МОНІТОРИНГ ЯКОСТІ ПІДГОТОВКИ ВИПУСКНИКІВ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ: ПІДСУМКОВИЙ ТРЕНУВАЛЬНИЙ ТЕСТ І МЕТОДИЧНІ КОМЕНТАРІ

(ЧАСТИНА 3)

Олександр ШКОЛЬНИЙ — доктор педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики НПУ імені М. П. Драгоманова
Юрій ЗАХАРІЙЧЕНКО — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики НаУКМА
Ліліана ЗАХАРІЙЧЕНКО — кандидат фізико-математичних наук, методист Українського центру оцінювання якості освіти
Олена ШКОЛЬНА — вчитель вищої категорії ліцею «Універсум», м. Київ

Анотація. У сучасних умовах актуальність моніторингу якості підготовки до ЗНО з математики українських випускників сумнівів не викликає. Особливо важливою при цьому є вчасна діагностика наявних прогалин у засвоєнні теоретичного матеріалу та під час розв'язування тестових завдань різних форм протягом усього терміну навчання в 11 класі. У цій статті ми наводимо підсумковий тренувальний тест, який дозволяє здійснити перевірку готовності учня до проходження ЗНО безпосередньо перед тестуванням. Завдання цього тесту стосуються матеріалу всього шкільного курсу математики загальноосвітньої школи. Також ми наводимо тут повні розв'язання, схеми оцінювання та методичні коментарі до завдань відкритої форми з повним поясненням, які мають сприяти забезпеченню належної якості підготовки до ЗНО з математики.
Ключові слова. ЗНО з математики, ДПА з математики, моніторинг якості підготовки, навчальні досягнення з математики, тренувальний тест.

Александр ШКОЛЬНЫЙ, Юрий ЗАХАРИЙЧЕНКО, Лилиана ЗАХАРИЙЧЕНКО, Елена ШКОЛЬНАЯ. Мониторинг качества подготовки выпускников к ВНО по математике: итоговый тренировочный тест и методические комментарии.
Аннотация. В современных условиях актуальность мониторинга качества подготовки к ВНО по математике украинских выпускников сомнений не вызывает. Особенно важна при этом своевременная диагностика имеющихся пробелов в усвоении теоретического материала и при решении тестовых заданий различных форм в течение всего срока обучения в 11 классе. В данной статье мы приводим итоговый тренировочный тест, который позволяет осуществить проверку готовности ученика к прохождению ВНО непосредственно перед тестированием. Задания этого теста касаются всего материала школьного курса математики общеобразовательной школы. Также мы приводим здесь полные решения, схемы оценивания и методические комментарии к задачам открытой формы с полным объяснением, которые должны способствовать обеспечению надлежащего качества подготовки к ВНО по математике.
Ключевые слова. ВНО по математике, ГИА по математике, мониторинг качества подготовки, учебные достижения по математике, тренировочный тест.

Oleksandr SHKOLNYI, Yuri ZAKHARIYCHENKO, Liliana ZAKHARIYCHENKO, Olena SHKOLNA. Monitoring of graduate's quality of preparation to EIA in mathematics: final training test and methodological comments.
Summary. In modern conditions, the relevance of the monitoring of the quality of the preparation for the EIA in mathematics of Ukrainian graduates does not raise doubts. It is especially important timely diagnostics of the existing gaps, that appears in mastering the theoretical material and during solving test items of various forms throughout the term of study in the 11-th form. In this article we present the final training test, which allows you to check the readiness of the pupil before passing the EIA directly before testing. The tasks of this test relate to the material of all course of secondary school mathematics. We also present here complete solutions, evaluation schemes and methodological comments to open-ended tasks with full explanations that should contribute to ensuring the enough quality of the preparation to the EIA in mathematics.
Keywords. EIA in mathematics, SFA in mathematics, monitoring of quality of preparation, educational achievement in mathematics, training test.

Постановка проблеми. Наразі система зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) якості знань із математики остаточно утвердилася в Україні як засіб проведення державної підсумкової атестації (ДПА) навчальних досягнень випускників та інструмент конкурсного відбору абітурієнтів до вищих навчальних закладів. Тому необхідність методичних розробок, присвячених різним аспектам підготовки до ЗНО з математики в сучасних умовах сумнівів не викликає. Одним із таких аспектів є моніторинг якості підготовки випускників до тестування протягом навчання в 11 класі.

Зрозуміло, що готуватися до незалежного оцінювання з математики варто не лише у випускному класі, але саме в цей період процес систематизації та повторення навчального матеріалу, що природно, досягає свого піку. Тому вчасна діагностика наявності прогалин у знаннях теоретичного матеріалу та вмінні розв'язувати тестові завдання різних форм, що стосуються основних змістових ліній шкільного курсу математики, є надзвичайно важливою.

Ми вважаємо, що моніторинг якості підготовки до ЗНО з математики буде ефективним лише тоді, коли згадана діагностика прогалин проводиться протягом усього навчального року. Отже, надзвичайно важливо грамотно організувати систему моніторингових заходів, зокрема забезпечити вчителів дидактичними матеріалами належної якості на всіх етапах моніторингу. Крім того, корисно налагодити систему безперервної комунікації між усіма учасниками процесу підготовки до ЗНО: учнями, вчителями, батьками, адміністраторами різних рівнів.

Аналіз актуальних досліджень. Проблема підготовки учнів до ЗНО та ДПА з математики систематично розглядається на сторінках цього журналу та в інших фахових науково-педагогічних виданнях. Активно працюють у цьому напрямі і постійно публікують результати свої досліджень В. Г. Бевз, М. І. Бурда, Г. І. Білянін, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Л. П. Дворецька, О. В. Єргіна, О. С. Істер, А. Г. Мерзляк, Є. П. Нелін, В. Б. Полонський, В. К. Репета, О. М. Роганін, О. П. Томащук, М. С. Якір та інші.

Наш авторський колектив протягом останніх дванадцяти років активно працює над методичним забезпеченням процесу підготовки до ЗНО з математики. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень учнів старшої школи в Україні описано в монографії [1]. Для підготовки учнів до ЗНО з математики ми використовуємо методичний комплект із посібників [2] та [3]. У статтях [4] і [5] нами розпочато цикл публікацій щодо організації моніторингу якості підготовки українських випускників до ЗНО з математики, зокрема наведено діагностичні тести, які сприятимуть реалізації цього моніторингу протягом навчального року в 11 класі. Приведена стаття завершує цей цикл.

Мета статті. Головною метою цієї статті є поради щодо організації моніторингу якості підготовки українських випускників до ЗНО з математики безпосередньо перед проведенням тестування, а також методичні рекомендації щодо розв'язування тестових завдань із математики відкритої форми з повним поясненням.

Виклад основного матеріалу. На нашу думку, система моніторингу якості підготовки випускників до ЗНО з математики має містити низку діагностичних та тренувальних тестів, які природно проводити на початку навчального року (вересень), після вивчення матеріалу 11 класу, але перед проведенням повторення (грудень-лютий) і безпосередньо перед тестуванням (квітень-травень). При цьому варто розрізняти діагностичні та тренувальні тести.

Мета діагностичного тесту — навчальна, а сам тест, в основному, спрямований на виявлення прогалин у підготовці випускника до ЗНО. Тренувальний тест має дещо іншу функцію. Він проводиться безпосередньо перед проведенням тестування (у квітні та травні) і покликаний змоделювати ситуацію «бойового» тесту ЗНО, а отже, повинен у певному розумінні «копіювати» цей тест за всіма характеристиками: за кількістю завдань тієї чи іншої форми, за рівнем складності, за тематичним покриттям, за часом на виконання тощо. Тренувальних тестів також має бути кілька, і вони є окремою складовою моніторингу якості підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

При проходженні підсумкових тренувальних тестів для учнів слід створити умови, максимально близькі до умов реального тесту ЗНО з математики. Це стосується часу проведення (180 хвилин), умов проведення (самостійно, в окремій аудиторії, без будь-якої допомоги з боку викладача, але під його контролем), змісту тесту (він має повністю відповідати програмі ЗНО з математики і не містити жодних додаткових завдань, що виходять за межі цієї програми), а також організації перевірки та оцінювання тесту (бажано за участю учня). Випускник, однак, повинен розуміти, що результати тренувального тесту є лише певним наближенням можливих результатів тесту ЗНО, а отже, не повинен ні недооцінювати, ні переоцінювати ці результати.

Допомогти учневі правильно ставитися до результатів тренувальних тестів повинен учитель математики під час їх аналізу. Від того, наскільки виважено, коректно і адекватно буде проведено цей аналіз, залежить психологічний стан учня перед тестуванням. Тому вчителю варто добре продумати спосіб представлення результатів тренувального тесту в залежності від індивідуальних психофізіологічних особливостей кожного конкретного учня. Грамотне поєднання тактовного вказування на допущені помилки та розгляд аналогічних прикладів дозволить покращити учнівські результати під час ЗНО з математики.

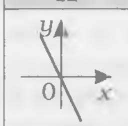
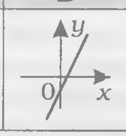
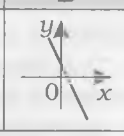
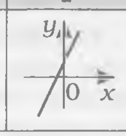
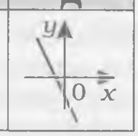
Підсумковий тренувальний тест. Оскільки тест ЗНО 2019 року міститиме 20 завдань із короткою відповіддю, 4 завдання на встановлення відповідності (відшукання логічних пар), 6 завдань із короткою відповіддю (із яких 2 завдання є структурованими) та 3 завдання відкритої форми з повним поясненням, то таку саму будову повинен мати і підсумковий тренувальний тест. Наведемо приклад одного з таких тестів.

У завданнях 1 — 20 оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

1. $\dfrac{4x-8}{8}=$

А	Б	В	Г	Д
$4x-1$	$\dfrac{x}{2}-1$	$\dfrac{x}{8}-1$	$\dfrac{x}{2}-8$	$2x-1$

2. Укажіть ескіз графіка функції $y = -2x - 3$.

А	Б	В	Г	Д
				

3. Розв'яжіть рівняння $7^x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\dfrac{2}{7}$	$x=\sqrt[7]{2}$	$x = \log_7 2$	$x=\dfrac{7}{2}$	$x = \log_2 7$

4. $|\cos 120°| =$

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

5. Є 200 г 4 % розчину солі. До цього розчину долили 300 г 10 % розчину цієї самої солі. Знайдіть концентрацію солі в утвореній суміші.

А	Б	В	Г	Д
14 %	6 %	7,6 %	7 %	6,4 %

6. Відомо, що числа 1, a, a^2 є трьома послідовними членами арифметичної прогресії. Знайдіть a.

А	Б	В	Г	Д
$a = \pm 1$	$a = 0$	$a = \pm 2$	$a = 1$	$a = 2$

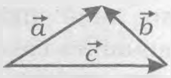
7. Довжини сторін прямокутника дорівнюють x см і $2x$ см (x — натуральне число). Укажіть число, яке *може* бути значенням площі цього прямокутника (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
50	75	100	125	250

8. Квадрат площею M обертають навколо однієї з його сторін. Знайдіть площу S бічної поверхні циліндра, утвореного внаслідок цього обертання.

А	Б	В	Г	Д
$S=\dfrac{\pi M}{2}$	$S = 2\pi M$	$S = \pi M$	$S = 4\pi M$	$S=\dfrac{\pi M}{4}$

9. На малюнку зображено вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$	$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$	$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$	$-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$	$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$

10. На малюнку зображено 5 коробок, у які помістили білі та чорні кулі. Укажіть коробку, для якої ймовірність навмання вилучити з неї одну білу кулю є найменшою.

А	Б	В	Г	Д
●○●○	●●●○	●○○○	●●●●	○○○○

11. Якщо $\sin^2\dfrac{\pi}{31}=a$, то $\cos\dfrac{\pi}{31}=$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{1-a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$1-a$	$1-a^2$	$\sqrt{1+a}$

12. Укажіть властивість функції $y=\sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
Функція є парною	Функція є зростаючою на $D(y)$	Функція є періодичною	Функція є спадною на $D(y)$	Функція є непарною

13. Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 4x - 7 = 0$. Тоді $x_1 + x_2 =$

А	Б	В	Г	Д
-4	7	$2\sqrt{11}$	-7	4

14. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x \leq -3$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\dfrac{1}{8}\right)$	$(0;\ 8)$	$\left(0;\dfrac{1}{8}\right)$	$(-\infty;\ 8)$	$\left(0;\dfrac{1}{9}\right)$

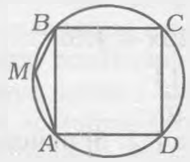
15. Микола та Ірина збирали гриби. Відомо, що Микола зібрав на 20 грибів більше, ніж Ірина, а разом вони зібрали 100 грибів. Скільки грибів зібрала Ірина?

А	Б	В	Г	Д
50	40	60	20	80

16. Залежність координати x матеріальної точки від часу t описується функцією $x(t) = 3t^2 + 4$. Укажіть функцію $v(t)$, яка описує залежність швидкості v цієї матеріальної точки від часу t.

А	Б	В	Г	Д
$v(t) = 6t + 4$	$v(t) = t^3 + 4t$	$v(t) = 6$	$v(t) = 6t$	$v(t) = 24t$

17. На малюнку зображено квадрат $ABCD$, вписаний у коло. Точка M належить колу. Знайдіть градусну міру кута AMB.



А	Б	В	Г	Д
135°	150°	120°	90°	45°

18. Точка M не належить площині π. Скільки всього існує прямих, які проходять через точку M і перетинають площину π під кутом 60°?

А	Б	В	Г	Д
Жодної	Лише одна	Лише дві	Лише три	Більше трьох

19. Точка C є серединою відрізка AB. Укажіть координати точки B, якщо $A(2;\ 3)$, $C(-2;\ 5)$.

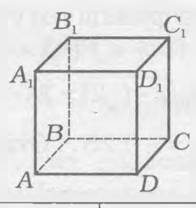
А	Б	В	Г	Д
(0; 4)	(4; −2)	(− 6; 7)	(− 2; 13)	(− 4; 2)

20. На змаганнях із підтягування на турніку десять юнаків показали такі результати: 15, 22, 10, 17, 14, 25, 16, 15, 18, 20. Знайдіть медіану цієї вибірки.

А	Б	В	Г	Д
10	17,2	15	16,5	25

У завданнях 21 — 24 установіть відповідність між об'єктами 1 — 4 і А — Д.

21. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між означеннями (1 — 4) та кутами, що відповідають цим означенням (А — Д).



Означення	*Кут*
1 Кут між прямою A_1D і площиною грані $ABCD$	**А** $\angle A_1CC_1$
2 Кут між прямою A_1D і площиною грані CDD_1C_1	**Б** $\angle A_1DD_1$
3 Кут між прямою A_1C і площиною грані $ABCD$	**В** $\angle A_1CA$
4 Кут між прямою A_1C і площиною грані CDD_1C_1	**Г** $\angle A_1DA$
	Д $\angle A_1CD_1$

22. Установіть відповідність між виразами (1 — 4) та проміжками, яким належать їх числові значення (А — Д).

Вираз	*Проміжок*
1 $2\sqrt{3}$	**А** $(-2;\ -1)$
2 $\log_3 2$	**Б** $(-1;\ 0)$
3 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	**В** $(0;\ 1)$
4 $\log_{\frac{1}{2}} 3$	**Г** $(1;\ 3)$
	Д $(3;\ 4)$

23. У прямокутній системі координат задано точку $P(4;\ 6;\ 2)$. До початку речення (1 — 4) доберіть його закінчення (А — Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	*Закінчення речення*
1 Точка $A(-4;\ -6;\ -2)$	**А** Симетрична точці P відносно площини xOy
2 Точка $B(4;\ 6;\ 0)$	**Б** Симетрична точці P відносно початку координат
3 Точка $C(-4;\ -2;\ 6)$	**В** Симетрична точці P відносно осі Oz
4 Точка $D(0;\ 0;\ 6)$	**Г** Є проекцією точки P на площину xOy
	Д Є проекцією точки P на вісь Oz

24. Установіть відповідність між функціями (1 — 4) та їх властивостями (А — Д).

Функція	*Властивість*
1 $y = \operatorname{tg} x$	**А** Зростає на всій області визначення
2 $y = 4^x$	**Б** Спадає на всій області визначення
3 $y = \dfrac{1}{x^2}$	**В** Областю визначення є проміжок $(-\infty;\ 0)$
4 $y = \log_{0,2} x$	**Г** Є непарною функцією
	Д Є парною функцією

У завданнях 25 — 30 запишіть відповідь ДЕСЯТКОВИМ ДРОБОМ.

25. Здано прямокутний трикутник ABC, гіпотенуза якого AB = 20 см.

1) Знайдіть довжину меншого катета BC цього трикутника (у см), якщо різниця довжин катетів $AC - BC$ = 4 см.
2) Знайдіть довжину (в см) проекції меншого катета BC на гіпотенузу AB.

26. Дано функцію $f(x) = 1 - 3x^2$.

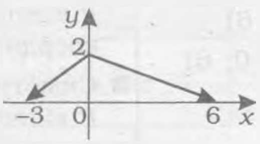
1) Знайдіть значення $F(4)$, якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ і $F(1) = 0$.
2) Обчисліть $\int_1^2 f(x)dx$.

27. Розв'яжіть нерівність $\frac{6-3x}{x+2} \geq 1$. У відповідь запишіть кількість цілих розв'язків цієї нерівності, які належать проміжку [–10; 10].

28. Одного дня збірку поезій тиражем 1000 екземплярів 2 години друкували на двох різографах однакової продуктивності, а потім ще 3 години лише на одному з них. Після цього залишилося надрукувати ще 160 екземплярів збірки. Скільки *хвилин* безперервної роботи потрібно буде наступного дня двом тим самим різографам, щоб повністю додрукувати запланований тираж збірки поезій?

29. Знайдіть значення виразу $2x + y$, якщо відомо, що $3x - 2y = -3$, а $5x + 6y = 23$.

30. Знайдіть скалярний добуток векторів, зображених на малюнку.



Розв'язання завдань 31 — 33 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками тощо.

31. Здано функцію $f(x) = \sqrt{2-x}$.

1) Знайдіть область визначення цієї функції.
2) Побудуйте графік функції $f(x)$.
3) Знайдіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої $x_0 = -2$.

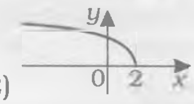
32. Здано конус, висота якого дорівнює 8 см, а радіус основи дорівнює 6 см. Через вершину цього конуса проведено переріз, який є рівностороннім трикутником. Знайдіть кут α, який утворює площина цього перерізу з площиною основи конуса.

33. Розв'яжіть рівняння $\log_3^2 x - 2a \cdot \log_3 x + a + 6 = 0$ при всіх значеннях параметра a.

Відповіді до підсумкового тренувального тесту.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	Д	В	Д	В	Г	А	Б	Д	Г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
А	Б	Д	В	Б	Г	А	Д	В	Г
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
1 – Г 2 – Б 3 – В 4 – Д	1 – Д 2 – В 3 – Г 4 – А	1 – Б 2 – Г 3 – В 4 – Д	1 – Г 2 – А 3 – Д 4 – Б	1. 12 2. 7,2	1. – 60 2. – 6	3	40	5	–14

31. 1) $D(f) = (-\infty; 2]$;

2) 

3) $y = -0{,}25x + 1{,}5$.

32. $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{11}}{8}$.

33. При всіх $a \in (-2; 3)$ рівняння не має коренів; при $a = -2$ рівняння має один корінь $x = \frac{1}{9}$; при $a = 3$ рівняння має один корінь $x = 27$; при всіх $a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ рівняння має два корені $x_{1,2} = 3^{a \pm \sqrt{a^2 - a - 6}}$.

Розв'язання і методичні коментарі. Спираючись на авторський досвід, відзначимо, що найбільші труднощі в учнів викликає розв'язування й оформлення розв'язань тестових завдань відкритої форми з повним поясненням. Тому далі ми наведемо розв'язання завдань підсумкового тренувального тесту з повним поясненням і методичні коментарі до них.

31. Здано функцію $f(x) = \sqrt{2-x}$. 1) Знайдіть область визначення цієї функції. 2) Побудуйте графік функції $f(x)$. 3) Знайдіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої $x_0 = -2$.

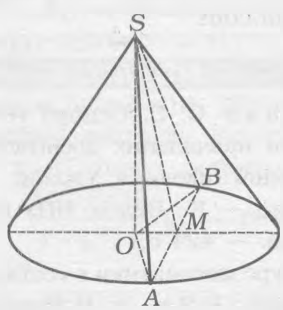
Розв'язання. 1) Область визначення складається з усіх значень змінної, що задовольняють нерівність $2 - x \geq 0$. Отже, $D(f) = (-\infty; 2]$. 2) Для побудови графіка функції $f(x)$ спочатку побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$, потім виконаємо його симетрію відносно осі ординат, отримавши графік функції $y = \sqrt{-x}$. Після цього виконаємо паралельне перенесення графіка останньої функції вздовж осі абсцис на 2 одиниці вправо й отримаємо графік функції $y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{2-x} = f(x)$. 3) Рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має вигляд $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для нашого завдання $f(x_0) = \sqrt{2-(-2)} = 2$, $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$, $f'(x_0) = \frac{-1}{2\sqrt{2-(-2)}} = -0{,}25$. Отже, шукане рівняння дотичної $y = 2 - 0{,}25 \cdot (x + 2)$ або після перетворень $y = -0{,}25x + 1{,}5$.

Коментар. Схема оцінювання до цього завдання може бути такою. Якщо учень правильно знайшов область визначення функції $f(x)$, то він отримає 1 бал. Ще 1 бал він отримує, якщо правильно побудував графік функції $f(x)$. Якщо учень правильно знайшов похідну $f'(x)$, то він отримує ще 1 бал. Нарешті, якщо учень правильно знайшов рівняння дотичної, то він отримує ще 1 бал. Отже, за повне і правильне розв'язання всього завдання 31 учень отримує 4 бали.

Це завдання не є складним, але вимагає акуратності при виконанні. Не варто вимагати від учнів детального пояснення всіх етапів побудови графіка функції $f(x)$, але потрібно акцентувати їх увагу на ретельності виконання остаточного малюнка, на якому обов'язково має бути позначена точка (2; 0). Також досить детально мають бути описані етапи складання рівняння дотичної, а не лише записано остаточну відповідь.

32. Здано конус, висота якого дорівнює 8 см, а радіус основи дорівнює 6 см. Через вершину цього конуса проведено переріз, який є рівностороннім трикутником. Знайдіть кут α, який утворює площина цього перерізу з площиною основи конуса.

Розв'язання. Нехай на малюнку зображено цей конус, точка S — його вершина, $SO = h$ — висота, SAB — шуканий переріз, $AO = OB = R$ — радіуси основи. За умовою задачі $h = 8$ см, $R = 6$ см. Із трикутника SOA за теоремою Піфагора твірна $SA = l = 10$ см. Оскільки трикутник SAB — рівносторонній, то $AB = 10$ см.



Проведемо в площині основи конуса відрізок $OM \perp AB$. Оскільки OM є проекцією похилої SM на площину основи конуса, то за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AB$, а отже, $\angle SMO = \alpha$ є шуканим.

У рівнобедреному трикутнику AOB висота OM є медіаною, тому $AM = 5$ см. Із прямокутного трикутника AOM за теоремою Піфагора $OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{11}$ см. Отже, із прямокутного трикутника SOM маємо:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OM}{h} = \frac{\sqrt{11}}{8} \text{ і } \alpha = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{11}}{8}.$$

Коментар. Схема оцінювання до цього завдання могла би бути такою. За правильне знаходження довжин твірної учень отримує 1 бал. Іще 1 бал він отримує за правильне виконання побудови перерізу на малюнку з указанням шуканого кута між площинами. Якщо учень правильно обґрунтував, що позначений кут є кутом між площиною перерізу та площиною основи конуса, то він отримує ще 1 бал. Нарешті, за правильне знаходження кута між площинами учень отримує ще 1 бал. Отже, за повне і правильне розв'язання всього завдання 32 учень отримує 4 бали.

При розв'язуванні цього завдання варто акцентувати увагу учнів на необхідності обґрунтування того, що $\angle SMO = \alpha$. При цьому потрібно не лише послатися на теорему про три перпендикуляри, а ще й чітко вказати перпендикуляр, похилу та її проекцію.

Зауважимо також, що замість знаходження $\operatorname{ctg}\alpha$ учень може обрати іншу тригонометричну функцію цього самого кута, і якщо він знайде її правильно, то також отримає четвертий бал за схемою оцінювання. Однак четвертий бал не буде зараховано, якщо у якості відповіді буде вказано $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{11}}{8} + \pi n$, $n \in Z$, оскільки цим самим учень продемонструє нерозуміння суті поставленого перед ним завдання.

33. Розв'яжіть рівняння $\log_3^2 x - 2a \cdot \log_3 x + a + 6 = 0$ при всіх значеннях параметра a.

Розв'язання. Виконаємо заміну $t = \log_3 x$ і отримаємо рівняння $t^2 - 2a \cdot t + a + 6 = 0$. Знайдемо дискримінант: $D = 4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6)$. За теоремою Вієта тричлен $a^2 - a - 6$ має корені $a_1 = -2$ і $a_2 = 3$, а отже, $D = 4(a + 2)(a - 3)$. Визначимо знак дискримінанта:

Отже, при всіх $a \in (-2; 3)$ $D < 0$, а отже, квадратне і початкове рівняння не мають коренів. При всіх $a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ квадратне рівняння має два корені

$$t_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4(a^2 - a - 6)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - a - 6},$$

а початкове рівняння також має два корені $x_{1,2} = 3^{a \pm \sqrt{a^2 - a - 6}}$. При $a = -2$ квадратне рівняння має один корінь $t = -2$, а початкове рівняння також матиме один корінь $x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. Нарешті, при $a = 3$ квадратне рівняння має один корінь $t = 3$, а початкове — $x = 3^3 = 27$. Повну остаточну відповідь до завдання 33 наведено у відповіді до тренувального тесту вище.

Коментар. Схема оцінювання до цього завдання могла би бути такою. Якщо учень правильно виконав заміну і перейшов до квадратного рівняння, то він отримує 1 бал. Ще 1 бал учень отримує, якщо він правильно знайшов дискримінант квадратного рівняння. Якщо учень правильно визначив нулі і знак дискримінанта, то він отримує ще 1 бал. Ще 1 бал він отримує, якщо він вказав, при яких значеннях параметра квадратне рівняння відносно t не має коренів. Якщо учень правильно знайшов аналітичний вираз для коренів початкового рівняння, то він отримує ще 1 бал. Нарешті, якщо учень розглянув випадок, коли початкове рівняння має лише 1 корінь і правильно знайшов цей корінь для обох значень параметра, при якому це можливо, то він отримує ще 1 бал. Отже, за повне і правильне розв'язання всього завдання 33 учень отримує 6 балів.

При аналізі завдання з учнями варто звернути увагу учнів на те, що в шестибальному завданні можуть оцінюватися навіть найдрібніші етапи розв'язання, а отже, не варто пропускати опис «очевидних» перетворень і обґрунтувань. З іншого боку, для цього рівняння ОДЗ змінної ($x > 0$) ніяким чином не впливає на розв'язання і тому не оцінюється.

Важливо також зробити акцент на тому, що для рівнянь із параметром потрібно розглянути *всі можливі* значення параметра і вказати розв'язок (якщо він існує) для кожного з них. При цьому записувати загальну відповідь хоч і бажано, але не обов'язково, принципово лише, щоб жодне з дійсних значень параметра не було пропущено.

Інтерпретація результатів тренувального тесту. Доволі часто і учні, і їхні батьки, і адміністрація цікавляться, як можна інтерпретувати бал за підсумковий тренувальний тест за традиційною для ЗНО з математики шкалою від 100 до 200 балів та за шкалою ДПА від 1 до 12 балів. Зрозуміло, що використання шкали минулого року для переведення тестових балів у 100-бальну і 12-бальну шкалу, взагалі кажучи, не є коректним. Однак оскільки в описаній ситуації отриманий бал є лише орієнтиром для подальшого процесу підготовки до тестування, то цією некоректністю можна знехтувати і цим самим дати орієнтир учневі щодо свого теперішнього положення рівня підготовки відносно особистого рівня домагань.

Максимальний бал за виконання тесту ЗНО з математики (а отже, і підсумкового тренувального тесту), як відомо, становить 62 бали. Ці бали можна перевести в бали від 100 до 200 та від 1 до 12 за шкалою 2018 року, доступною, наприклад, за посиланням: https://osvita.ua/test/rez_zno/61141/. Шкали 2017 та 2016 років доступні за посиланнями: http://testportal.gov.ua/tablmath/ і http://testportal.gov.ua/tabmath/. Використовувати шкали попередніх років недоцільно, бо структура тесту ЗНО з математики залишається незмінною саме з 2016 року.

Варто також роз'яснити учням, їх батькам, а також адміністрації, що кожного року будується нова шкала переведення, яка залежить від складності тесту ЗНО, а також від результатів учасників тестування, які виконують цей тест. Детально особливості процесу шкалювання під час проведення стандартизованих оцінювань навчальних досягнень, зокрема під час ЗНО з математики, висвітлено, наприклад, у підручниках [6] і [7].

Висновки. Ми вважаємо, що правильно організований моніторинг якості підготовки до ЗНО з математики значно спростить для вчителів та учнів процес підготовки до цього виду оцінювання. Дійсно, діагностичні та тренувальні тести, які є основним засобом здійснення цього моніторингу, дозволяють учителям постійно «тримати руку на пульсі» тих проблем, які виникають в учнів під час систематизації та повторення шкільного курсу математики, а учням та батькам дозволяють орієнтуватися, чи збігається їх рівень домагань із реальним наявним рівнем знань та умінь. Таким чином, за допомогою моніторингових заходів значно простіше уникнути можливих конфліктних ситуацій та підвищити ефективність комунікації між усіма учасниками навчального процесу.

Автори готові до конструктивної дискусії з читачами з приводу тематики цієї статті. Усі зауваження та пропозиції можна надсилати на адресу журналу або ж безпосередньо авторам на їхні електронні адреси: shkolnyi@ukr.net і yzakhar@gmail.com.

ЛІТЕРАТУРА

1. Школьний О. В. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. / О. В. Школьний. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. — 424 с.

2. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 1: Різнорівневі завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. — 8 вид. — Х.: Вид-во «Ранок», 2018. — 496 с.

3. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. — 2 вид., доповн. — Х.: Вид-во «Ранок», 2018. — 192 с.

4. Школьний О. В. Моніторинг якості підготовки випускників до ЗНО з математики: діагностичні тести і методичні коментарі (частина 1). / О. В. Школьний, Ю. О. Захарійченко, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна // Математика в рідній школі. — 2018, № 9. — С. 2 — 7.

5. Школьний О. В. Моніторинг якості підготовки випускників до ЗНО з математики: діагностичні тести і методичні коментарі (частина 2). / О. В. Школьний, Ю. О.Захарійченко, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна // Математика в рідній школі. — 2018, № 11. — С. 2 — 8.

6. Вимірювання в освіті: Підручник. / За редакцією О. В. Авраменко. — Кіровоград: видавець Лисенко В.Ф., 2011. — 360 с.

7. Авраменко О. В. Статистичні методи в освітніх вимірюваннях. Частина 1. Класична теорія тестування: Навч.-метод. посібник. / О. В. Авраменко, Г. Ю. Павличенко, С. Д. Паращук. — Кіровоград: видавець Лисенко В. Ф., 2012 . — 118 с.