

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Магістерська робота

освітній ступінь – магістр

на тему: **«МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ В
УКРАЇНІ»**

Виконав: студент 2-го року навчання
освітньо-наукової програми
«Прикладна математика»,
спеціальності 113 Прикладна
математика

Змитрович Марія Олександрівна

Керівник: Дутка В. А.,
кандидат техн. наук, доцент

Рецензент _____
(прізвище та ініціали)

Магістерська робота захищена
з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

« ____ » _____ 20 ____ р.

Вступ	4
1. Аналіз демографічної ситуації	6
1.1. Міграційні процеси в Україні	7
1.2. Трудова міграція	8
1.3. Освітня міграція	8
1.4. Огляд існуючих прогнозів чисельності населення України	9
1.4.1. World Population Prospects 2019	9
1.4.2. Комплексний демографічний прогноз України до 2050 р.	9
2. Математична модель для моделювання чисельності населення	11
2.1. Огляд математичних моделей прогнозування	11
2.2. Логістична модель з міграційним фактором	12
3. Моделювання та прогнозування чисельності населення України	15
3.1. Чисельність населення України з 1950 по 2020 роки	15
3.2. Міграційна статистика	16
3.3. Визначення екологічної ніші та коефіцієнту зростання для логістичної моделі з міграційним фактором	17
3.5. Прогнозування населення України до 2100 року	20
3.5.1. Позитивний сценарій	20
3.5.2. Негативний сценарій	21
3.6. Порівняння результатів логістичної моделі та логістичної моделі з міграційним фактором на моделювання чисельності населення України	22
3.7. Порівняння отриманих даних прогнозу та існуючих прогнозів чисельності населення України	23
Висновок	25

Література	27
Додаток А Лістинг коду	29
Додаток Б Позитивний прогноз чисельності населення України до 2100 року	30
Додаток В Негативний прогноз чисельності населення України до 2100 року	31

Вступ

Демографічне прогнозування все ще залишається однією з головних складових вдалою політики держав. Демографічне прогнозування сприяє обізнаності населення щодо старіння, призводить до змін у галузях пенсійного забезпечення, охорони здоров'я та економіки, вартості природних ресурсів та інших невід'ємних складових політики держав світу.

Останні роки характерні досить невтішною демографічною статистикою для України. Навіть за часів пандемії, 3 млн. українців працювали за кордоном, а за 2020 рік кількість українців скоротилась майже на третину мільйона здебільшого через міграцію [1]. Через такі стрімкі зміни у чисельності населення стає очевидною потреба обізнаності самого суспільства, щодо процесів, які наразі відбуваються у країні. Демографічні прогнози, які б враховували ці дані, не тільки допомогли б орієнтуватись нашим громадянам у цій та інших глобальних проблемах, але й також могли б сприяти більш активному впливу на неї.

Більш того, ще до часів пандемії статистика демонструвала невтішне зменшення українського народонаселення. Криза, проблеми у сферах безкоштовної освіти та медицини, війна на сході - все це фактори, які сприяють виїзду наших громадян. За даними аналізу міграційної статистики урядом, з 2010 року майже 10% українців покинули країну, що складає 4 мільйони осіб і є дуже високим показником [2]. Водночас народжуваність кожен рік зменшується, а статистики розлучень досягає все вищих показників. Кількість людей похилого віку зростає та за прогнозом демографічного департаменту може досягти 37% до 2050 року [3].

З початку 2000х років було розроблено кілька демографічних моделей з метою прогнозування кількості населення України. Найновіший прогноз ООН містить дані до 2100 року, та допускає зменшення чисельності українців на 27% вже у 2100 році [4].

Метою моєї роботи є побудова демографічного прогнозу населення України. Моделювання населення у цій роботі буде виконане з використанням логістичної моделі, яка розширена міграційним фактором. Результатом роботи буде прогноз до 2100 року та його аналіз.

1. Аналіз демографічної ситуації

Чисельність українців продовжує скорочуватись. Так, держава у якій проживало 52 млн. людей станом на 1993 рік втратила майже 18% свого населення до 2020 року. І за різними оцінками, негативний приріст буде тільки зростати.

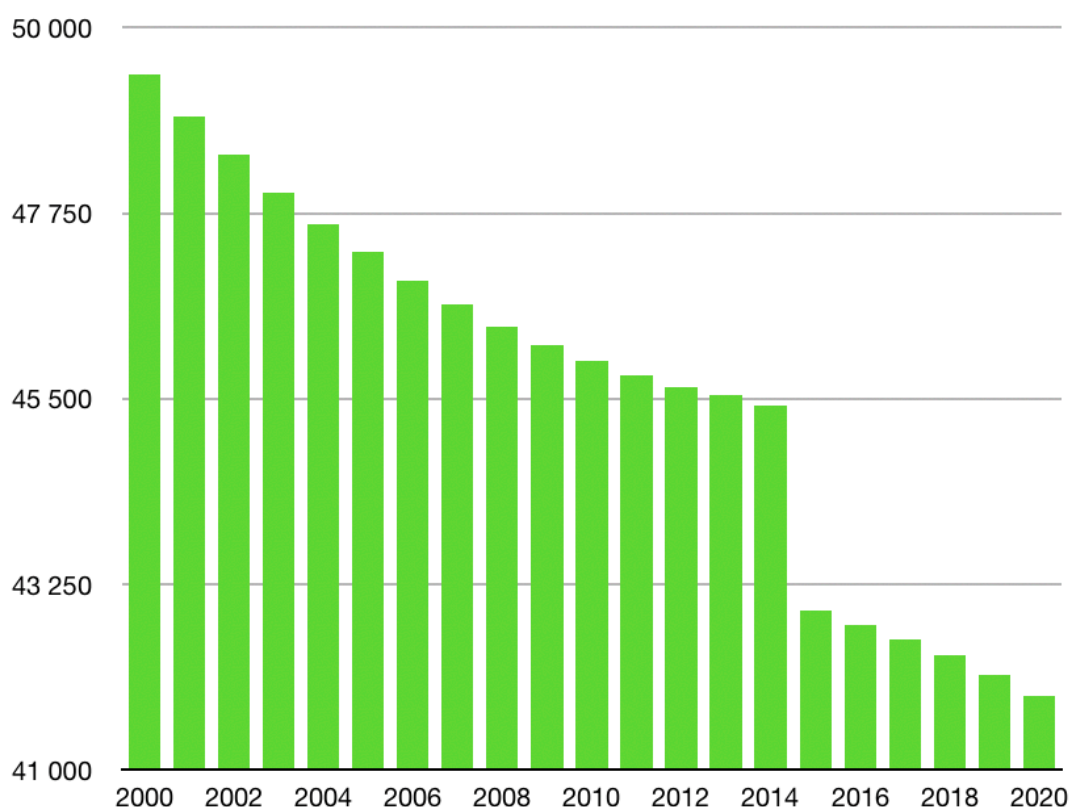


Рисунок 1.1 – Спадаюча тенденція чисельності населення України у період з 2000 по 2020 роки

Здебільшого, цю ситуацію можна пояснити низьким рівнем народжуваності. Для нормального народовідтворення населення сумарний коефіцієнт народжуваності (СКН) повинен складати більше ніж 2,1, коли в України протягом останніх 20 років, за даними Держстату, він не піднімався вище ніж 1,5. Станом на 2019 СКН складав 1,2, що було на 0,1 нижче за попередній 2018 рік, що свідчить про ще більш стрімкий спад.

На це впливає багато факторів, але, загалом, фінансова нестабільність є причиною небажання молодих українців заводити дітей. Фінансові кризи сильно вдарили не тільки по економіці країни, але й знизили потенціал приросту нашого населення. Впровадження урядом законопроектів, які пропонували фінансову допомогу сім'ям трохи покращувало ситуацію. Таким чином, коли сумарний коефіцієнт народжуваності дістав свого мінімуму (за період з 1990 року), у 2001 році уряд запровадив реформу по збільшенню виплат за дитину. Аналогічна реформа у 2011 році допомогла підтримати рівень народжуваності на тому ж рівні після фінансової кризи 2008 року.

Незадовільні житлові умови, високий рівень безробіття, неможливість стабільного фінансового забезпечення – фактори, яких додала максимальна за останні 20 років інфляція у 2015 році, що знову сприяло погіршенню ситуації. Після неї кількість народжених дітей тільки падає, а всесвітня пандемія не додає ситуації у країни стабільності.

1.1. Міграційні процеси в Україні

Міграція – ще один із найважливіших факторів, який негативно впливає на демографічну статистику. За різними оцінками, за останні 20 років Україну покинуло близько 10 млн. осіб працездатного віку, які наразі розвивають економіку інших країн світу. Кризи, анексія Криму та війна на сході країни змушують багатьох громадян залишати країни, більш того, роблять її менш привабливою для іммігрантів.

Комплексне дослідження Міжнародної організації з міграції (МОМ), на відміну від даних Держстату України, надає звіт по всім міграційним процесам, враховуючи багаторічну трудову міграцію за кордон [5]. Щоб розуміти повну картину, буде доречним оглянути всі переміщення, які щорічно здійснюються в нашій країні, а не тільки статистику виписок з місця

реєстрації, яку приводить Держстат. Саме тому у подальшому дослідженні будуть використані саме дані МОМ та ООН, щодо міграційної статистики.

1.2. Трудова міграція

Трудова міграція стала масовим явищем та джерелом доходу багатьох українців ще наприкінці 90х років. Безробіття, деградація безкоштовної медицини та освіти, разом з неможливістю знайти гідно оплачуване місце праці змушують виїжджати українських громадян за кордон. Згідно з опитуванням інституту соціології НАНУ, у 2012 році 13,7% відповіли, що вони або хтось із членів їх родини мав досвід праці за кордоном, у 2018 році теж саме стверджували вже 25,2% опитуваних. Більш того, у 2018 році 14,3% відсотки опитуваних планують працювати за кордоном, що є вдвічі більшим за статистику 2014 року [5].

Хоча ці дані не можуть відобразити реальну кількість трудових мігрантів, бо не враховують тих, хто залишив країну всією родиною, а також прикордонних мігрантів. Реальна ж цифра, за різними оцінками, близько 3 млн. осіб.

Основні країни призначення трудових мігрантів – Росія, Польща, Італія, Угорщина та Португалія. Якщо до 2017 року Росія була лідером серед країн призначення наших мігрантів, то після війни на Сході кількість працюючих там українців, скоротилась майже вдвічі. Наразі, більшість з мігрантів надають перевагу Польщі.

Найпоширенішою моделлю трудової міграції є тимчасова міграція: 57% поїздок за тривалістю не становлять більше 3 місяців.

1.3. Освітня міграція

Згідно з даними ЮНЕСКО, кількість українських студентів за кордоном стабільно зростає. Якщо у 2011 році вона становила 37,6 тисяч осіб,

то у 2017 – 77,8 тисяч осіб, що майже вдвічі більше [6]. Найчастіше українці обирають для навчання Польщу, Росію, Німеччину, Канаду, Чехію, Італію, США, Іспанію та Словаччину. Українські студенти у Польщі складають 55% всіх іноземних студентів.

Молоді люди працездатного віку покидають країну з наміром знайти собі гідно оплачуване роботу на міжнародному ринку праці. За результатами анонімних опитувань в інтернеті, лише 6% студентів прагнули повернутись до України.

1.4. Огляд існуючих прогнозів чисельності населення України

1.4.1. World Population Prospects 2019

У 2019 році ООН випускає двадцять шостий раунд офіційних оцінок та прогнозів в області народонаселення світу. «World Population Prospects 2019» підготовлений відділом народонаселення Департаменту з економічних і соціальних питань.

Він містить статистику і прогнози населення світу і його країн до 2100 року. За прогнозом ООН, Україну може втратити до 27% свого населення протягом 80 років. Кількість українців станом на 2030 рік буде складати – 40 994 млн. осіб, на 2050 – 35 219 млн. осіб і на 2100 – 24 413 млн. осіб [4].

1.4.2. Комплексний демографічний прогноз України до 2050 р.

Інститутом демографії та соціальних досліджень імені М. В. Птухи Національної Академії Наук України з 2006 року колективом авторів проводиться детальний багатоваріантний демографічний прогноз загальної чисельності та статево-вікового розподілу населення України [7].

З 2006 існує вже п'ять нових редакцій, остання зроблена станом на вересень 2011 року. Розглянемо прогноз 2011 року, щоб надалі порівняти його дані з результатами отриманими у цій роботі.

Прогноз включає різні гіпотези, щодо смертності, СКН та міграції, і дає статистику відповідно цим сценаріям. Таким чином, з «середнім рівнем смертності (СМ) – середнім рівнем народжуваності (СН) – середнім міграційним приростом (СМП)» станом на 2050 рік чисельність населення може складати 39 195 млн. осіб, з «високим рівнем смертності (ВС) – високим рівнем народжуваності (ВН) – високим міграційним приростом (ВМП)» - 38 935 млн. осіб, з «низьким рівнем смертності (НС) – низьким рівнем народжуваності (НН) – низьким міграційним приростом(НМП)» - 33 223 млн. осіб.

Таблиця 1.1 – Комплексний демографічний прогноз населення України на 2050 р.

Прогноз	Чисельність населення, 2050 р., млн. осіб
СМ-СН-СМП	39 195
ВМ-ВН-ВМП	38 935
НМ-НН-НМП	33 223
СМ-СН	36 873
ВМ-НН-ВМП	38 935
НМ-ВН-НМП	38 358

2. Математична модель для моделювання чисельності населення

2.1. Огляд математичних моделей прогнозування

Наразі, існує достатня кількість моделей для прогнозування. Під час вибору моделі для цієї роботи були розглянуті ті, які найбільше підходять для демографічного прогнозування.

Модель запропонована англійським науковцем Томасом Мальтусом в його роботі «Про приріст народонаселення» вважається класичною і часто використовується в популяційній екології. Вона передбачає експоненціальний приріст популяції, яка володіє необмеженими ресурсами.

Модель Мальтуса описується наступним диференціальним рівнянням, де β - темп приросту населення:

$$\frac{dN}{dt} = \beta N$$

Модель Мальтуса більше підходить при ідеальних умовах, чого досить складно досягти у житті. Саме тому при моделюванні чисельності реального населення вона може давати значні похибки.

Наступна модель, яку було розглянуто – модель російського науковця Сергія Капіци, яку також називають феноменологічною моделлю [8]. Особливість цієї моделі – врахування визначних подій у історії людства, як наприклад, війни, пандемії, відкриття пеніциліну, тощо.

Модель описується наступним рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{K^2}$$

Модель допускає, що чисельність населення, змінюється поступово, та у деякий момент часу стається демографічний вибух [9]. Модель Капіци є досить вдалою для опису населення всього світу, але не для України. Вона більше враховує інформаційний фактор і припускає, що народжуваність та

смертність не дуже змінюються з часом, що не підходить до демографічної ситуації України.

Ще одна відома модель – модель бельгійського математика П'єра Ферхюльста, яку також називають логістичною моделлю. Вона є більш розширеною версією моделі Мальтуса і враховує обмеженість популяції. Логістична модель припускає, що швидкість росту популяції пропорційна кількості доступних ресурсів.

Модель описується диференціальним рівнянням, де r – коефіцієнт швидкості зростання, K – ємність екологічної ніші:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right)$$

Модель є досить вдалою і вже застосовувалась для прогнозування чисельності населення України [10]. У цій роботі є задача покращити точність прогнозу, саме тому у подальшому буде застосована розширена модель Ферхюльста.

2.2. Логістична модель з міграційним фактором

Для подальшого прогнозу була обрана модель Ферхюльста з деякими модифікаціями. Після огляду ситуації у країні було виявлено, що саме міграційні процеси найбільш негативно впливають на демографічну статистику.

Класична модель Ферхюльста не враховує міграційний фактор, тому буде доцільним доповнити її коефіцієнтом міграції:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) + Q,$$

Де P - кількість населення в регіоні, r – коефіцієнт зростання, K – ємність екологічної ніші, Q - фактор міграції.

Ідею додати міграційний фактор до моделі Ферхюльста запропонував Роберт Бенкс у своїй книзі «Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications» [11]. Він досліджував зміну кривої моделювання населення при додаванні міграційного фактору і зазначав, що цей фактор може бути, як константою, так і функцією, що залежить від часу або населення.

У подальшому у статті колективу авторів з розробки веб-сайту, що прогнозує чисельність населення на основі логістичної моделі з міграційним фактором була запропонована наступна варіація моделі [12]:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + Q,$$

де Q визначена функцією:

$$Q = \frac{(\alpha - \beta)P^2}{K}$$

$(\alpha - \beta)$ – коефіцієнт міграції, він може бути як від’ємним так і додатнім.

Отримуємо наступний загальний вигляд моделі:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \frac{(\alpha - \beta)P^2}{K}$$

Зробимо деякі перетворення для подальшого вирішення:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) + \frac{(\alpha - \beta)P^2}{K} = rP - \frac{rP^2}{K} + \frac{(\alpha - \beta)P^2}{K} \\ &= rP + \frac{-rP^2 + (\alpha - \beta)P^2}{K} = rP + \frac{P^2(-r + (\alpha - \beta))}{K} = \end{aligned}$$

$$= rP - \frac{P^2(r - (\alpha - \beta))}{K} = rP \left(1 - \frac{P(r - (\alpha - \beta))}{rK}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P(r - (\alpha - \beta))}{rK}\right)$$

Вирішуємо методом відокремлення змінних:

$$\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P(r - (\alpha - \beta))}{rK}\right)} = r dt$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P(r - (\alpha - \beta))}{rK}\right)} = \int_0^t r dt$$

$$\ln|P| \Big|_{P_0}^P - \ln|(r - (\alpha - \beta))P - rK| \Big|_{P_0}^P = rt$$

$$\ln|P| \Big|_{P_0}^P - \ln|(r - (\alpha - \beta))P - rK| \Big|_{P_0}^P = \ln \left| \frac{P}{P_0} \right| - \ln \left| \frac{P(r - (\alpha - \beta)) - rK}{P_0(r - (\alpha - \beta)) - rK} \right|$$

$$= \ln \left| \frac{P(P_0(r - (\alpha - \beta)) - rK)}{P_0(P(r - (\alpha - \beta)) - rK)} \right| = rt$$

$$\frac{P(P_0(r - (\alpha - \beta)) - rK)}{P_0(P(r - (\alpha - \beta)) - rK)} = e^{rt} \Rightarrow P(P_0(r - (\alpha - \beta)) - rK) = e^{rt} P_0(P(r - (\alpha - \beta)) - rK)$$

$$\Rightarrow PP_0(r - (\alpha - \beta)) - PrK - e^{rt} P_0 P(r - (\alpha - \beta)) = -e^{rt} P_0 rK$$

$$\Rightarrow -P(-P_0(r - (\alpha - \beta)) + rK + e^{rt} P_0(r - (\alpha - \beta))) = -e^{rt} P_0 rK$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^{rt} P_0 rK}{-P_0(r - (\alpha - \beta))(1 - e^{rt}) + rK} = \frac{e^{rt} P_0 K}{\frac{-P_0(r - (\alpha - \beta))(1 - e^{rt})}{r} + K}$$

Розв'язок логістичного рівняння з міграційним фактором має вигляд:

$$P = \frac{e^{rt} P_0 K}{\frac{-P_0(r - (\alpha - \beta))(1 - e^{rt})}{r} + K}$$

3. Моделювання та прогнозування чисельності населення України

3.1. Чисельність населення України з 1950 по 2020 роки

Для моделювання використані дані з 1950, щоб верифікувати результати моделі на різних етапах: з 1950 по 1995, коли приріст населення був найбільшим, а кількість українців досягло найбільшого значення майже у 52 млн. осіб.; з 2000 по 2020 роки – період активною еміграції та зниження народжуваності.

Нижче зазначені дані чисельності населення України у період з 1950 по 2020 на кожні 5 років згідно Державної служби статистики України [13]. У подальшому вони були використані для визначення екологічної ніші та коефіцієнту зростання. Похибку у результатах будемо також оцінювати станом на кожні 5 років.

Таблиця 3.1 – Населення України (1950-2020 рр.)

Рік	Чисельність	Рік	Чисельність
1950	36 905	1990	51 838
1955	39 506	1995	51 728
1960	42 469	2000	49 429
1965	45 133	2001	48 240
1970	47 127	2005	47 280
1975	48 881	2010	45 962
1980	50 044	2015	42 844
1985	50 941	2020	41 902

3.2. Міграційна статистика

Дані міграційних процесів України досить суперечливі. Державна служба статистики України зазначає позитивний великий приріст за останні 15 років, хоча чисельність українців за кордоном за оцінками ООН та МОМ значно збільшилась за цей самий період часу. За тими ж даними, значна чисельність іммігрантів за перші 15 років незалежності покинула країну [14].

Ця різниця зумовлена тим, що Держстат України вважає мігрантом людину, яка виїхала зі свого місця проживання. Такий підхід не відображає реальної картини міграційних процесів у державі, тому у прогнозі було прийняте рішення використати статистику ООН з 1950 по 2019 роки «World Population Prospects 2019» (останнє оновлення даних 28 серпня 2019) [4].

Таблиця 3.2 – Міграційний приріст України, 1 000 осіб (1950-2020 рр.)

Рік	Міграційний приріст	Рік	Міграційний приріст
1950	2,90	1990	0
1955	-0,7	1995	0,29
1960	1,1	2000	-1,85
1965	2,07	2005	-0,69
1970	1,16	2010	1,16
1975	0,86	2015	0,58
1980	0,42	2020	0,23
1985	0,75		

3.3. Визначення екологічної ніші та коефіцієнту зростання для логістичної моделі з міграційним фактором

З метою отримати найбільш точну поведінку моделі та правильність її прогнозу, в моїй роботі часовий проміжок поділено на два часові проміжки. А саме з 1950 по 2000, в цей період міграція українців була невеликою, а одразу після Другої Світової війни спостерігався активний приріст населення. Після 2000 року чисельність населення спадає, низький рівень народодітворення і значно збільшується кількість іммігрантів, що залишають країну.

Для визначення коефіцієнтів в цій роботі використано нелінійні найменші квадрати з функцією `nls()` в R, де мінімізується сума квадратів вертикальної відстані від кривої регресії. Для початкових значень коефіцієнтів обираємо $r = 0,01$ та $K = 10\ 000$.

Чисельність населення та міграційний коефіцієнт беремо з попередніх розділів, часовий проміжок від 0 до 45 (до 1995 року включно), початкове значення P_0 – чисельність населення у 1950.

```
t <- c(0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)
population <- c(36905, 39506, 42469, 45133, 47127, 48881, 50044, 50941, 51838, 51728)
pop <- 36905
mig <- c(0.0029, -0.0007, 0.0011, 0.00207, 0.00116, 0.00086, 0.00042, 0.00075, 0, 0.00029)

logisticModelMF <- nls(population ~ (pop * K * exp(r * t)) / (K + (-pop * (r - mig) * (1 - exp(r * t)))) / r,
                        start = list(r = 0.01, K = 10000))
summary(logisticModelMF)
coef(logisticModelMF)
confint(logisticModelMF)
```

Рисунок 2.1 – Визначення коефіцієнтів з `nls()`

Після розрахунків програми отримуємо для проміжку з 1950 до 2000 наступні коефіцієнти r та K :

$$r = 0,05094897$$

$$K = 54551,46$$

Проводимо аналогічні розрахунки для періоду з 2000 року включно. Залишаємо початкові значення коефіцієнтів $r = 0,01$ та $K = 10\ 000$. Часовий проміжок визначаємо від 0 до 20 (до 2000 року включно), початкове значення P_0 – чисельність населення у 2000 році.

Отримуємо:

$$r = 0,014273521$$

$$K = 27913,38613$$

3.4. Результати логістичної моделі з міграційним фактором для прогнозування чисельності населення

На графіку 2.1 можна побачити, що модель дала дуже схожі результати з реальними даними. Середнє похибка у обчисленнях з 1950 до 2000 років склала 0,510417398%, а після 2000 - 0,816866155%.

Нижче буде проведено порівняння результатів логістичної моделі з міграційним фактором та без нього.

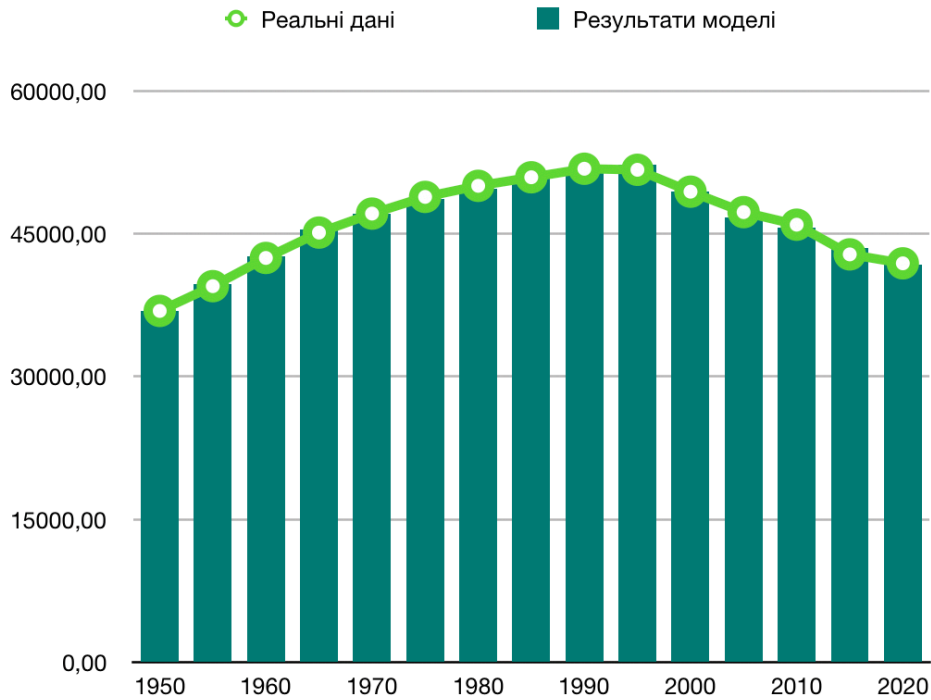


Рисунок 3.1 – Моделювання населення України з 1950 по 2020 роки.

Таблиця 3.3 – Похибка у моделюванні населення України з 1950 по 2020 роки

Рік	Похибка, %	Рік	Похибка, %
1950	0	1990	0,93731432
1955	0,51854642	1995	1,09358629
1960	0,45689101	2000	0
1965	0,64266918	2005	1,27826792
1970	0,04365522	2010	0,7342183
1975	0,50105235	2015	1,67497954
1980	0,6535575	2020	0,39686501
1985	0,25690171		

Отже, можемо зробити висновок, що модель достатньо точна, робимо подальший прогноз.

3.5. Прогнозування населення України до 2100 року

3.5.1. Позитивний сценарій

За прогнозами ООН міграційний приріст буде продовжувати зменшуватись [4]. Хоч за останні роки він впав більш ніж на 90%, спробуємо зробити більше менш нейтральне припущення, що кожні 5 років він буде зменшуватись на 50%. За такими даними чисельність у 2050 році складатиме – 35 483 млн. осіб, а у 2100 може зменшитись до 31 168 млн. осіб.

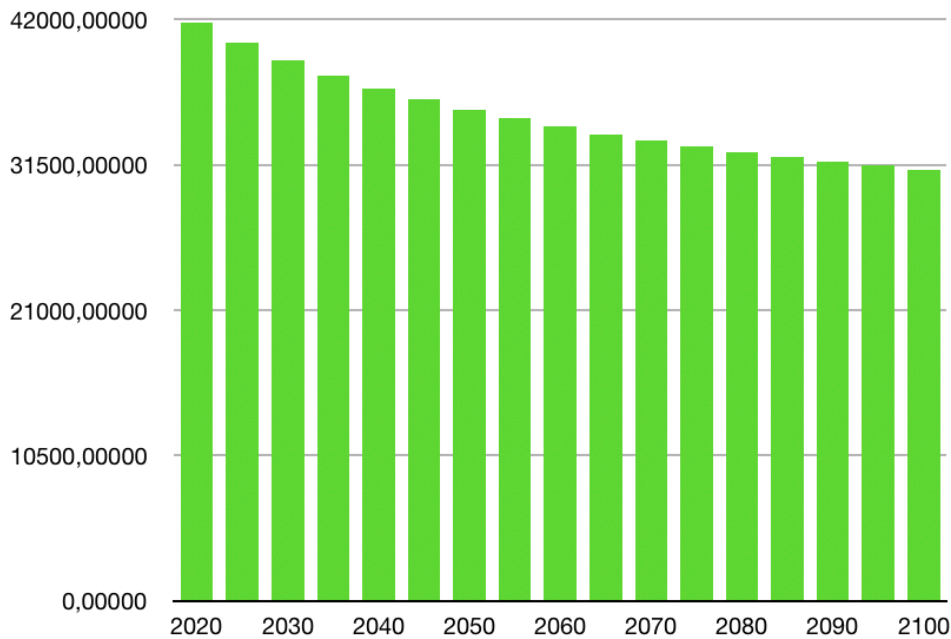


Рисунок 3.2 – Результати прогнозу з 2020 по 2100 роки.

Таблиця 3.3 – Результати позитивного прогнозу з 2020 по 2100 роки

Рік	Міграційний приріст	Рік	Міграційний приріст
2025	40282,925	2070	33241,23978
2030	40282,92479	2080	32417,9523

2040	39043,383	2090	31736,64283
2050	37973,12479	2100	31168,7619
2060	37038,59822		

3.5.2. Негативний сценарій

Для припущення щодо негативного сценарію були оглянуті існуючі роботи різних демографів. Пиріжков, Щербаков та Шевчук у своєму огляді перспектив України на 2050 рік, зробили припущення, що міграційний приріст буде змінюватись у межі від -150 тис. до 200 тис. осіб [15].

Тому буде доречним орієнтуватись на цей проміжок у подальшому. Проаналізувавши зміни у різниці іммігрантів та емігрантів у період з 2000 до 2020 роки, можна зробити висновок, що кожні 5 років вона зменшувалось трохи більше ніж на 4,1 тис. осіб. Припустимо, що така негативна тенденція буде не тільки зберігатись, але й погіршуватись і кожні 5 років показник у -4,1 тис. осіб. буде зменшуватись ще на тисячу.

Міграційний приріст будемо перераховувати кожен рік за формулою:

$$\text{Міграційний приріст} = \frac{\text{Кількість іммігрантів} - \text{Кількість мігрантів}}{P_{\text{середнє}}} * 1000,$$

Де $P_{\text{середнє}}$ – прогнозована кількість осіб за попередній період.

За такими розрахунками отримуємо 34 750 млн. осіб у 2050 році та 27 221 млн. осіб у 2100 році.

Таблиця 3.4 – Результати негативного прогнозу з 2020 по 2100 роки

Рік	Міграційний приріст	Рік	Міграційний приріст
2025	40304,54603	2070	31396,30772
2030	39011,0037	2080	29921,25682

2040	36728,14125	2090	28537,22008
2050	34750,15809	2100	27221,99609
2060	32992,24247		

3.6. Порівняння результатів логістичної моделі та логістичної моделі з міграційним фактором на моделювання чисельності населення України

Порівняємо результати логістичної моделі з міграційним фактором та звичайної логістичної моделі з попереднього дослідження 2020 року[10].

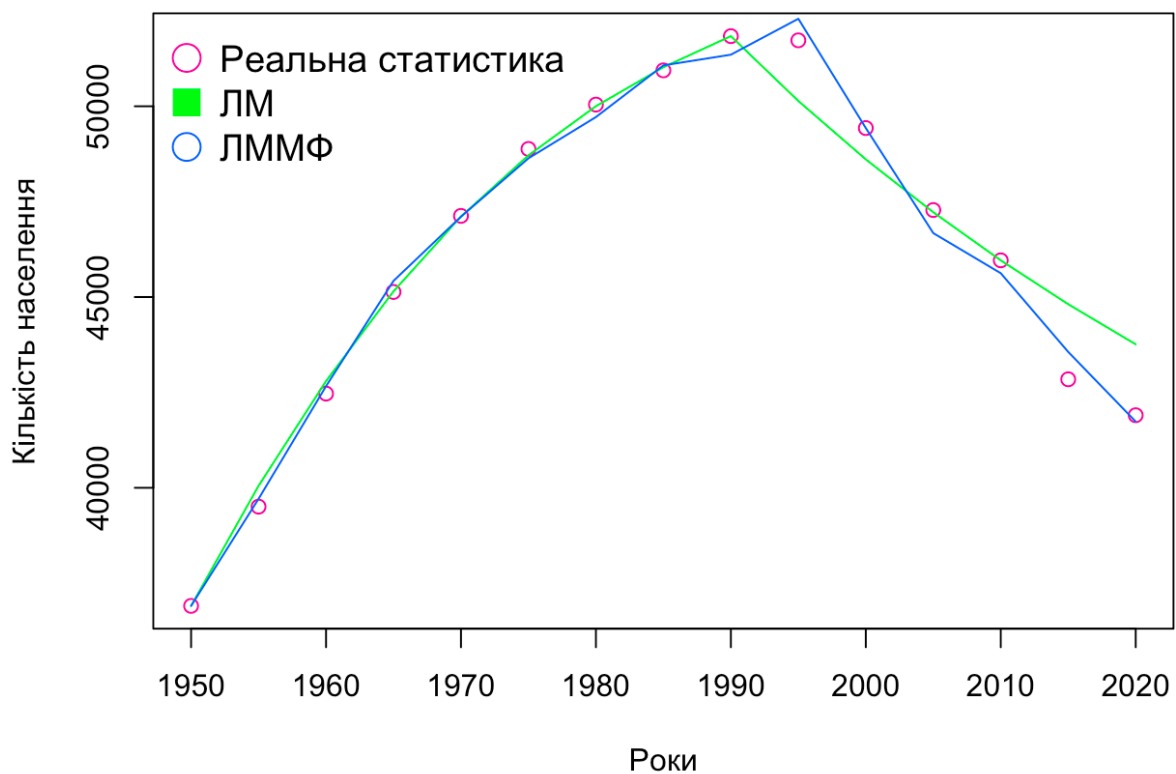


Рисунок 2.3 – Порівняння результатів прогнозування з використання різних моделей

За графіком можемо побачити, що модель Ферхюльста з міграційним фактором (МФМФ) краще показує тенденцію спаду після 2000 років, періоду початку масових міграційних процесів в Україні. Щоб визначити наскільки покращились результати нашої моделі, подивимося на значення похибок.

У період з 1950 по 2000 рр. середнє значення похибки складало для МФ майже 1,5%, для МФМФ – 0,5%. Аналогічно для проміжку часу після 2000 року похибка МФ дорівнює 2,8%, МФМФ – 0,8%. Очевидно, що ми отримали більш точні результати приблизно на 67,2% (на 65,4% з 1950 по 2000 рр., на 69,4% після 2000 р.).

3.7. Порівняння отриманих даних прогнозу та існуючих прогнозів чисельності населення України

Отриманий прогноз порівнюємо з аналогічними дослідженнями ООН та Інституту Демографії та соціальних досліджень. Візьмемо дані за 2030, 2050 та 2100 роки (дані за 2100 рік для Інституту Демографії та соціальних досліджень відсутні).

Дані позитивного прогнозу з використанням МФМФ співпадають з прогнозом ООН на 2030 рік (40 282 млн. та 40 994 млн.) і передбачають більш середнє значення між прогнозом Інституту Демографії та ООН у 2050 році. Щодо 2021 року, прогнозована чисельність сильно різниться з єдиним прогнозом для цього періоду від ООН у більш позитивний бік: 24 413 млн. проти 31 168 млн.

З негативним прогнозом на МФМФ спостерігається аналогічна ситуація. Дані за 2030 рік досить близькі до негативних даних Інституту Демографії (39 827 млн. та 39 011 млн.), а результати за 2050 рік попали приблизно у середнє значення проміжку прогнозів ООН та негативного

сценарію Інституту Демографії. Дані на 2100 рік все ще залишаються більш позитивними, хоча вже значно ближчі до даних ООН (27 млн. та 24 413 млн.).

Загалом, обидва прогнози з використанням МФМФ передбачають трохи більш оптимістичні результати.

Таблиця 3.5 – Порівняння прогнозів

Рік	Прогноз ООН	Інститут Демографії Позитивний прогноз	Інститут Демографії Негативний прогноз	МФМФ Позитивний прогноз	МФМФ Негативний прогноз
2030	40 994	42 822	39 827	40 282	39 011
2050	35 219	38 935	33 223	37 973	34 750
2100	24 413	–	–	31 168	27 222

Висновок

У ході роботи було розглянуто різні математичні моделі прогнозування приросту населення, за допомогою яких було проведено аналіз демографічної ситуації України. Основною моделлю, що використовувалась в даній роботі є модифікована модель Ферхюльста (логістична модель з міграційним фактором), що була запропонована групою авторів в [12]. В даній роботі цю модель було адаптовано для України і побудовано, щодо кількості населення України.

Вибір моделі обумовлено тим, що основні чинники, які впливають на негативний приріст населення – зменшення народжуваності та міграційні процеси. Після адаптування моделі, її було перевірено на різних часових проміжках – з 1950 по 2000 рр., з 2000 по 2020 рр.. Проведений порівняльний аналіз з реальними даними показав, що вона є досить вдалою, і підібрані для неї коефіцієнти добре співпадають зі справжніми темпами зростання. Після порівняння з реальними даними модель показала середнє значення похибки – 0,65%, що є значно кращим результатом у порівняння зі звичайною логістичною моделлю, де середнє значення похибки 2,2%.

Після перевірки моделі було складено два прогнози чисельності населення до 2100 року. Для цього після аналізу міграційних процесів було зроблено два припущення: якщо міграційний приріст буде зменшуватись на 50% від попереднього значення кожні 5 років та якщо міграційний приріст буде зменшуватись на сталу кількість людей – 4,1 тис. осіб – кожні 5 років. Згідно позитивному сценарію, чисельність населення України може складати 37 973 млн. осіб у 2050 році та 31 168 млн. осіб у 2100 році. За негативним сценарієм трохи сумніша ситуація, бо у 2050 році він передбаченає 34 750 млн. осіб, а у 2100 році – 27 222 млн. осіб.

Отриманий прогноз був порівняний з двома існуючими прогнозами чисельності населення України від ООН та Інституту Демографії та

соціальних досліджень. Загалом, отримані результати є досить схожими на вже побудовані прогнози, але прогноз виявився більш оптимістичним, ніж за передбаченням ООН.

Література

1. Трудова міграція: скільки українців працювали за кордоном в 2019-2021 роках [Електронний ресурс]: Слово і Діло – Аналітичний портал – 18 березня 2021 р. – Режим доступу: <https://ru.slovoidilo.ua/2021/03/18/infografika/obshhestvo/trudovaya-migraciya-skolko-ukraincev-rabotali-granicej-2019-2021-godax>
2. Майже 10% населення: в уряді підраховали, скільки українців виїхали за кордон з початку десятиліття [Електронний ресурс]: Громадське телебачення /Я. Винокуров – 18 грудня 2019 р. - Режим доступу: <https://hromadske.ua/ru/posts/kak-belorusskie-specsluzhby-vysledili-romana-protasevicha>
3. Україна стане "країною пенсіонерів" до 2050 року - прогноз ООН [Електронний ресурс]: Ліга. Фінанси – 28 січня 2021 р. - Режим доступу: <https://finance.liga.net/pension/novosti/ukraina-stanet-stranoy-pensionerov-k-2050-godu-prognoz-oon>
4. World Population Prospects 2019: Methodology of the United Nations population estimates and projections [Електронний ресурс]: United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division – К., 2019 - Режим доступу: <https://knoema.ru/UNWPP2019/world-population-prospects-2019>
5. Міграція в Україні 2019. Цифри і факти [Електронний ресурс]: Міжнародна Організація з міграції. Агентство ООН з питань міграції – К., 2019 – Режим доступу: https://iom.org.ua/sites/default/files/iom-ukraine_facts-ukr_2019.pdf
6. Education: Inbound internationally mobile students by country of origin [Електронний ресурс]: UNESCO – Режим доступу: <http://data.uis.unesco.org/Index.aspx?queryid=171#>

7. Комплексний демографічний прогноз України на період до 2050 р. (колектив авторів)/ за ред. чл.-кор. НАНУ, д.е.н., проф. Е.М. Лібанової. – К.: Український центр соціальних реформ, 2011
8. Капіца С. П. Феноменологическая теория роста населения Земли / С. П. Капіца – М.: Наука, 1996, - 80 с.
9. Капіца С. П. Общая теория роста населения Земли / С. П. Капіца – М.: ММВБ, 2009. - 120 с.
10. Змитрович М.О. Математичне моделювання та прогнозування зміни чисельності України, 2020
11. Banks, R. B.: 1994, Growth and Diffusion Phenomena: Mathematical Frameworks and Applications, Springer-Verlag, Berlin.
12. Fransisca D. C. Developing Website-Based Logistic Models with Migration Factors for Population Prediction / Fransisca D. C., Paath D.K., Marbun P., Mohd I.B. – International Journal of Innovation, Creativity and Change – Vol.9, 2019
13. Розподіл постійного населення за статтю, віковими групами та типом місцевості [Електронний ресурс]: Державна служба статистики – К., 2020.
– Режим доступу:
http://database.ukrcensus.gov.ua/MULT/Dialog/statfile_c.asp
14. Большая миграция: почему никто в Украине не знает, сколько наших граждан выехало за границу [Електронний ресурс]: Вокс Україна / Т. Тищук – 20 жовтня 2018 р. – Режим доступу:
<https://voxukraine.org/ru/bolshaya-migratsiya-pochemu-nikto-v-ukraine-ne-znaet-skolko-nashih-grazhdan-vyehalo-za-granitsu/>
15. Пирожков С. І Україна 2050: Перспективи Демографічного Розвитку – Demography and Social Economy, 2014/ Пирожков С.І., Щербов С.Я., Шевчук П.Є.

Додаток А Лістинг коду

FittingModel_1.R

```
t <- c(0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)
population <- c(36905, 39506, 42469, 45133, 47127, 48881, 50044,
50941, 51838, 51728)

pop <- -36905
mig <- -c(0.0029, -0.0007, 0.0011, 0.00207, 0.00116, 0.00086, 0.00042,
0.00075, 0, 0.00029)

logisticModelMF <- nls(population~(pop * K * exp(r * t)) / (K + (-pop
* (r - mig) * (1 - exp(r * t))) / r),
  start = list(r = 0.01, K = 10000))

summary(logisticModelMF)
coef(logisticModelMF)
confint(logisticModelMF)
```

FittingModel_2.R

```
t <- c(0, 5, 10, 15, 20)
population <- c(49429, 47280, 45962, 42844, 41902)
pop <- -49429
mig <- c(-0.00185, -0.00069, 0.00116, 0.00058, 0.00023)

logisticModel <- nls(population~(pop*K*exp(r*t))/(K+(-pop*(r-mig)*(1-
exp(r*t)))/r), start=list( r=0.01, K=10000))
summary(logisticModel)
coef(logisticModel)
confint(logisticModel)
```

Models_Visual.R

```
real_data <- read.table("/Users/mariazmitrovich/Desktop/comparison til
2000.csv", header=TRUE, sep=";")
x <- real_data$years

plot( x, real_data$real, col="#FF0099", xlab="Роки", ylab="Кількість
населення" )
lines( x, real_data$LMMF, type="l", col="#645874")

real_data2 <- read.table("/Users/mariazmitrovich/Desktop/comparison -
копия.csv", header=TRUE, sep=";")
x <- real_data2$years
```

```

plot( x,real_data2$real, col="#FF0099",xlab="Роки",ylab="Кількість
населення" )
lines( x, real_data2$LMMF, type="l", col="#645874")

x <- real_data$years
plot( x, real_data$real, col="#FF0099",xlab="Роки",ylab="Кількість
населення",back )
lines(x, real_data$LM, type="l", col="#00FF4D")
lines( x, real_data$LMMF, type="l", col="#0066FF")

legend("topleft",
      legend = c("Реальна статистика", "ЛМ","ЛММФ"),
      col = c("#FF0099",
              "#00FF4D",
              "#0066FF"),
      pch = c(1,15),
      bty = "n",
      pt.cex = 2,
      cex = 1.2,
      text.col = "black",
      )

```

Додаток Б Позитивний прогноз чисельності населення України до 2100 року

2025	40282,92479
2030	39043,383
2035	37973,12479
2040	37038,59822
2045	36214,9812
2050	35483,76465
2055	34830,82477
2060	34245,09055
2065	33717,66365
2070	33241,23978
2075	32809,72166
2080	32417,9523
2085	32061,52494

2090	31736,64283
2095	31440,01274
2100	31168,7619

**Додаток В Негативний прогноз чисельності
населення України до 2100 року**

2025	40304,54603
2030	39011,0037
2035	37824,72154
2040	36728,14125
2045	35707,12008
2050	34750,15809
2055	33847,80908
2060	32992,24247
2065	32176,91288
2070	31396,30772
2075	30645,75217
2080	29921,25682
2085	29219,39759
2090	28537,22008
2095	27872,16298
2100	27221,99609