Опуклі структури на графах

Гапоненко В. О.

керівник: к.ф.-м.н. Козеренко С.О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

Опуклий простір

Означення

Сім'я підмножин $\mathcal{C}$ множини X називається **опуклістю** на X якщо наступні аксіоми правдиві:

1. Порожня множина $\emptyset$ та сам X входять в $\mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}$ закрита відносно перетинів.
3. $\mathcal{C}$ закрита відносно вкладених об'єднань.

Тоді пару $(X, \mathcal{C})$ називають **опуклим простором**, а елементи $\mathcal{C}$ – **опуклими множинами**.

Опуклий простір

Означення

Графовим опуклим простором є пара $(G, \mathcal{C})$, де G є зв'язним графом з множиною вершин V та опуклістю на $\mathcal{C}$, що пара $(V, \mathcal{C})$ є опуклим простором, що задовольняє попередні аксіоми

Інтервальна функція

Розглянемо на множині X функцію $I : X \times X \to 2^X$, що має наступні властивості:

1. Для будь-яких двох елементів $a, b \in X$ справджується $a, b \in I(a, b)$.
2. Функція є симетричною $I(a, b) = I(b, a)$.

Означення

Тоді I називають **інтервальним оператором** на X, а $I(a, b)$ є **інтервалом між** a **та** b.

Інтервальний простір

Означення

Пару (X, I) називають **інтервальним простором**

Означення

Підмножину C ми називаємо **опуклою** тільки тоді, коли $I(x, y) \subseteq C$ для всіх $x, y \in C$

Приклад

Геодетична опуклість є опуклістю, що породжена інтервальною функцією, де для пари вершин x, y інтервалом є всі найкоротші шляхи між ними.

Приклад

Для **digital опуклості** множина S є опуклою множиною тоді і тільки тоді, коли існує $W \subseteq V$, що $S = V \setminus N[W]$

Означення

All-path опуклість є опуклістю, що породжена інтервальною функцією, де для пари вершин x, y інтервалом є всі прості шляхи між ними.

All-path опуклість

Приклад

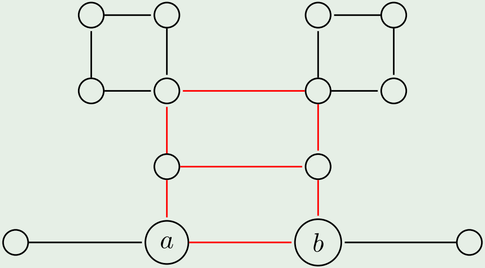


Рис.: Граф G з інтервалом $I(a, b)$

Характеризація AP-опуклих множин

Теорема

(Fabio Protti, and Joao VC Thompson, 2020) *Зафіксуємо $S \subset V$. Тоді S є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли $S = V$, або для кожного зв'язної компоненти G_i, що $V(G_i) \subset V(G - S)$, існує тільки одна сусідня вершина з S.*

Характеризація AP-опуклих множин

Означення

Блоком графа G називають його максимальний двозв'язний підграф.

Теорема

Нехай G є зв'язним графом, $A \subset V(G)$ та $|A| \geq 2$. Тоді множина A є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли породжений підграф $G[A]$ є зв'язним об'єднанням блоків в G.

Характеризація AP-опуклих множин

Означення

Нехай $A \subset V(G)$ множина вершин у зв'язному графі G та $x \in V(G)$. **Сильними воротами** для x у A називається вершина $g \in A$ така, що для кожної вершини $a \in A$, всі найкоротші шляхи від x до a містить g.

Теорема

Нехай G є зв'язним графом, $A \subset V(G)$ та $|A| \geq 2$. Тоді множина A є AP-опуклою тоді і тільки тоді, коли кожна вершина $x \in V(G)$ має сильні ворота в A.

Характеризація графів блоків

Теорема

Для зв'язного графа G наступні твердження еквівалентні:

1. *G є графом блоків.*
2. *$N_G[u]$ є ap-опуклою для $\forall u \in V(G)$.*
3. *$N_G[u]$ є множиною із сильними воротами для $\forall u \in V(G)$.*

Алгоритм перевірки на ap-опуклість

Algorithm 2 Алгоритм перевірки на ap-опуклість

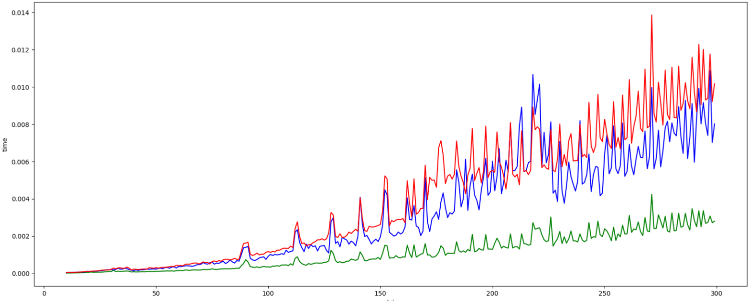
```
function TRIGGERDFS(S)
    visited ← S
    blocked ← S
    ap-convex ← True
    for v ∈ S do
        strongGates ← v                          ▷ Відпрацює |S| разів
        for u ∈ N(v) do                          ▷ Відпрацює |E_S| разів
            if u is not visited then
                DFS(u)
            end if
        end for
    end for
end function
function DFS(v)
    visited[v] ← True                            ▷ Відпрацює |V \ S| разів
    for u ∈ N(v) do                              ▷ Відпрацює |E_{V\S}| разів
        if u is not visited then
            DFS(u)
        else                                     ▷ Відпрацює |E_{V\S}|/2 разів
            if u is in blocked and u ≠ strongGates then
                ap-convex ← False
            end if
        end if
    end for
end function
```

Алгоритм перевірки на ар-опуклість

$$T(G) = |V \setminus S|O(1) + |S|O(1) + 2|E_S| + 2|E_{V\setminus S}| + 4\frac{|E_{V\setminus S}|}{2} + 3O(1) \leq$$
$$|V|O(1) + 4|E| + 4|E| + 3O(1) = |V|O(1) + 8|E| + 3O(1)$$

$$O(G) = |V| + |E|$$
$$M(G) = |E| + |V| + |S| \leq |E| + 2|V|$$

Алгоритм перевірки на ap-опуклість



O(x) – кількість вершин графа
O(y) – час роботи алгоритма (сек.)
– новий алгоритм
– жадібний алгоритм 1
– жадібний алгоритм 2

Література

Fabio Protti, and Joao VC Thompson. "All-path convexity: Combinatorial and complexity aspects."Ars Combinatoria 148 (2020): 77-87.

Sampathkumar, E. "Convex sets in a graph."Indian J. pure appl. Math 15.10 (1984): 1065-1071.

van De Vel, Marcel LJ. Theory of convex structures. Elsevier, 1993.

Козеренко С., Гапоненко В., "Критерії all-path опуклих множин у зв'язних графах XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, 11.05.2023