Безпікові функції на зв'язних графах

Зимовець Р. О.

керівник к.ф.-м.н. Козеренко С. О.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”
Кафедра математики факультету інформатики

Основні терміни

Нехай $G = (V, E)$ - скінченний зв'язний граф.

Означення

Функція $f : V \to \mathbb{R}$ називається безпіковою, якщо для всіх різних $u, v \in V$ та $x \in [u, v]_G \setminus \{u, v\}$ виконано $f(x) \le \max\{f(u), f(v)\}$, причому рівність досягається лише у випадку $f(u) = f(v)$.

Приклад

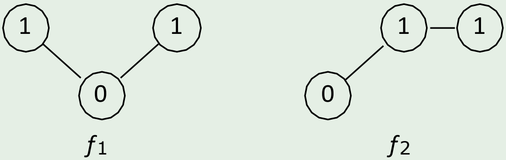

Рис.: Безпікова функція f_1 та небезпікова f_2

Цілком опуклі множини

Нехай G - граф, а d_G позначає звичайну відстань на $V(G)$.

Означення

Шлях $u_1 - \cdots - u_m$ у графі G називається геодезичним, якщо $d_G(u_{i-1}, u_{i+1}) = 2$ для всіх $2 \le i \le m-1$.

Означення

Множина вершин $A \subset V(G)$ називається цілком опуклою, якщо для всіх пар вершин $u, v \in A$ вона містить також вершини всіх локально-найкоротших шляхів між u, v у G.

Цілком опуклі множини

Теорема

Кожна цілком опукла множина є опуклою.

Приклад

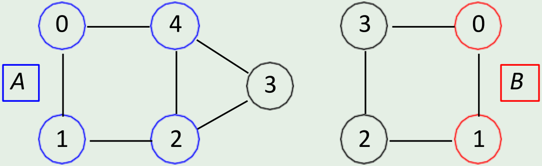

Рис.: Цілком опукла множина A та множина B, яка не є цілком опуклою

З прикладу **опуклої** множини B також випливає, що не кожна опукла множина є цілком опуклою. А саме, маємо локально-найкоротший шлях $0 - 3 - 2 - 1$, який не лежить у B.

Базові властивості безпікових функцій

Лема

Нехай функція f визначена на графі G. Тоді наступні умови еквівалентні:

1. f – *безпікова на графі* G;
2. f – *локально безпікова на графі* G;
3. *звуження* f *на будь-який геодезичний маршрут графа* G *безпікове.*

Лема

([2], Chepoi 1997) *Якщо f безпікова на графі G, тоді кожна множина рівня $[f \le \alpha]$ є цілком опуклою.*

Лема

([2], Chepoi 1997) *Якщо f безпікова на графі G, H - зв'язний породжений підграф G, тоді $f|_H$ - безпікова на H.*

Графи блоків

Одним із відомих підкласів хордальних графів є графи блоків.

Означення

Блоком графа називається максимальний його двозв'язний підграф.

Означення

([3], Harary 1963) Графом блоків називається граф, у якого кожен блок є повним.

Наприклад, кожне дерево є графом блоків.

Теорема 1

Графи блоків можна охарактеризувати за допомогою опуклих і цілком опуклих множин.

Теорема

Для зв'язного графа G наступні умови еквівалентні:

1. *G граф блоків;*
2. *кожна зв'язна множина вершин у G є опуклою;*
3. *кожна зв'язна множина вершин у G є цілком опуклою.*

Відношення на множині безпікових функцій

Означення

Нехай f і g - безпікові функції на графі G. $\prec$ - передпорядок на множині безпікових функцій, такий що: $f \prec g$, тоді і тільки тоді, коли кожна множина рівня функції f є множиною рівня функції g.

Наприклад, постійні функції є мінімальними відносно $\prec$.

Означення

Нехай f і g - безпікові функції на графі G. $\sim$ - відношення еквівалентності на множині безпікових функцій, таке що:
$f \sim g \Longleftrightarrow f \prec g$ та $g \prec f$.

Іншими словами, дві безпікові функції є еквівалентними, якщо вони мають однакові множини рівнів.

Відношення на множині безпікових функцій

Маємо ланцюг довжини 4. Розглянемо дві безпікові функції на ньому. У прикладі функції описано за допомогою ліній рівня, на яких розміщено вершини ланцюга. Значення рівня вершини відповідає значенню відповідної функції на цій вершині.

Приклад

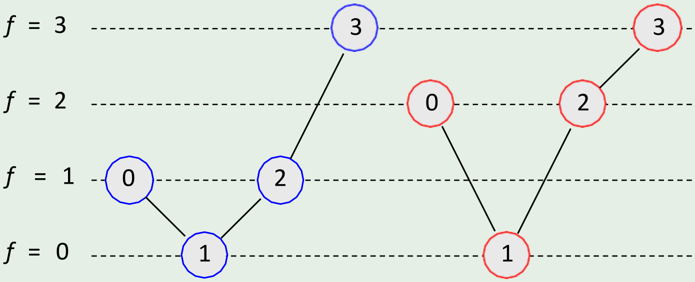

Рис.: Синя та червона – еквівалентні безпікові функції

Теорема 2

Означення

Кластер-графом називається граф, у якого кожна компонента зв'язності є повним графом.

Теорема

Нехай G – зв'язний граф блоків, а $\mathcal{L}$ – родина його непорожніх зв'язних підграфів із $G \in \mathcal{L}$. Тоді існує безпікова функція f на G така, що $\mathcal{L}$ є родиною підграфів, породжених множинами рівнів f тоді й тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

1. *$\mathcal{L}$ лінійно впорядкована за включенням;*
2. *для всіх підграфів $H_1, H_2 \in \mathcal{L}$ таких, що H_2 – наступник H_1 виконано $V(H_2 \setminus H_1) = N_{H_2}(V(H_1))$ та $H_2 \setminus H_1$ – кластер-граф.*

Теорема 2

Нехай, за Теоремою 2, на графі блоків G існує безпікова функція f з множинами рівнів: $L = \{\{3, 4\}, \{3, 4, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 2, 5, 6, 1, 8\}, V(G)\}$.

Приклад

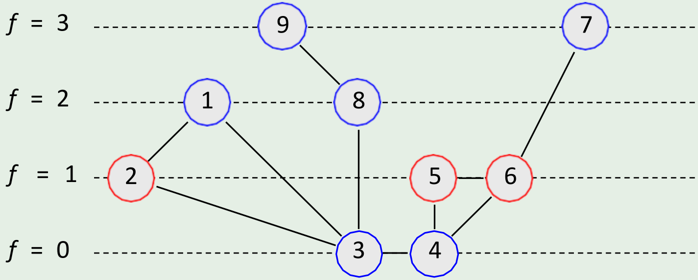

Рис.: Безпікова функція f на графі блоків G

Зокрема, для $H_2 = \{3, 4, 2, 5, 6\}$ - наступника для $H_1 = \{3, 4\}$ маємо: $H_2 \setminus H_1 = G[\{2, 5, 6\}]$ - кластер-граф.

Означення

Кількістю безпікових функцій на графі G називається потужність фактор-множини: $P(G)/\sim$, де $P(G)$ - множина усіх безпікових функцій на графі G, $\sim$ - відношення еквівалентності на множині $P(G)$

Теорема

Кількість нееквівалентних безпікових функцій на повному графі K_n рівна n-му впорядкованому числу Белла (інша назва – числа Фубіні):

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Алгоритми аналізу властивостей безпікових функцій

1. *Перевірка функції на безпіковість*
   Вхідні дані: f - дійснозначна функція на деякому графі
   Вихідні дані: Boolean
2. *Знаходження множин рівня безпікових функцій*
   Вхідні дані: f - дійснозначна функція на деякому графі G
   Вихідні дані: впорядкована за $\subset$ сім'я підмножин $V(G)$
3. *Побудова безпікової функції за заданим графом блоків та множиною фільтрацій*
   Вхідні дані:
   - граф блоків G
   - впорядкована за $\subset$ сім'я підмножин $V(G)$

   Вихідні дані: f - дійснозначна функція на графі G

Алгоритм підрахунку безпікових функцій

Підрахунок безпікових функцій на довільному дереві
Вхідні дані: скінченне дерево
Вихідні дані: ціле число

Література

- Р. Зимовець та С. Козеренко, Безпікові функції на графах блоків, XI Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків, травень 2023, Київ, Україна.
- V.D. Chepoi, Peakless functions on graphs, Discrete Appl. Math. **73** (1997), 175–189.
- F. Harary, A characterization of block graphs, Canad. Math. Bull. **6** (1963), 1-6.
- F. Harary, Graph theory. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1969, pp. 274.
- H. Busemann, The Geometry of Geodesics (Academic Press, New York, 1955).
- M. van de Vel. Theory of Convex Structures (Elsevier, Amsterdam, 1993).