat{\xi}^{(0)}, \quad \hat{\xi}^{(k)}.$$

Величини  $S = \{S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_2^z, S_3^+, S_3^-, S_3^z\}$  розташуємо на полиці  $\hat{\xi}^{(0)}$ , вони утворюють алгебру  $\mathfrak{sl}(3)$ . Величини  $a = \{a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-, a_3^+, a_3^-\}$  розташуємо на полиці  $\hat{\xi}^{(-1)}$ , пари  $a_k^-, a_k^+$  утворюють алгебру Гейзенберга. При цьому

$$\begin{aligned}
 \hat{\xi}^{(0)} &= S_1^+ Y_1^* + S_1^- X_1^* + S_2^+ Y_2^* + S_2^- X_2^* + S_2^z H_2^* + S_3^+ Y_3^* + S_3^- X_3^* + S_3^z H_3^*, \\
 \lambda \hat{\xi}^{(-1)} &= a_1^+ Y_1^* + a_1^- X_1^* + a_2^+ Y_2^* + a_2^- X_2^* + a_3^+ Y_3^* + a_3^- X_3^*, \\
 \lambda^2 \hat{\xi}^{(-2)} &= c_2 H_2^* + c_3 H_3^*.
 \end{aligned}$$

Тоді

$$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2c_3 - c_2)\lambda + \frac{1}{3}(2S_3^z - S_2^z)\lambda^{-1} & S_1^+ \lambda^{-1} + a_3^+ & S_3^+ \lambda^{-1} + a_3^+ \\ S_1^- \lambda^{-1} + a_3^- & \frac{1}{3}(2c_2 - c_3)\lambda + \frac{1}{3}(2S_2^z - S_3^z)\lambda^{-1} & S_2^+ \lambda^{-1} + a_2^+ \\ S_3^- \lambda^{-1} + a_3^- & S_2^- \lambda^{-1} + a_2^- & -\frac{1}{3}(c_2 + c_3)\lambda - \frac{1}{3}(S_2^z + S_3^z)\lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Невідомими величинами в динамічній системі, що конструюється, служать  $S$  та  $a$ . Визначимо простір  $\mathcal{M}$ , координатами якого є змінні  $S$  та  $a$ . Конфігурацію даного простору визначимо нижче. Величини  $c_2$  та  $c_3$  є сталими параметрами, які ми побачимо нижче.

Визначимо білінійну форму в алгебрі петель за правилом

$$\langle A(\lambda), B(\lambda) \rangle_0 = \operatorname{res}_{\lambda=0} \operatorname{Tr} A(\lambda) B(\lambda).$$

Обраному набору змінних в дуальному просторі відповідають такі базисні елементи алгебри петель  $\tilde{\mathfrak{g}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \{Y_1, X_1, Y_2, X_2, H_2, Y_3, X_3, H_3\}, & \mathbf{B} &= \lambda^{-1}\{Y_1, X_1, Y_2, X_2, Y_3, X_3\}, \\ S_k &= \langle \hat{\xi}, Z_k \rangle_0, & a_k &= \langle \hat{\xi}, B_k \rangle_0, \\ S &= \{S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-, S_2^z, S_3^+, S_3^-, S_3^z\}, & a &= \{a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-, a_3^+, a_3^-\}. \end{aligned}$$

Простір гладких функцій на  $\mathcal{M}$  служить фазовим простором для майбутньої динамічної системи. Введемо дужку Пуассона за правилом

$$\{F_1, F_2\} = \sum_{a,b=0}^8 P_{ab} \frac{\partial F_1}{\partial \gamma_a} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma_b} + \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial F_1}{\partial a_k^-} \frac{\partial F_2}{\partial a_k^+} - \frac{\partial F_1}{\partial a_k^+} \frac{\partial F_2}{\partial a_k^-} \right), \quad P_{ab} = \langle \hat{\xi}, [Z_a, Z_b] \rangle_0.$$

Як показано в [37], наведена система має достатню кількість інтегралів руху. Знайдемо їх за допомогою інваріантних функцій  $\hat{\xi}$ -оператора, які виникають як поліноми по  $\lambda$  в рівнянні спектральної кривої

$$\det(\hat{\xi} - w \mathbb{I}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w^3 - I_2(\lambda)w - I_3(\lambda) = 0. \quad (2.33)$$

Існує зв'язок між поліномами  $I_2, I_3$  та інваріантними функціями  $\hat{\xi}$ -оператора:

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \xi^2 = h_2 \lambda^2 + h_1 \lambda + h_0 + h_{-1} \lambda^{-1} + h_{-2} \lambda^{-2}, \\ I_3(\lambda) &= \frac{1}{3} \text{Tr} \xi^3 = f_3 \lambda^3 + f_2 \lambda^2 + f_1 \lambda + f_0 + f_{-1} \lambda^{-1} + f_{-2} \lambda^{-2} + f_{-3} \lambda^{-3}. \end{aligned}$$

Інваріантними функціями на  $\mathcal{M}$  служать коефіцієнти при ступенях  $\lambda$  у  $I_2$  та  $I_3$ , які позначені через  $h_k$  та  $f_k$ . Випишемо функції  $h_k$ :

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{3} (c_2^2 - c_2 c_3 + c_3^2), \\ h_1 &= 0, \\ h_0 &= a_1^+ a_1^- + a_2^+ a_2^- + a_3^+ a_3^- + \frac{1}{3} (2c_2 - c_3) S_2^z + \frac{1}{3} (2c_3 - c_2) S_3^z, \\ h_{-1} &= S_1^- a_1^+ + S_1^+ a_1^- + S_2^- a_2^+ + S_2^+ a_2^- + S_3^- a_3^+ + S_3^+ a_3^-, \\ h_{-2} &= S_1^+ S_1^- + S_2^+ S_2^- + S_3^+ S_3^- + \frac{1}{3} ((S_2^z)^2 - S_2^z S_3^z + (S_3^z)^2). \end{aligned}$$

З них  $h_2, h_1$  — сталі, бо їм відповідають нульові потоки всіх гамільтоніанів, оскільки градієнти цих функцій перетворюються на нуль

$$\nabla h_2 = 0, \quad \nabla h_1 = 0.$$

Отже, величини  $c_2, c_3$  є сталими. Функція  $h_{-2}$  є анулятором дужки Пуассона, тобто для довільної функції  $F$  на  $\mathcal{M}$

$$\{h_{-2}, F\} = 0.$$



Функції  $h_0$  та  $h_{-1}$  можна обрати на роль гамільтоніанів, оскільки вони породжують нетривіальні фазові потоки і знаходяться в інволюції відносно дужки Пуассона:  $\{h_0, h_{-1}\} = 0$ .

Серед інваріантних функцій  $f_k$  дві

$$f_3 = \frac{1}{27}(2c_2^3 - 3c_2^2c_3 - 3c_2c_3^2 + 2c_3^3),$$

$$f_2 = 0$$

є сталими. Функції  $f_1, f_0, f_{-1}, f_{-2}$  виконують роль гамільтоніанів, оскільки породжують нетривіальні потоки на  $\mathcal{M}$ . Цікавою є функція

$$f_{-3} = \frac{1}{27}(2(S_2^z)^3 - 3(S_2^z)^2S_3^z - 3S_2^z(S_3^z)^2 + 2(S_3^z)^3) + \frac{1}{3}S_2^z(S_1^+S_1^- + S_2^+S_2^- - 2S_3^+S_3^-)$$

$$+ \frac{1}{3}S_2^z(S_1^+S_1^- - 2S_2^+S_2^- + S_3^+S_3^-) + S_1^+S_2^+S_3^- + S_1^-S_2^-S_3^+.$$

яка служить анулятором дужки Пуассона. Функції  $h_{-2}$  та  $f_{-3}$  визначають многовид  $\mathcal{M}$ , який служить фазовим простором даної динамічної системи, а саме:

$$h_{-2} = c_{-2}, \quad f_{-3} = c_{-3}.$$

В термінах векторів  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$

$$h_{-2} = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \mathbf{S}_3^2 - \frac{5}{6}((S_2^z)^2 - S_2^zS_3^z + (S_3^z)^2),$$

$$f_{-3} = \frac{1}{3}(S_2^z + S_3^z)\mathbf{S}_1^2 + \frac{1}{3}(S_2^z - 2S_3^z)\mathbf{S}_2^2 + \frac{1}{3}(S_3^z - 2S_2^z)\mathbf{S}_3^2$$

$$+ \frac{8}{27}(S_2^z + S_3^z)(S_2^z - 2S_3^z)(S_3^z - 2S_2^z) + 2S_1^x(S_2^xS_3^x + S_2^yS_3^y) + S_1^y(S_2^xS_3^y - S_2^yS_3^x).$$

Перевірка на чисельних розв'язках усереднених рівнянь Гейзенберга підтверджує наявність таких сталих величин у даній моделі.

Далі покладено рівними нулю змінні  $a_1^+, a_1^-$ , оскільки перехід 1-2 є забороненим. Побудуємо гамільтоніан наступним чином

$$\mathcal{H} = \omega h_0 + g h_{-1}$$

$$= \omega(a_2^+a_2^- + a_3^+a_3^-) + \frac{\omega}{3}(2c_2 - c_3)S_2^z + \frac{\omega}{3}(2c_3 - c_2)S_3^z + g(S_2^-a_2^+ + S_2^+a_2^- + S_3^-a_3^+ + S_3^+a_3^-).$$
(2.34)

Якщо покласти

$$c_2 = \Omega_{23}/\omega, \quad c_3 = \Omega_{13}/\omega,$$

то запропонований гамільтоніан (2.34) служитиме для опису трирівневої системи, яку опромінюють когерентним електромагнітним полем з частотою  $\omega$ .

Рівняння руху такої системи мають вигляд

$$\frac{\partial S_k}{\partial t} = \{S_k, \mathcal{H}\}, \quad \frac{\partial a_k}{\partial t} = \{a_k, \mathcal{H}\}.$$

Вони збігаються з усередненням рівнянь (2.8), якщо  $\omega_{13} = \omega_{23} = \omega$ ,  $g_{13} = g_{23} = g$ . Розв'язок такої системи можна отримати в термінах Абелевих функцій на тригональній кривій роду 5, що задається рівнянням (2.33). Побудова такого розв'язку є предметом окремого дослідження. Більш загальна постановка задачі розглянута у [37].

## 2.5 Результати

1. Вивчено квантовомеханічну модель взаємодії трирівневого атома із двомодовим електромагнітним полем. Зокрема, опановано зв'язок між алгеброю операторів електронних переходів в атомі та алгеброю  $\mathfrak{sl}(3)$  у випадку трирівневого атома, і прямим обчисленням отримано рівняння Гейзенберга для всіх трьох можливих конфігурацій даної моделі ( $\Lambda$ ,  $V$ , та каскадної  $\Xi$ )
2. Методом усереднення по власних станах оператора Гамільтона отримано динамічні рівняння, які є класичним аналогом рівнянь Гейзенберга, та проведено аналіз чисельних розв'язків таких рівнянь для  $\Lambda$ -конфігурації. Проведено порівняння отриманих розв'язків із відомими в літературі результатами експериментальних досліджень в рамках згаданої моделі.
3. Запропоновано інтегровну модель, яка дає ті самі динамічні рівняння. Модель побудовано за стандартною схемою орбітного методу в теорії інтегровних систем. Така модель є мультигамільтоновою, її динаміка відбувається на копрієднаній орбіті алгебри петель (в даному випадку  $\mathfrak{sl}(3) \otimes \mathcal{P}(\lambda, \lambda^{-1})$ ), що є Пуассоновим простором. За спеціального вибору гамільтоніана і дужки Пуассона дістаємо динамічні рівняння аналогічні отриманим з квантомеханічної моделі. Схема побудови динамічної моделі гарантує її повну інтегровність. Однак інтегрування є окремою задачею і потребує застосування теорії абелевих функцій на алгебраїчній кривій, яка виникає як спектральна крива запропонованої моделі.

## 2.6 Висновки

1. На основі аналізу чисельних розв'язків динамічних рівнянь бачимо, що модель є дієвою і дозволяє описувати широке коло нелінійних процесів, пов'язаних із взаємодією трирівневого атома із двомодовим електромагнітним полем.

Зокрема,

- у випадку збудження лише однієї моди електромагнітного поля, поведінка системи аналогічна дворівневій моделі. Режим із «зависанням» електрона на верхньому рівні виникає, коли енергії випромінювання не більше, ніж для переведення електрона на верхній рівень.

- При включенні обох мод в резонансному режимі спостерігається 1) запирання електронів, коли вони розташовані лише на одному з нижніх рівнів, і 2) режим «зависання» електрона на верхньому рівні при балансі енергій випромінювання та переходів.
2. Інтегрована модель дає опис фазового простору в термінах змінних, що є усередненням операторів електронних переходів і які можемо вважати проекціями власного моменту електронних переходів атома.

## Бібліографія

1. *Larson J.* Extended Jaynes-Cummings models in cavity QED [Text]: Ph.D. thesis / J. Larson; The Royal Institute of Technology, Albanova. — 2005.
2. *Jaynes E.* Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser / E. Jaynes, F. Cummings // *Proceedings of the IEEE*. — 1963. — Vol. 51. — Pp. 89–109.
3. *Eberly J. H.* Periodic Spontaneous Collapse and Revival in a Simple Quantum Model / J. H. Eberly, N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon // *Physical Review Letters*. — 1980. — Vol. 44. — Pp. 1323–1326.
4. *Gea-Banacloche J.* Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial fields / J. Gea-Banacloche // *Physical Review A*. — 1991. — Vol. 44. — Pp. 5913–5931.
5. *Gea-Banacloche J.* Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus / J. Gea-Banacloche // *Physical Review Letters*. — 1990. — Vol. 65. — Pp. 3385–3388.
6. *Phoenix S. J. D.* Comment on “Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: An example of state preparation by a quantum apparatus” / S. J. D. Phoenix, P. L. Knight // *Physical Review Letters*. — 1991. — Vol. 66. — Pp. 2833–2833.
7. *Phoenix S. J. D.* Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model / S. J. D. Phoenix, P. L. Knight // *Physical Review A*. — 1991. — Vol. 44. — Pp. 6023–6029.
8. *Meystre P.* Squeezed states in the Jaynes-Cummings model / P. Meystre, M. Zubairy // *Physics Letters A*. — 1982. — Vol. 89. — Pp. 390–392.
9. *Heidmann A.* Squeezing in a Rydberg Atom Maser / A. Heidmann, J. M. Raimond, S. Reynaud // *Physical Review Letters*. — 1985. — Vol. 54. — Pp. 326–328.
10. *Kukliński J. R.* Strong squeezing in the Jaynes-Cummings model / J. R. Kukliński, J. L. Madajczyk // *Physical Review A*. — 1988. — Vol. 37. — Pp. 3175–3178.

11. *Bardroff P. J.* Quantum state endoscopy: Measurement of the quantum state in a cavity / P. J. Bardroff, E. Mayr, W. P. Schleich // *Physical Review A*. — 1995. — Vol. 51. — Pp. 4963–4966.
12. *Brune M.* Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive detection / M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre et al. // *Physical Review Letters*. — 1990. — Vol. 65. — Pp. 976–979.
13. *Bodendorf C. T.* Quantum-state reconstruction in the one-atom maser / C. T. Bodendorf, G. Antesberger, M. S. Kim, H. Walther // *Physical Review A*. — 1998. — Vol. 57. — Pp. 1371–1378.
14. *Kim M. S.* Scheme for direct observation of the Wigner characteristic function in cavity QED / M. S. Kim, G. Antesberger, C. T. Bodendorf, H. Walther // *Physical Review A*. — 1998. — Vol. 58. — Pp. R65–R68.
15. *Santos M. F.* Conditional Large Fock State Preparation and Field State Reconstruction in Cavity QED / M. F. Santos, E. Solano, R. L. de Matos Filho // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 87.
16. *Raimond J.-M.* [Atoms and Cavities: The Birth of a Schrodinger Cat of the Radiation Field](#) / J.-M. Raimond, S. Haroche // Springer Series in OPTICAL SCIENCES. — Springer Berlin Heidelberg, 1999. — Pp. 40–53.
17. *Bužek V.* Schrodinger-cat states in the resonant Jaynes-Cummings model: Collapse and revival of oscillations of the photon-number distribution / V. Bužek, H. Moya-Cessa, P. L. Knight, S. J. D. Phoenix // *Physical Review A*. — 1992. — Vol. 45. — Pp. 8190–8203.
18. *Walls D. F.* Effect of dissipation on quantum coherence / D. F. Walls, G. J. Milburn // *Physical Review A*. — 1985. — Vol. 31. — Pp. 2403–2408.
19. *Agarwal G. S.* Inhibition of Decoherence due to Decay in a Continuum / G. S. Agarwal, M. O. Scully, H. Walther // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 86. — Pp. 4271–4274.
20. *Varcoe B. T. H.* Preparing pure photon number states of the radiation field / B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, H. Walther // *Nature*. — 2000. — Vol. 403. — Pp. 743–746.

21. *Larson J.* Photon filters in a microwave cavity / J. Larson, S. Stenholm // *Journal of Modern Optics*. — 2003. — Vol. 50. — Pp. 2705–2714.
22. *Landau L. D.* Quantum Mechanics 3rd ed. / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. — Pergamon Press, Oxford. — 1977.
23. *Zener C.* Non-adiabatic crossing of energy levels / C. Zener // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*. — 1932. — Vol. 137. — Pp. 696–702.
24. *Rosen N.* Double Stern-Gerlach Experiment and Related Collision Phenomena / N. Rosen, C. Zener // *Physical Review*. — 1932. — Vol. 40. — Pp. 502–507.
25. *Demkov Y. N.* Hypergeometric model for two-state approximation in collision theory / Y. N. Demkov, M. Kunike // *Vestn. Leningr. Univ. Ser. Fiz. Khim.* 16, 39. — 1969.
26. *Meyer G. M.* Quantum theory of the mazer. I. General theory / G. M. Meyer, M. O. Scully, H. Walther // *Physical Review A*. — 1997. — Vol. 56. — Pp. 4142–4152.
27. *Wildfeuer C.* Generation of entangledN-photon states in a two-mode Jaynes-Cummings model / C. Wildfeuer, D. H. Schiller // *Physical Review A*. — 2003. — Vol. 67.
28. *Mandel L.* Optical Coherence and Quantum Optics / L. Mandel, E. Wolf. — Cambridge University Press. — 1995.
29. *shen Li X.* A generalized three-level Jaynes-Cummings model / X. shen Li, N. yu Bei // *Physics Letters A*. — 1984. — Vol. 101. — Pp. 169–174.
30. *Bogolubov N.* Two-phonon process in a three-level system / N. Bogolubov, F. L. Kien, A. Shumovski // *Physics Letters A*. — 1984. — Vol. 101. — Pp. 201–203.
31. *Shumovsky A. S.* On a Jaynes-Cummings type model with multiphoton transitions / A. S. Shumovsky, E. I. Aliskenderov, F. L. Kien, N. D. Vinh // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1986. — Vol. 19. — Pp. 3607–3617.
32. *Gerry C. C.* Dynamics of a Raman coupled model interacting with two quantized cavity fields / C. C. Gerry, J. H. Eberly // *Physical Review A*. — 1990. — Vol. 42. — Pp. 6805–6815.

33. *Cardimona D. A.* Quantum collapses and revivals in a nonlinear Jaynes-Cummings model / D. A. Cardimona, V. Kovanis, M. P. Sharma, A. Gavrielides // *Physical Review A*. — 1991. — Vol. 43. — Pp. 3710–3723.
34. *Wu Y.* Effective Raman theory for a three-level atom in the Lambda configuration / Y. Wu // *Phys. Rev. A* 54, 1586. — 1996.
35. *Bogolubov N. N.* On the exactly soluble model in quantum electrodynamics / N. N. Bogolubov, F. L. Kien, A. S. Shumovsky // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1986. — Vol. 19. — Pp. 191–203.
36. *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика / М.: ФИЗМАТЛИТ. — 2003.
37. *Skrypnik T.* Generalizedn-level Jaynes-Cummings and Dicke models, classical rational-matrices and algebraic Bethe ansatz / T. Skrypnik // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2008. — Vol. 41. — P. 475202.