1. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов.– М.: Госстройиздат, 1961.– Т. 2.– 544 с.
2. *Булавацкий В. М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики.– К.: Наук. думка, 1993.– 132 с.
3. *Власюк А. П., Жеребятьев О. В.* Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва.– Рівне, 1998.– Вип. 1.– Ч. 1.– С. 40–45.
4. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язування задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням масопереносу солей // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.– 2000.– Вип. 2.– С. 197–200.
5. *Мартинюк П. М.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням переносу солей: Автореферат дис. ...канд. фіз.-мат. наук / АН України. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова.– К., 2002.– 20 с.
6. *Власюк А. П., Кузло М. Т.* Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах // Меліорація та водне господарство: міжвідомчий тематичн. наук. зб.– К.: Аграрна наука, 2000.– Вип. 87.– С. 43–46.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.– М.: Наука, 1983.– 616 с.

V. Bulavatskyi, V. Lavryk

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY - VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF FILTRATIONAL CONSOLIDATION WITH ALLOWANCE SATURATION OF A MASSIF BY A SALINE SOLUTION AND CREEP OF A GROUND ATOMY

The numerical method of the solution of onedimensional non-steady boundary value problem of filtrational seal of a ground massif arranged on the opaque basis and saturated saline solution under condition of a creep of a ground atomy is offered.

УДК 517.927.6

Захарійченко Ю. О.

ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглядається крайова задача для системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. Розроблено новий підхід до дослідження такого класу задач, згідно з яким початкову задачу зведено до відповідної системи інтегральних рівнянь.

Дослідження та аналіз теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом останнім часом інтенсивно зростає. У статті [1] наведено загальну характеристику імпульсних систем диференціальних рівнянь, досліджено лінійні, а також ряд нелінійних імпульсних систем. Нижче розглядається клас таких систем, про розв'язки яких відома додаткова інформація. В статті розглядається метод дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та додатковими умовами, розроблений у праці [2].

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \qquad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \qquad (2)$$

$$\Phi_s(x) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, \nu}, \quad \nu > m, \qquad (3)$$

в якій $A(t)$ – неперервна при $t \in I$, де $I = [0;T]$, матриця розміру $m \times m$, $f: I \to R^m$, S_i – сталі матриці розмірності $m \times m$, вектори $\gamma_i \in R^m$, Φ_s – лінійні неперервні функціонали, t_i – фіксовані моменти імпульсного впливу, $\alpha_s \in R$, $s = \overline{1, \nu}$.

Ставиться задача знайти таку вектор-функцію $x(t)$, щоб задовольнялась система диференціальних рівнянь (1) при $t \in I \setminus \{t_i\}$, справджувались імпульсні умови (2) та обмеження (3).

Якщо така вектор-функція $x(t)$ існує, то задачу, що розглядається, вважатимемо сумісною. Інакше задача несумісна.

2. Допоміжна задача. Розглянемо задачу з параметрами

$$\frac{dy(t)}{dt}+A(t)y(t)+B(t)\lambda=f(t)\cdot,\ t\in I\setminus\{t_i\} \quad (4)$$

$$y(t_i+0)=S_i y(t_i-0)+\gamma_i+\mu_i,\ i=\overline{1,p}, \quad (5)$$

$$y(t_i+0)=S_i y(t_i-0)+\gamma_i,\ i=\overline{p+1,l}, \quad (6)$$

$$\Phi_s(y)=\alpha_s,\ s=\overline{1,\nu}, \quad (7)$$

в якій $B(t)$ – неперервна при $t\in I$ матриця розмірності $m\times q$, $\lambda\in R^q$, $\mu_i\in R^m$, $y(t)$ – шукані вектори та вектор-функція. Зауважимо, що ν, p, q, l зв'язані співвідношенням $\nu=m(p+1)+q$, $0<p\le l$.

Для дослідження цієї задачі використаємо підхід, висвітлений у праці [2], тобто зобразимо диференційовану при $t\in I\setminus\{t_i\}$ вектор-функцію $y(t)$ у вигляді

$$y(t)=z(t)+C(t)\zeta, \quad (8)$$

де параметр $\zeta\in R^{mp}$ і задана неперервно диференційована матриця при $t\in I\setminus\{t_i\}$ $C(t)$ задовольняють умови

$$C(t_i+0)=S_iC(t_i-0),\ i=\overline{p+1,l},$$
$$\mu_i=(C(t_i+0)-S_iC(t_i-0))\zeta,\ i=\overline{1,p}, \quad (9)$$
$$\Phi_s(C(\cdot))=0,\ s=\overline{1,\nu}. \quad (10)$$

Підставляючи формулу (8) у співвідношення (4)–(7), враховуючи умови (9), (10), отримаємо задачу

$$\frac{dz(t)}{dt}+A(t)z(t)+D(t)\zeta+B(t)\lambda=f(t),\quad t\in I\setminus\{t_i\} \quad (11)$$

$$z(t_i+0)=S_iz(t_i-0)+\gamma_i,\ i=\overline{1,l},\quad \Phi_s(z)=\alpha_s,\ s=\overline{1,\nu}, \quad (12)$$

в якій $D(t)=A(t)C(t)+\dfrac{dC(t)}{dt}$.

Нехай $v(t)=f(t)+N(t)z(t)$, (13)
де $N(t)=M(t)-A(t)$, (14)
$M(t)$ – деяка задана неперервна при $t\in I$ матриця розмірності $m\times m$.

Тоді імпульсна система з параметрами (11), (12), до якої звелась задача (4)–(7), набуде вигляду

$$\frac{dz(t)}{dt}+M(t)z(t)+D(t)\zeta+B(t)\lambda=v(t),\quad t\in I\setminus\{t_i\}, \quad (15)$$

$$z(t_i+0)=S_iz(t_i-0)+\gamma_i,\ i=\overline{1,l},\quad \Phi_s(z)=\alpha_s,\ s=\overline{1,\nu}. \quad (16)$$

Припустимо, що матриця $M(t)$ підібрана таким чином, що однорідна задача (15), (16) ($v(t)\equiv 0$, $\gamma_i=0$, $\alpha_s=0$) має тільки тривіальний розв'язок ($z(t)\equiv 0$, $\zeta=0$, $\lambda=0$). Тоді, як це встановлено в [3], існують матриці $G(t,\tau)$, $\Gamma(\tau)$, $H(\tau)$ розмірності $m\times m$, $mp\times m$, $q\times m$ відповідно, які визначаються однозначно, такі, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (15), (16) зображається формулами

$$z(t)=h(t)+\int_0^T G(t,\tau)v(\tau)d\tau, \quad (17)$$

$$\zeta=\sigma+\int_0^T\Gamma(\tau)v(\tau)d\tau,\ \lambda=\theta+\int_0^T H(\tau)v(\tau)d\tau, \quad (18)$$

де вектор-функція $h(t)$ і вектори σ, θ – розв'язок задачі

$$\frac{dh(t)}{dt}+M(t)h(t)+D(t)\sigma+B(t)\theta=0,\quad t\in I\setminus\{t_i\}, \quad (19)$$

$$h(t_i+0)=S_ih(t_i-0)+\gamma_i,\quad i=\overline{1,l},\ \Phi_s(h)=\alpha_s,\ s=\overline{1,\nu}. \quad (20)$$

Матриці $G(t,\tau)$, $\Gamma(\tau)$, $H(\tau)$ задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)+M(t)G(t,\tau)+D(t)\Gamma(\tau)+B(t)H(\tau)=\delta(t-\tau),\quad t\in I\setminus\{t_i\}, \quad (21)$$

де $\delta(t-\tau)$ – функція Дірака, і справджуються співвідношення

$$G(t_i+0,\tau)=S_iG(t_i-0,\tau),\quad i=\overline{1,l},\ \Phi_s(G(\cdot,\tau))=0,\ s=\overline{1,\nu}. \quad (22)$$

Лема. Для будь-якої диференційованої вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умови (2), (3), справедливе співвідношення

$$x(t)=h(t)+\int_0^T G(t,\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}x(\tau)+M(\tau)x(\tau)\right\}d\tau, \quad (23)$$

$$\int_0^T\Gamma(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}x(\tau)+M(\tau)x(\tau)\right\}d\tau=-\sigma, \quad (24)$$

$$\int_0^T H(\tau)\left\{\frac{d}{d\tau}x(\tau)+M(\tau)x(\tau)\right\}d\tau=-\theta. \quad (25)$$

Справді, покладемо в задачі (15), (16)

$$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}+M(t)x(t) \quad (26)$$

і нехай $u(t)=z(t)-x(t)$. Тоді з урахуванням умови (2), (3) задача (15), (16) набуде вигляду

$$\frac{du(t)}{dt}+M(t)u(t)+D(t)\zeta+B(t)\lambda=0, \quad (27)$$

$$t\in I\setminus\{t_i\},$$

$$u(t_i+0)=S_i u(t_i-0),\ i=\overline{1,l}, \qquad \Phi_s(u)=0,\ s=\overline{1,\nu}. \quad (28)$$

За припущенням, задача (27), (28) має лише тривіальний розв'язок $u(t)\equiv 0$, $\zeta=0$, $\lambda=0$. Отже, якщо в задачі (15), (16) вектор-функція $v(t)$ має вигляд (26), то

$$z(t)\equiv x(t),\ \zeta=0,\ \lambda=0. \quad (29)$$

Оскільки єдиний розв'язок задачі (15), (16) виражається формулами (17), (18), то, підставивши у них вираз (26) і врахувавши співвідношення (29), отримаємо формули (23), (25).

3. Умови сумісності. Для дослідження задачі (1)–(3) на сумісність зведемо допоміжну задачу (4)–(7) до інтегрального рівняння. Для цього підставимо співвідношення (17) у (13) і отримаємо

$$v(t)=k(t)+\int_0^T K(t,\tau)v(\tau)d\tau, \quad (30)$$

де $k(t)=f(t)+N(t)h(t)$, $K(t,\tau)=N(t)G(t,\tau)$. (31)

Теорема. Задача (1)–(3) сумісна тоді і лише тоді, коли існує розв'язок $v^*(t)$ інтегрального рівняння (30), який задовольняє умови

$$\int_0^T \Gamma(\tau)v^*(\tau)d\tau=-\sigma, \qquad \int_0^T H(\tau)v^*(\tau)d\tau=-\theta. \quad (32)$$

Доведення. Нехай існує розв'язок $v^*(t)$ рівняння (30) і виконуються співвідношення (32). Тоді вектор-функція

$$x^*(t)=h(t)+\int_0^T G(t,\tau)v^*(\tau)d\tau \quad (33)$$

задовольняє рівняння (1) і умови (2) та (3). Справді, на основі формул (1), (14), (33), (19), (21), (31), (32) і (30) маємо

$$\frac{dx^*(t)}{dt}+A(t)x^*(t)-f(t)=$$
$$=\frac{dx^*(t)}{dt}+M(t)x^*(t)-$$
$$-(f(t)+N(t)x^*(t))=$$
$$=\frac{dh(t)}{dt}+M(t)h(t)+$$
$$+\int_0^T\left\{\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}+M(t)G(t,\tau)\right\}v^*(\tau)d\tau-$$
$$-\left\{f(t)+N(t)h(t)+\int_0^T N(t)G(t,\tau)v^*(\tau)d\tau\right\}=$$
$$=-D(t)\sigma-B(t)\theta-$$
$$-\int_0^T\{D(t)\Gamma(\tau)+B(t)H(\tau)\}v^*(\tau)\ d\tau+v^*(t)-$$
$$-\left\{k(t)+\int_0^T K(t,\tau)v^*(\tau)d\tau\right\}=$$
$$=v^*(t)-k(t)-\int_0^T K(t,\tau)v^*(\tau)d\tau=0\,.$$

Далі на підставі формул (20), (22) легко переконатися, що вектор-функція $x^*(t)$, яка визначається формулою (33), задовольняє умови (2) та (3).

Нехай тепер задача (1)–(3) сумісна, тобто існує розв'язок $x^*(t)$, який задовольняє умови (2) та (3). Покладемо

$$v^*(t)=\frac{d}{dt}x^*(t)+M(t)x^*(t) \quad (34)$$

і покажемо, що ця вектор-функція є розв'язком рівняння (30) і задовольняє умови (32). Оскільки, очевидно, виконуються умови леми, то на основі формул (24), (25) і (34) маємо

$$\int_0^T \Gamma(\tau)v^*(\tau)d\tau=-\sigma,\quad \int_0^T H(\tau)v^*(\tau)d\tau=-\theta,$$

тобто умова (32) виконується, а на підставі формул (30), (34), (31), (23), (14) і (1) отримуємо

$$v^*(t)-\left\{k(t)+\int_0^T K(t,\tau)v^*(\tau)d\tau\right\}=$$
$$=\frac{dx^*(t)}{dt}+M(t)x^*(t)-$$
$$-\left\{\begin{matrix}f(t)+N(t)h(t)+\\ +N(t)\int_0^T G(t,\tau)\left\{\frac{dx^*(\tau)}{d\tau}+M(\tau)x^*(\tau)\right\}d\tau\end{matrix}\right\}=$$
$$=\frac{dx^*(t)}{dt}+M(t)x^*(t)-(f(t)+$$
$$+N(t)x^*(t))=\frac{dx^*(t)}{dt}+$$
$$+A(t)x^*(t)-f(t)=0.$$

Тобто вектор-функція, яка визначається співвідношенням (34), є розв'язком інтегрального рівняння (30).

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– К.: Вища шк., 1987.– 288 с.
2. *Лучка А. Ю., Захарійченко Ю. О.* Дослідження систем диференціальних рівнянь з параметрами в імпульсних умовах та обмеженнями // Нелінійні коливання.–2000.– 3, № 2.– С. 218–226.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы.– К.: Наук. думка, 1993.– 288 с.

Yu. Zakhariychenko

ONE METHOD FOR INVESTIGATION PROBLEM FOR IMPULSE SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

The paper is devoted a boundary problem for a system of differential equations with an impulse effect at fixed moment of time. The new approach to the investigation of this class of problems, in which the initial problem is led to the corresponding system of integral equations is worked.