УДК 551.5+535

Баськов Р. А., Чумак О. О.

ВПЛИВ ТУРБУЛЕНТНОЇ АТМОСФЕРИ НА РОЗШИРЕННЯ СВІТЛОВИХ ІМПУЛЬСІВ

Випадкові флуктуації показника заломлення істотно впливають на статистичні характеристики лазерного пучка при поширенні його через турбулентну атмосферу. У випадку сильної турбулентності та великих відстаней між джерелом випромінювання та приймачем ефект збільшення довжини імпульсу (розширення імпульсу) може бути значним. Це призводить до таких небажаних явищ, як флуктуації часу прильоту імпульсу до детектора та перекриття сусідніх імпульсів. В результаті обмежуються можливості використання лазерів для передачі в атмосфері квантових криптографічних ключів, зменшується ефективність високошвидкісних оптичних систем зв'язку. В даній роботі ефект розширення світлового імпульсу досліджується теоретично з використанням методу фотонної функції розподілу у фазовому просторі [1]. Одержані аналітичні вирази дозволяють оцінити збільшення довжини імпульсів і прогнозувати можливість їх перекриття.

Ключові слова: оптичні флуктуації, оптичні імпульси, фотонна функція розподілу.

1. Вступ

При поширенні через атмосферу лазерний пучок зазнає впливу флуктуацій показника заломлення. Ці флуктуації мають місце внаслідок випадкових змін локальної температури атмосфери, які, в свою чергу, проявляють себе через зміни її густини [2, 3]. Характерні розміри випадкових неоднорідностей густини (турбулентних вихорів) лежать в інтервалі від кількох міліметрів (внутрішній радіус вихорів, l_0) до сотень метрів (зовнішній радіус, L_0).

Поширення пучків оптичного випромінювання в середовищі з флуктуючим показником заломлення має характерні особливості: під час розсіяння на крупномасштабних атмосферних неоднорідностях пучки випадково відхиляються від початкового напрямку («блукання» чи «дрижання» променів); під час розсіяння на дрібномасштабних неоднорідностях збільшується радіус пучків; внаслідок переміщення атмосферних вихорів, під дією вітру або при здійсненні зв'язку між рухомими об'єктами, дещо збільшується ширина лінії випромінювання. Одним з найбільш негативних явищ, є так званий ефект насичення флуктуацій: при поширенні на великі відстані статистичні характеристики лазерного випромінювання набувають характерних ознак гаусової статистики і тоді відношення сигнал/шум наближається до одиниці, що істотно погіршує можливості оптичних комунікаційних систем. Тому вивчення впливу турбулентної атмосфери на поширення в ній електромагнітних хвиль є актуальним напрямком сучасних досліджень, прогрес у якому дозволить розв'язати багато практичних задач в галузі лазерних комунікацій, оптичних радарних систем, астрономії тощо. Нашою метою є дослідити зміну форми та розмірів окремих імпульсів при їх поширенні в атмосфері на великі відстані. Практично всі оптичні явища при поширенні світла на невеликі відстані (значно менші від тих, де має місце ефект насичення флуктуацій) можна описати давно відомим методом Ритова [2], в основі якого є припущення, що атмосфера неістотно змінює характеристики пучків. Ми використаємо метод фотонної функції розподілу, який є ефективним саме тоді, коли вплив атмосфери є визначальним, зокрема для знаходження явного виразу для ширини світлового імпульсу в напрямку поширення лазерного пучка.

2. Опис взаємодії лазерного пучка з турбулентною атмосферою методом функції розподілу фотонів

Фотонна функція використовувалась для дослідження взаємодії світла з напівпровідниковою плазмою ще в 1992 році у роботі [4]. Пізніше, в роботі [1] метод був узагальнений для теоретичного дослідження оптичних явищ в атмосфері.

Гамільтоніан фотонного поля в середовищі з випадково неоднорідним показником заломлення має вигляд:

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} b_{\boldsymbol{k}} - \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} n_{\boldsymbol{k}'} b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} b_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'}, \quad (1)$$

де перший доданок описує фотони у вакуумі, а другий враховує вплив випадково неоднорідних флуктуацій показника заломлення на електромагнітне поле: $b_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}, b_{\boldsymbol{k}}$ — оператори народження та знищення фотонів з хвильовим вектором $\boldsymbol{k}$, енергія фотона $\hbar\omega_{\boldsymbol{k}} = \hbar kc$, де c - швидкість світла у вакуумі, а $n_{\boldsymbol{k}}$ - перетворення Фур'є для флуктуацій показника заломлення $\delta n(\boldsymbol{r})$. Перетворення Фур'є визначається таким чином:

$$n_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{V}\int dV e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\delta n(\boldsymbol{r}), \qquad (2)$$

де V — нормуючий об'єм.

Вираз для гамільтоніану (1) можна одержати з представлення енергії електромагнітного поля у середовищі з неоднорідним показником заломлення [5] у наближенні малих хвильових векторів $k'(k' \ll k)$, де k – характерні хвильові вектори випромінювання, та з врахуванням малості флуктуацій показника заломлення атмосфери ($\delta n(\boldsymbol{r}) \ll 1$). Крім того, показник заломлення вважається незалежним від часу, що справедливо тоді, коли характерні часи зміни конфігурації атмосфери ($10^{-3} - 10^{-2}$ c) є значно більшими за час поширення світла від джерела до детектора. Розглядаємо тільки випадок поляризованого світла з фіксованою поляризацію при його поширенні. Зміна поляризації, спричинена турбулентністю, є дуже малою. Більш детально про цей ефект йдеться в роботі [7].

У теорії фотоелектричних вимірювань широко використовується позитивно-частотний оператор [6]

$$\hat{V}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\boldsymbol{k},\lambda} b_{\boldsymbol{k},\lambda}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\lambda}e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}. \qquad (3)$$

Оператор інтенсивності величини $\hat{V}$ визначається як

$$\hat{I}(\boldsymbol{r},t) = \hat{V}^{\dagger}(\boldsymbol{r},t)\hat{V}(\boldsymbol{r},t). \qquad (4)$$

Легко бачити, що оператор повної кількості фотонів виражається через $\hat{I}(\boldsymbol{r},t)$ співвідношенням

$$\hat{n} = \int dV\hat{I}(\boldsymbol{r},t). \qquad (5)$$

Якщо $\hat{n}$ — сумарна (за об'ємом) кількість фотонів, то $\hat{I}(\boldsymbol{r},t)$ можна інтерпретувати як оператор локальної густини фотонів.

Після підстановки виразу (3) в (4) одержимо

$$\hat{I}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k},\lambda,\lambda'} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}b_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda'}\times \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda'}. \qquad (6)$$

Члени з великими $|\boldsymbol{k}|$ описують процеси, що швидко змінюються в просторі. В той же час у багатьох практично важливих випадках істотними є тільки певні значення хвильових векторів фотонів, наприклад, коли світло генерується лазером, чи проходить вузькосмугові фільтри, а характерні просторові масштаби зміни його інтенсивності значно перевищують довжини хвиль. Наведемо приклад: пучок має поперечний розмір $d \sim 1$ cm, а довжина хвилі знаходиться у видимому діапазоні $\lambda \sim 0,6$ μm; тоді $d \gg \lambda$ і для детальної інформації про пучок досить обмежити набір $\boldsymbol{k}$ якимось значенням k_0 ($|\boldsymbol{k}| \ll k_0$, де $2\pi/d \ll k_0 \ll 2\pi/\lambda$).

Подібна у фізичному сенсі, але відмінна за формою процедура обмеження вкладів компонент з великими значеннями k у виразі для $\hat{I}$ була описана Манделем у 1966р., який запропонував усереднювати оператор $\hat{I}$ по невеликому просторовому об'єму ($\tilde{V} \ll V$). Згідно із сказаним, цей об'єм має бути достатньо малим ($\tilde{V} = l_x l_y l_z, l_i \ll d$), але в той же час його розміри зручно взяти значно більшими за характерну довжину хвилі. Тоді оператор

$$\hat{n}(\tilde{V},t) = \int_{\tilde{V}} dV\hat{I}(\boldsymbol{r},t), \qquad (7)$$

що називається оператором Манделя [6] або ж оператором густини фотонів у об'ємі $\tilde{V}$, описує «загрублену» густину фотонів (а не густину фотонів у заданій точці).

З врахуванням вищесказаного далі будемо використовувати оператор густини фотонів у вигляді:

$$\hat{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q},|\boldsymbol{k}|<k_0,\lambda,\lambda'} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}b_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda'}\times \times \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda'}, \qquad (8)$$

Оскільки ми вже обмежили характерні значення $|\boldsymbol{k}|$ ($|\boldsymbol{k}| \ll |\boldsymbol{q}|$), то можна вважати, що

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda} \approx \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda}, \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda'} \approx \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda'}. \qquad (9)$$

Тоді внаслідок ортогональності векторів $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda'}$ з різними λ, λ' матимемо $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{q},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}$. Враховуючи це, (8) перепишеться у вигляді

$$\hat{n}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q},\lambda,|\boldsymbol{k}|<k_0} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}b_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda}. \qquad (10)$$

Як бачимо, оператор $\hat{n}$ відрізняється від $\hat{I}$ тим, що охоплює лише незначну область хвильових векторів $\boldsymbol{k}$ (але якої цілком вистачає для описання фотонного поля, характеристики якого плавно змінюються у просторі).

Далі визначимо функцію розподілу:

$$f_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t) = \frac{1}{V}\sum_{|\boldsymbol{k}|<k_0,\lambda} e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}/2,\lambda}b_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}/2,\lambda}. \qquad (11)$$

Тоді

$$\hat{n}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{q},\lambda} f_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t). \qquad (12)$$

Можна бачити, що оператор $f_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ визначає вклад фотонів з різними хвильовими векторами $\boldsymbol{q}$

і з різними поляризаціями в оператор густини. За аналогією з попереднім розглядом можна стверджувати, що $f_\lambda(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ - це функція, що описує густину фотонів у фазовому просторі $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q})$. Легко побачити, що оператор $\int dV f_\lambda(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t) = b^\dagger_{\boldsymbol{q},\lambda} b_{\boldsymbol{q},\lambda}$ визначає кількість фотонів з імпульсом $\hbar\boldsymbol{q}$, а сума по $\boldsymbol{q}$ і λ є оператором густини фотонів у конфігураційному просторі ($\boldsymbol{r}$-просторі). Як буде видно далі, функцію $f_\lambda(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ можна використати для опису оптичних явищ, що відбуваються у турбулентній атмосфері на великих відстанях від джерела (при сильній турбулентності).

Подальший розгляд буде проводитись з використанням представлення Гейзенберга. Тоді зміна оператора $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ у часі визначається комутатором

$$\partial_t f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t) = \frac{1}{i\hbar}[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t), H]. \tag{13}$$

Як зазначалося раніше, $f_\lambda(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ використовується для поляризованого світла, тому далі ми опускатимемо індекс λ.

Підставивши відповідні вирази для гамільтоніану і функції розподілу, а також врахувавши, що характерні значення $\boldsymbol{q}$ значно більші за хвильові вектори турбулентності, одержимо

$$\{\partial_t + \boldsymbol{c_q}\partial_{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\partial_{\boldsymbol{q}}\} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t) = 0, \tag{14}$$

де $\boldsymbol{c_q} = \partial_{\boldsymbol{q}}\omega_{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \omega_0\partial_{\boldsymbol{r}} n(\boldsymbol{r})$. Звідси видно, що в кінетичному рівнянні для функції розподілу присутня сила, зумовлена атмосферною турбулентністю. Рівняння (14) можна інтерпретувати як таке, що описує еволюцію розподілу точкових частинок у фазовому просторі. Їх швидкість дорівнює $\boldsymbol{c}_(\boldsymbol{q})$ і на них діє сила $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Розв'язок кінетичного рівняння можна виразити через траєкторії частинок, які, в свою чергу, є розв'язками рівнянь руху:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{c}[\boldsymbol{q}(t)], \tag{15}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}(t)}{\partial t} = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t)]. \tag{16}$$

Загальний розв'язок рівняння (14) можна записати у вигляді

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t) = \phi\left(\boldsymbol{r} - \int_0^t dt' \frac{\partial \boldsymbol{r}(t')}{\partial t'};\right.$$
$$\left.\boldsymbol{q} - \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{q}(t')}{\partial t'}, t=0\right), \tag{17}$$

де $\phi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q})$ значення функції розподілу фотонів у початковий момент часу $t = 0$, а «траєкторії» $\boldsymbol{r}(t')$, $\boldsymbol{q}(t')$ проходять через точку $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q})$ при $t' = t$.

При поширенні пучків з малим розходженням (параксіальних пучків) виконуються нерівності $k_\perp, q_\perp \ll q_0$, де індексом $(\perp)$ позначено перпендикулярні до напрямку поширення (осі z) компоненти. Використовуючи рівняння руху, можна записати загальний вираз для імпульсу фотона у вигляді $\boldsymbol{q}_\perp(t')$ у вигляді

$$\boldsymbol{q}(t') = \boldsymbol{q} + \int_t^{t'} dt'' \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(t'')]. \tag{18}$$

Так само з рівнянь руху одержуємо залежність «координати» фотона $\boldsymbol{r}(t')$ від часу в такому вигляді:

$$\boldsymbol{r}(t') = \boldsymbol{r} + \int_t^{t'} dt'' \boldsymbol{c}[\boldsymbol{q}(t'')]. \tag{19}$$

Тоді після підстановки (18), (19) в (17) використаємо ітеративну процедуру (вважаючи $\boldsymbol{F}$ слабким збуренням) для знаходження явного вигляду функції $\boldsymbol{r}(t')$, яка входить у вираз для функції розподілу фотонів. Остання може бути використана для розв'язання різноманітних задач. Зокрема, через неї можна виразити перший і другий моменти f, які описують зміни параметрів пучка та флуктуацій інтенсивності при його поширенні в атмосфері. Можна також дослідити ефекти «блукання» пучка, флуктуації кута входження в апертуру приймача тощо.

3. Збільшення довжини лазерних імпульсів

Для дослідження ефектів розширення лазерних імпульсів досить знайти вираз для інтенсивності випромінювання як функції часу та координат детектора. Коли відомо, наскільки збільшується довжина імпульсів, то можна легко оцінити, чи має місце перекриття сусідніх імпульсів, або, чи можуть окремі фотони з пізніших імпульсів попасти на детектор раніше своїх попередників,тобто випереджати один одного. Такі дослідження необхідні для оцінки ефективності процедури передачі квантових криптографічних ключів, де в кожному імпульсі може бути (в середньому) близько одного фотона, і кожен з них є носієм одиниці інформації. При збільшенні довжини імпульсів спотворюється також інформація у високошвидкісних каналах зв'язку (див., наприклад, роботи [8],[9]).

Інтенсивність оптичного випромінювання (з точністю до постійного множника), як було показано вище, виражається через $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$ таким чином [1]:

$$I(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{q}} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t), \tag{20}$$

де враховано, що ширина спектра випромінювання є малою.

Підставивши сюди загальний вираз для $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{q},t)$, одержимо:

$$I(\boldsymbol{r})=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\left\{\boldsymbol{r}-\int\limits_0^t dt'\boldsymbol{c}[\boldsymbol{q}(t')]\right\}}\times$$
$$\times\left\{b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}-\int\limits_0^t dt'\boldsymbol{F}_{\perp}[\boldsymbol{r}(t')]+\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\; b_{\boldsymbol{q}-\int\limits_0^t dt'\boldsymbol{F}_{\perp}[\boldsymbol{r}(t')]-\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\right\}_{t=0}. \tag{21}$$

Для знаходження середнього значення $\langle I(\boldsymbol{r})\rangle$ необхідно врахувати залежність групової швидкості світла, що входить у вираз (21) від флуктуацій показника заломлення. У попередніх роботах така залежність враховувалася лише в лінійному наближенні поδn . Зараз ми врахуємо і квадратичні члени. Тоді швидкість світла в атмосфері з флуктуючим показником заломлення набуває вигляду:

$$\boldsymbol{c}[\boldsymbol{q}(t')]=c[1-\delta n(t')-\frac{q_{\perp}^2(t')}{2q_0^2}]\boldsymbol{e}_z+$$
$$+c\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}(t')}{q_0}[1-\delta n(t')], \tag{22}$$

де повздовжня складова хвильового вектора q_z виражається через поперечну і враховуються лінійні та квадратичні вклади малих величин δn та $\boldsymbol{q}_{\perp}(t)$.

Після заміни змінних $\boldsymbol{q}_{\perp}-\int\limits_0^t dt'\boldsymbol{F}_{\perp}[\boldsymbol{r}(t')]\rightarrow\boldsymbol{q}_{\perp}$ середнє значення інтенсивності набуває вигляду:

$$\langle I(\boldsymbol{r})\rangle=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}}\left\langle e^{-i\boldsymbol{k}\left\{\boldsymbol{r}-\int\limits_0^t dt' c[1-\delta n(t')-\right.}\times\right.$$
$$\left.\times\, e^{\left.-\frac{q_{\perp}^2(t')}{2q_0^2}]\boldsymbol{e}_z+c\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}(t')}{q_0}[1-\delta n(t')]\right\}}\right\rangle\times$$
$$\times\left\langle\left\{b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}}b_{\boldsymbol{q}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\right\}_{t=0}\right\rangle, \tag{23}$$

після вищезазначеної заміни залежність $\boldsymbol{q}_{\perp}(t')$ має вже дещо інший вигляд, а саме: $\boldsymbol{q}_{\perp}+\int\limits_0^{t'}\boldsymbol{F}_{\perp}(t'')dt''$.

Перше усереднення у (23) після знака суми — це усереднення за різними конфігураціями показника заломлення, а друге — за флуктуаціями, зумовлених самим джерелом. Очевидно, що обидва випадкові процеси є незалежними.

Для $\langle\{b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}}b_{\boldsymbol{q}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\}_{t=0}\rangle$ усереднення повністю залежить від властивостей джерела. З умови зшивки полів лазерного поля та поля, що поширюється в атмосфері, можна отримати [10]:

$$b_{\boldsymbol{q}}=b(V)^{-1/2}\int d\boldsymbol{r}e^{-i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)\boldsymbol{r}}\Phi(\boldsymbol{r}), \tag{24}$$

де лазерне поле вважається одномодовим. $\Phi(\boldsymbol{r})$ – це нормована функція, що описує конфігурацію лазерного поля поблизу вихідної апертури, а $b_{\boldsymbol{q}},b$ є операторами знищення для поля в атмосфері та на виході лазера, відповідно. Аналогічне співвідношення має місце для операторів народження. Вважаючи, що $\Phi(\boldsymbol{r})$ є гаусівською функцією,

$$\Phi(\boldsymbol{r})=(\frac{2}{\pi})^{3/4}(r_0^2r_z)^{-1/2}e^{-\boldsymbol{r}^2/r_0^2-(z-z_0)^2/r_z^2}, \tag{25}$$

а також враховуючи вираз (24), отримаємо:

$$\left\langle\left\{b^{\dagger}_{\boldsymbol{q}+\frac{\boldsymbol{k}}{2}}b_{\boldsymbol{q}-\frac{\boldsymbol{k}}{2}}\right\}_{t=0}\right\rangle=\frac{(2\pi)^{3/2}r_0^2r_z}{V}\left\langle b^{\dagger}b\right\rangle\times$$
$$\times\, e^{-\boldsymbol{k}_{\perp}^2(r_0^2/8)-\boldsymbol{q}_{\perp}^2(r_0^2/2)+ik_zz_0}\times$$
$$\times\, e^{-\boldsymbol{k}_z^2(r_z^2/8)-(\boldsymbol{q}_z-\boldsymbol{q}_0)^2(r_z^2/2)}, \tag{26}$$

При усередненні за різними конфігураціями показника заломлення вважається, що $\delta n(\boldsymbol{r})$ є гаусівською випадковою змінною з відомою коваріацією $\langle\delta n(\boldsymbol{r})\delta n(\boldsymbol{r}')\rangle=\langle\delta n(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta n(0)\rangle$. Остання визначається її фур'є-перетворенням $\psi(\boldsymbol{g})$ по змінній $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. Залежність $\psi(\boldsymbol{g})$ зазвичай задається формулою фон Кармана:

$$\psi(\boldsymbol{g})=0.033C_n^2\frac{\exp[-(gl_0/2\pi)^2]}{[g^2+L_0^{-2}]^{11/6}}, \tag{27}$$

де C_n^2 називається структурною константою показника заломлення. Вона характеризує турбулентність атмосфери. У багатьох найбільш важливих з фізичної точки зору випадках, величиною L_0^{-2} в знаменнику можна знехтувати і тоді формула фон Кармана змінюється на формулу Татарського.

Далі вважатимемо, що основний вклад у $\boldsymbol{q}_{\perp}$ дає турбулентність (тобто знехтуємо початковим значенням $\boldsymbol{q}_{\perp}$). Очевидно, що таке наближення добре виконується при поширенні пучка на великі відстані. Саме такий випадок і розглядається в нашій роботі. Тоді

$$\boldsymbol{q}_{\perp}(t)\approx\int\limits_0^t dt'\boldsymbol{F}_{\perp}[\boldsymbol{r}(t')]. \tag{28}$$

В експоненті (23) виділимо флуктуючу частину $q_{\perp}^2(t')$, записавши цю величину у вигляді $q_{\perp}^2(t')\equiv q_{\perp}^2(t')-\langle q_{\perp}^2(t')\rangle+\langle q_{\perp}^2(t')\rangle$. Тоді наша задача зведеться до знаходження середнього значення наступного виразу:

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_zc\frac{q_{\perp}^2(t')-\langle q_{\perp}^2(t')\rangle}{2q_0^2}}\times\right.$$
$$\left.\times\, e^{-\int\limits_0^t dt' ick_zn(t')}e^{-\int\limits_0^t dt' i\boldsymbol{k}_{\perp}c\frac{\boldsymbol{q}_{\perp}(t')}{q_0}}\right\rangle. \tag{29}$$

Можна показати, що (29) розбивається на два незалежних усереднення:

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_z c \frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}} e^{-\int\limits_0^t dt' i\boldsymbol{k}_\perp c \frac{\boldsymbol{q}_\perp(t')}{q_0}} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ick_z n(t')} \right\rangle. \quad (30)$$

Знаходження середнього від першого множника у (30) залишається складною математичною задачею. Аналітичний розв'язок, який дозволяє проаналізувати картину на якісному рівні, можна отримати лише в грубому наближенні. Воно полягає в тому, що ми вважатимемо різницю $q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle$ малою величиною і знехтуємо кореляціями між експонентами в першому множнику (30). В результаті матимемо три незалежні усереднення. Експоненту у виразі $\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_z c \frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}} \right\rangle$ розкладемо в ряд по різниці $q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle$, зберігши члени до другого порядку включно. Тоді

$$\left\langle e^{-\int\limits_0^t dt' ik_z c \frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2}} \right\rangle =$$
$$= \left\langle 1 - \frac{1}{2} k_z^2 c^2 \left(\int\limits_0^t dt' ik_z c \frac{q_\perp^2(t')-\langle q_\perp^2(t')\rangle}{2q_0^2} \right)^2 \right\rangle. \quad (31)$$

Усереднивши за флуктуаціями показника заломлення експоненційні множники, отримаємо:

$$\left\langle e^{-i\boldsymbol{k}\left\{\boldsymbol{r}-\int\limits_0^t dt' c[1-\delta n(\boldsymbol{r}(t'))-\frac{q_\perp^2(t')}{2q_0^2}]\boldsymbol{e}_z\right.} \times \right.$$
$$\left. \times\, e^{\left. c\frac{\boldsymbol{q}_\perp(t')}{q_0}[1-\delta n(\boldsymbol{r}(t'))]\right\}} \right\rangle =$$
$$= e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}+ik_z(L-3L^2T)} \times$$
$$\times\, e^{-0.7k_z^2 T L l_0^{1/3} L_0^{5/3} - k_\perp^2 L^3 T} (1 - 9k_z^2 L^4 T^2), \quad (32)$$

де $T = 0.558 C_n^2 l_0^{-1/3}$, а L — відстань на яку поширився імпульс, $L = ct$.

Підставивши результати усереднення і знайшовши суму по $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q}$, одержимо остаточний вираз для середньої інтенсивності:

$$\langle I(\boldsymbol{r})\rangle = I_0 e^{-\frac{2r_\perp^2}{r_0^2}\left(1+\frac{8L^3T}{r_0^2}\right)^{-1}} \times$$
$$\times\, e^{-\frac{2(z-z_0-L+3L^2T)^2}{r_z^2}\left(1+\frac{5.3TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}}{r_z^2}\right)^{-1}} \times$$
$$\times \left(1 - 9k_z^2 L^4 T^2 \left[\frac{1}{4(r_z^2/8 + 0.7k_z^2 T L l_0^{1/3} L_0^{5/3})} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{(z-z_0-L+3L^2T)^2}{(r_z^2/8 + 0.7k_z^2 T L l_0^{1/3} L_0^{5/3})^2} \right]\right), \quad (33)$$

де константа I_0 визначається інтенсивністю джерела випромінювання і дорівнює $\langle I(\boldsymbol{r}=0, L=0)\rangle$.

Для отримання явної залежності довжини імпульсу від відстані L та сили турбулентності використовуємо загальний вираз:

$$R_z^2 = \frac{\int z_{eff}^2 \langle I(z_{eff})\rangle dz}{\int \langle I(z_{eff})\rangle dz}, \quad (34)$$

де z_{eff} – відстань до центру імпульсу, з (33) $z_{\text{eff}} = z - z_0 - L + 3L^2T$.

Провівши інтегрування, одержуємо вираз для ширини імпульсу:

$$R_z^2 = 2\left(\frac{r_z^2}{8} + 0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}\right) \times$$
$$\left(1 + \frac{80}{\frac{1.2\left(r_z^2/8+0.7TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}\right)}{L^4T^2} + 35}\right). \quad (35)$$

З (35) можна оцінити, за яких параметрів системи збільшення довжини імпульсу стає одного порядку з початковою довжиною, $\tau_p \sim r_z/c$, тобто, коли ефект розширення стає значним. Це має місце, коли виконується хоча б одне з таких співвідношень:

$$\frac{TL^2}{c} \sim \tau_p,$$
$$\frac{\sqrt{TLl_0^{1/3}L_0^{5/3}}}{c} \sim \tau_p. \quad (36)$$

Такі оцінки співпадають з тими, що наведені в огляді [8], хоч і отримані іншим методом.

З формули (35) можна знайти числові оцінки додаткового вкладу у довжину імпульсу внаслідок флуктуацій показника заломлення. При сильній турбулентності ($C_n^2 \sim 10^{-13}$ м$^{-2/3}$) і великій відстані поширення ($L = 10^4\ m,\ L_0 = 10\ m$) додатковий вклад приблизно дорівнює $\sim 1,5 \times 10^{-12} c$, що може бути одного порядку або й більшим відстані між імпульсами у деяких високошвидкісних каналах зв'язку. Для випадку слабкої турбулентності ($C_n^2 \sim 10^{-15}\ m^{-2/3}$) і таких же відстаней вкладом флуктуацій показника заломлення можна знехтувати (збільшення довжини порядку $5 \times 10^{-14}\ c$).

Видовження імпульсів пояснюється двома різними фізичними механізмами. Перший з них пов'язаний з тим, що під впливом випадкової сили середньоквадратичне значення перпендикулярної складової імпульсу фотона, $\boldsymbol{q}_\perp$, зростає з часом як $t^{1/2}$, тобто має ознаки броунівського руху у просторі хвильових векторів. В результаті «траєкторії» окремих фотонів відрізняються від прямих ліній. Тому фотони, що одночасно вилетіли із джерела, можуть потрапити до детектора в різні моменти часу. Це призводить до флуктуацій часу потрапляння імпульсу до детектора, що проявляється як розширення імпульсу.

Крім цього механізму, важливим є також додаткове розширення, пов'язане з флуктуаціями модуля групової швидкості фотонів у напрямку поширення. Їхня швидкість флуктує синхронно з флуктуаціями показника заломлення середовища (відповідний ефект враховується другим членом у першій квадратній дужці виразу (22)). Можна легко переконатися, що два механізми подовження імпульсів не корелюють між собою (із формули (35) видно, що в ній відсутні характерні інтерференційні члени).

4. Висновок

Основним завданням даної роботи було знайти зміни розмірів лазерних імпульсів при поширені їх через турбулентну атмосферу на великі відстані. Отриманий за допомогою фотонної функції розподілу вираз для довжини імпульсу дає змогу визначати цей важливий при практичних застосуваннях параметр для різних значень атмосферної турбулентності і різних відстаней поширення. Показано, що додатковий вклад у ширину імпульсу може бути спричинений двома незалежними механізмами. Дана робота і метод, застосований в ній, можуть бути використані для з'ясування можливості перекривання сусідніх імпульсів або порушення їх часового впорядкування для окремо взятої реалізації атмосферної неоднорідності.

1. Berman G. P. and Chumak A. A. Photon distribution function for long-distance propagation of partially coherent beams through the turbulent atmosphere // Phys. Rev. A — 2006. — V. 74.
2. Tatarskii V. I. The effect of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation. — Springfield, VA : National Technical Information Service, U.S. Department of Commerce, 1971.
3. Andrews L. C. and Phillips R. L. Laser Beam Propagation Through Random Media. — Bellingham, WA : SPIE Press, 1998.
4. УФЖ — 1992. — Т. 37 — №. 10. — С. 1577
5. Landau L. D. and Lifhitz E. M. Electrodynamics of Continuous Media. — London : Pergamon, 1960. — P. 532
6. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когегентность и квантовая оптика. Пер. с англ. / Под ред. Самарцева В. В. — М. : Физматлит, 2000. — С. 896
7. Collett E. and Alferness R. Depolarization of a Laser Beam in a Turbulent Medium // J. Opt. Soc. Am. — 1972. — V. 62. — P. 529
8. Fante R. L. Electromagnetic beam propagation in turbulent media // Proc. IEEE. — 1975. — V. 63
9. Hughes R. J., Nordholt J. E., Derkacs D., Peterson C. G. Practical free space quantum key distribution over 10 km in daylight and at night // New J. Phys. — 2002. — V. 4 — P. 43.1
10. Berman G. P. and Chumak A. A. Quantum effects of a partially coherent beam propagating through the atmosphere // Proc. of SPIE. — 2007. — V. 6710

R. A. Baskov, O. O. Chumak

THE BROADENING OF LIGHT PULSES UNDER INFLUENCE OF ATMOSPHERE TURBULENCE : LONG-DISTANCE PROPAGATION

A laser beam propagating through the turbulent atmosphere is affected by random fluctuations of the refractive index. In the case of very strong turbulence the possibility of increasing of pulse length (pulse broadening) should be considered because some negative phenomena such as fluctuations of the arrival time and overlapping of the neighboring pulses become possible. These negative effects in atmosphere could restricts the performance of quantum cryptography and application of the lasers in high-data-rate communication system. In present work the effect of broadening of light is studied theoretically. The method of photon distribution function in phase space developed in [1] is used to describe the light beam. The explicit expression for width of laser pulse is obtained within above-mentioned approach.

Keywords: optical fluctuations, optical pulses, photon distribution function.