22. Холодная М. А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования / М. А. Холодная. – СПб. : Питер, 2002. – 272 с.
23. Gottfredson L. S. Mainstream Science on Intelligence / L. S. Gottfredson // Wall Street Journal. – December 13, 1994. – P. 18.
24. Glaser R. A research agenda for cognitive psychology and psychometrics / R. Glaser // Amer. Psychologist. – 1980. – V. 36 (9). – P. 923–936.
25. Glaser R. Education and thinking: The role of knowledge / R. Glaser // Amer. Psychologist. 1984. – V. 39(2). – P. 93–104.
26. Gui1ford I. P. The structure of intellect / I. P. Gui1ford // Psychol. Bull – 1956. – V. 53. – P. 267–293.
27. Sternberg, R. J. Introduction / R. J. Sternberg // Models of intelligence : International perspectives / R. J. Sternberg, J. Lautrey & T. I. Lubart (Eds.). – Washington, DC : American Psychological Association, 2003.

V. Mejtus

INTELLECTUAL SYSTEMS, ONTOLOGIES AND ONTOLOGY SPACES

The basic problems of creation of the systems allocated with intelligence are considered. Classification of modern definitions of concept «intelligence» is presented. The basic lines of intellectual systems (IS) and a general plan of creation of such system are analysed. The role ontology which is taken as a principle semantic representation about a subject domain in which operates IS is noted. Definition of ontology space in which IS conducts search of the decision of the problems it is offered.

УДК 681.3.06

Шкільняк С. С.

НЕОКЛАСИЧНІ АЛГЕБРИ ТА ЇХ ГОМОМОРФІЗМИ

Розглянуто узагальнені поняття алгебри, алгебраїчної системи, гомоморфізми алгебр та алгебраїчних систем. Досліджено неокласичні алгебри (алгебри з квазіарними функціями і предикатами) та їх гомоморфізми, доведено теореми про гомоморфізми та ізоморфізм.

Розвиток інформаційних технологій та програмування на сучасному етапі характеризується широким використанням понять і методів математичної логіки. Це актуалізує проблему побудови адекватних логічних формалізмів, орієнтованих на особливості тих чи інших предметних областей. Методологічною основою такої побудови є інтегрований інтенсіонально-екстенсіональний підхід [1], який базується на спільному для логіки та програмування композиційно-номінативному підході [2].

Згідно з інтенсіонально-екстенсіональним підходом, інтенсіональні аспекти визначаються властивостями відповідного рівня абстракції розгляду, вони індукують тип логіки, її мову, екстенсіональні семантичні моделі. Такими моделями є предикатні композиційні системи [2]. Предикатна композиційна система (D, Pr, $\boldsymbol{C}$) фактично задає дві алгебри – предикатну алгебру (Pr, $\boldsymbol{C}$) та алгебру (алгебраїчну систему) даних (D, Pr).

Дослідження алгебр та алгебраїчних систем композиційно-номінативних логік започатковане в [3]. Далі такі об'єкти вивчались, зокрема, в [4]. У статті продовжимо дослідження алгебр і алгебраїчних систем та їх гомоморфізмів. У першій частині розглядаємо, опираючись на роботу [3], загальне поняття абстрактної алгебри. У другій та третій частинах вивчаємо алгебри з квазіарними функціями і предикатами – неокласичні алгебри, доводимо теореми про гомоморфізми та ізоморфізм таких алгебр.

Невизначені тут поняття трактуємо у роботі [4].

1. Абстрактні алгебри та алгебраїчні системи. Гомоморфізми

Поняття алгебри належить до найфундаментальніших понять математики. В загальному випадку під *алгеброю* будемо розуміти множину, на якій задані певні функції.

Абстрактні алгебри. *Абстрактною алгеброю* (АА) називають [3] пару вигляду $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$, де A – довільна множина, F^A – довільна множина часткових функцій вигляду $f : A \to A$. Множину A називають основою (носієм, універсумом) алгебри.

Функції із F^A можуть бути як однозначними, так і неоднозначними. Тут розглядаємо алгебри з однозначними функціями.

Для АА з однаковими носіями введемо поняття збіднення та збагачення.

АА $\boldsymbol{A_1} = (A, F_1^A)$ назвемо *збідненням* АА $\boldsymbol{A_2} = (A, F_2^A)$, якщо $F_1^A \subseteq F_2^A$.

У цьому випадку АА $\boldsymbol{A_2} = (A, F_2^A)$ назвемо *збагаченням* АА $\boldsymbol{A_1} = (A, F_1^A)$.

Типом функції f називають пару (D_f, E_f), де D_f та E_f – множина визначення та множина значень функції f [4].

Під *типізованою функцією* розуміють трійку (f, D_f, E_f), де (D_f, E_f) – тип функції [3].

В загальному випадку АА вважаємо, що для кожної $f \in F^A$ маємо $D_f = E_f = A$, тобто всі функції – одного типу.

Поняття *типізованої* абстрактної алгебри є конкретизацією поняття абстрактної алгебри. У цьому випадку функції трактуємо як типізовані, множина F^A розпадається на множини однотипних функцій.

Нехай F^A – довільна множина функцій вигляду $f : A \to A$. Відображення $\tau : F^A \to 2^A \times 2^A$, задане умовою $\tau(f) = (D_f, E_f)$, називають *відображенням типізації* для F^A [3].

Типізована абстрактна алгебра (ТАА)– це трійка $\boldsymbol{A} = (A, F^A, \tau)$ [3]. Тут A – довільна множина, яку трактуємо як носій-універсум алгебри $\boldsymbol{A}$, F^A – довільна множина часткових типізованих функцій вигляду $f : A \to A$, $\tau : F^A \to 2^A \times 2^A$ – відображення типізації для F^A.

Кожну $f : A \to A$ з типом (D_f, E_f) можна трактувати як функцію $f : D_f \to E_f$, тому поняття ТАА є природним узагальненням поняття традиційної багатоосновної алгебри [5].

Введемо поняття збіднення та збагачення для ТАА з однаковими носіями.

ТАА $\boldsymbol{A_1} = (A, F_1^A, \tau_1)$ назвемо *збідненням* ТАА $\boldsymbol{A_2} = (A, F_2^A, \tau_2)$, якщо $F_1^A \subseteq F_2^A$ та $\tau_1 \subseteq \tau_2$. У цьому випадку ТАА $\boldsymbol{A_2} = (A, F_2^A, \tau_2)$ назвемо *збагаченням* ТАА $\boldsymbol{A_1} = (A, F_1^A, \tau_1)$.

Алгебраїчні системи. В загальному випадку *алгебраїчною системою* (АС) називають множину, на якій задані певні функції та предикати. Поняття АС можна трактувати як конкретизацію поняття алгебри. Справді, нехай $\boldsymbol{A} = (D, F^D)$ – абстрактна алгебра. Конкретизуємо множину D, виділивши в ній 2-елементну підмножину $Bool = \{T, F\}$ та довільну підмножину $A \subseteq D$ (при цьому необов'язково $A \cap Bool = \varnothing$). Вважаємо, що відображення типізації τ визначає два типи функцій – тип (A, A) та тип $(A, Bool)$. Тоді F^D розпадається на множину Fn^A функцій типу (A, A), які називають *функціями на A*, та множину Pr^A функцій типу $(A, Bool)$, які називають *предикатами на A* [4].

Отже, кожну АС можна трактувати як типізовану алгебру $\boldsymbol{A} = (D, F^D, \tau)$, де $\tau : F^D \to \{(A, A), (A, Bool)\}$, $A \subseteq D$, $Bool = \{T, F\} \subseteq D$. Такі алгебри називають *абстрактними алгебраїчними системами* (ААС) [3]. Позначаємо ААС у вигляді $\boldsymbol{A} = (A, Fn^A \cup Pr^A)$.

Гомоморфізми. Дуже важливим математичним поняттям є поняття гомоморфізму. Неформально кажучи, гомоморфізм об'єктів означає їх подібність. Уточнимо це поняття для алгебр та алгебраїчних систем.

Гомоморфізмом абстрактної алгебри $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ в абстрактну алгебру $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$ назвемо пару функціональних (однозначних) відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : F^A \to F^B$ таких, в яких виконується умова:

для всіх $f \in F^A$, $a \in A$ маємо $\varphi(f(a)) \cong \mu(f)(\varphi(a))$. (H)

Умова (H) означає збереження значень функцій при гомоморфізмі.

Залежно від того, які властивості мають відображення φ та μ, можна визначати багато різновидів гомоморфізмів.

Наприклад, μ може бути тотальним чи нетотальним, ін'єктивним чи неін'єктивним, сюр'єктивним чи несюр'єктивним. Це вже дає 8 різновидів гомоморфізмів, які називають *операційними типами* гомоморфізму [3].

Відображення φ може бути тотальним чи нетотальним, ін'єктивним чи неін'єктивним, сюр'єктивним чи несюр'єктивним. Тому для кожного операційного типу гомоморфізму можна вказати 8 різних *носійних* типів [3]. Отримуємо принаймні 64 різних типи гомоморфізмів АА, найцікавішими з яких є 8 типи операційно сюртотального (μ – тотальне сюр'єктивне) та 8 типів уніопераційного (μ – бієкція) гомоморфізму.

Якщо μ – нетотальне відображення, то гомоморфізм АА $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ в АА $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$ можна трактувати як гомоморфізм АА $\boldsymbol{A_1} = (A, F_1^A)$ в АА $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$, де $F_1^A = Arg(\mu)$, тобто АА $\boldsymbol{A_1}$ – збіднення АА $\boldsymbol{A}$ таке, що $\mu_1 : F_1^A \to F^B$ – тотальне відображення.

Якщо μ несюр'єктивне, то гомоморфізм АА $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ в АА $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$ можна трактувати як гомоморфізм АА $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ в АА $\boldsymbol{B_1} = (B, F_1^B)$, де $F_1^B = Res(\mu)$, тобто АА $\boldsymbol{B_1}$ – збіднення АА $\boldsymbol{B}$ таке, що $\mu_1 : F^A \to F_1^B$ – сюр'єктивне відображення.

Гомоморфізм (φ, μ) АА $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ в АА $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$ назвемо *PD-гомоморфізмом* (гомоморфізмом, що частково зберігає визначеність), якщо:

для всіх $f \in F^A$, $a \in A$, за умови $f(a)\downarrow$ та $\mu(f)(\varphi(a))\downarrow$, то $\varphi(f(a))\downarrow = \mu(f)(\varphi(a))$. (HPD)

Умова (HPD) є посиленням умови (H). Справді, враховуючи, що із $\varphi(f(a))\downarrow$ випливає $f(a)\downarrow$, маємо, що з умови «якщо $f(a)\downarrow$ та $\mu(f)(\varphi(a))\downarrow$, то $\varphi(f(a))\downarrow$ та $\varphi(f(a)) = \mu(f)(\varphi(a))$» випливає, «якщо $\varphi(f(a))\downarrow$ та $\mu(f)(\varphi(a))\downarrow$, то $\varphi(f(a)) = \mu(f)(\varphi(a))$», тобто «$\varphi(f(a)) \cong \mu(f)(\varphi(a))$».

Якщо φ – тотальне, то $f(a)\downarrow \Leftrightarrow \varphi(f(a))\downarrow$, у цьому випадку (H) та (HPD) еквівалентні.

Гомоморфізм (φ, μ) називають *слабким ізоморфізмом*, якщо φ та μ бієктивні [3].

Сильним ізоморфізмом АА $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ на АА $\boldsymbol{B} = (B, F^B)$ називають пару бієктивних відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : F^A \to F^B$, таку [3]:

$$\text{для всіх } f \in F^A,\ a \in A \text{ маємо } \varphi(f(a)) = \mu(f)(\varphi(a)). \quad \text{(SF)}$$

В умові (SF) фігурує строга рівність, тобто $\varphi(f(a))$ та $\mu(f)(\varphi(a))$ одночасно невизначені або одночасно визначені та рівні.

Кожний сильний ізоморфізм є слабким ізоморфізмом, однак зворотне неправильне. Справді, з умови (SF) випливає (H), але не навпаки.

Гомоморфізмом ТАА $\boldsymbol{A} = (A, F^A, \tau^A)$ в ТАА $\boldsymbol{B} = (B, F^B, \tau^B)$ назвемо пару функціональних відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : F^A \to F^B$, причому:

– для всіх f, $g \in F^A$, якщо $\tau^A(f) = \tau^A(g)$, то $\tau^B(\mu(f)) = \tau^B(\mu(g))$; (HT)
– для всіх $f \in F^A$, $a \in A$ виконується умова $\varphi(f(a)) \cong \mu(f)(\varphi(a))$. (H)

Умова (HT) означає: однотипні функції не можуть відображатися в різнотипних.

Дамо визначення гомоморфізму для ААС. У першому наближенні можна, розглядаючи ААС як ТАА, кожний гомоморфізм таких алгебр трактувати як гомоморфізм ААС. Проте за такого підходу можливі відображення функцій в предикати та предикатів у функції, а також відображення T в F та навпаки. Це не відповідає інтуїтивному розумінню гомоморфізму як подібності алгебраїчних систем. З іншого боку, умова (H) для предикатів занадто сильна в загальному випадку. Тому висновується таке визначення.

Пару відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : Fn^A \cup Pr^A \to Fn^B \cup Pr^B$, назвемо *гомоморфізмом* ААС $\boldsymbol{A} = (A, Fn^A \cup Pr^A)$ в ААС $\boldsymbol{B} = (B, Fn^B \cup Pr^B)$, якщо:

– $\mu(Fn^A) \subseteq Fn^B$ та $\mu(Pr^A) \subseteq Pr^B$; (AHO)
– для всіх $f \in Fn^A$, $a \in A$ маємо $\varphi(f(a)) \cong \mu(f)(\varphi(a))$; (AHF)
– для всіх $P \in Pr^A$, $a \in A$ якщо $P(a) = T$ та $\mu(P)(\varphi(a))\downarrow$, то $\mu(P)(\varphi(a)) = T$. (AHP)

Зауважимо, що умова (AHO) фактично випливає із (HT).

Гомоморфізм ААС назвемо *повним*, якщо (AHP) замінюється сильнішою умовою:

$$\text{для всіх } P \in Pr^A,\ a \in A \text{ маємо } P(a) \cong \mu(P)(\varphi(a)). \quad \text{(AEP)}$$

Залежно від умов, які накладаються на відображення φ та μ, можна визначити багато різновидів гомоморфізмів ААС. Наприклад, повний уніопераційний гомоморфізм (φ, μ) назвемо *сильним гомоморфізмом* ААС, якщо φ – сюр'єктивне відображення.

Для уніопераційного гомоморфізму за бієктивності μ умова (AHO) посилюється:

$$\mu(Fn^A) = Fn^B \text{ та } \mu(Pr^A) = Pr^B. \quad \text{(AEO)}$$

Пару відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : Fn^A \cup Pr^A \to Fn^B \cup Pr^B$, назвемо *слабким ізоморфізмом* ААС $\boldsymbol{A} = (A, Fn^A \cup Pr^A)$ на ААС $\boldsymbol{B} = (B, Fn^B \cup Pr^B)$, якщо відображення φ та μ бієктивні, причому виконуються умови (AEO), (AHF) та (AEP).

Слабкий ізоморфізм ААС – це повний гомоморфізм (φ, μ) такий, що φ та μ бієктивні.

Пару відображень (φ, μ), де $\varphi : A \to B$ та $\mu : Fn^A \cup Pr^A \to Fn^B \cup Pr^B$, назвемо *сильним ізоморфізмом* ААС $\boldsymbol{A} = (A, Fn^A \cup Pr^A)$ на ААС $\boldsymbol{B} = (B, Fn^B \cup Pr^B)$, якщо відображення φ та μ бієктивні, причому виконуються умови:

– $\mu(Fn^A) = Fn^B$ та $\mu(Pr^A) = Pr^B$; (AHO)
– для всіх $f \in Fn^A$, $a \in A$ маємо $\varphi(f(a)) = \mu(f)(\varphi(a))$; (ASF)
– для всіх $P \in Pr^A$, $a \in A$ маємо $P(a) = \mu(P)(\varphi(a))$. (ASP)

Алгебри та алгебраїчні системи з доданою сигнатурою. Нехай $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ – абстрактна алгебра. Для наділення множини F^A певною структурою треба виділити в ній *базові* функції. Засобами побудови складних функцій є *композиції* [4], вони уточнюються як оператори над іменованими функціями і визначаються рівнем абстракції розгляду. Для виділення множини базових функцій вибираємо множину Z, яку трактуємо як *множину імен* базових функцій, та задаємо тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I}_A : Z \to F^A$. Таку Z назвемо *сигнатурою* алгебри $\boldsymbol{A}$, її називають також множиною *функціональних символів*. Якщо $g \in Z$ та $\boldsymbol{I}_A(g) = G$, то g називають *іменем* функції G, а функцію G – *значенням* імені g; таку функцію G будемо позначати g_A.

Отже, маємо таке визначення абстрактної алгебри з доданою сигнатурою.

АА з доданою сигнатурою Z, або Z-*алгеброю*, назвемо пару $((A, F^A), \boldsymbol{I}_A)$, де $\boldsymbol{A} = (A, F^A)$ – абстрактна алгебра, $\boldsymbol{I}_A$ – тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I}_A : Z \to F^A$.

Вважаючи F^A заданою неявно, Z-алгебри будемо також позначати у вигляді $(A, \boldsymbol{I}_A)$.

Нехай $\boldsymbol{A} = (A, Fn^A \cup Pr^A)$ – ААС. У цьому випадку множину Z можна подати у вигляді

$Z=Fs\cup Ps$, де Fs – множина функціональних символів, тобто імен базових функцій, Ps – множина *предикатних символів*, тобто імен базових предикатів. Тоді $\boldsymbol{I}_A$ задаватиме тотальні однозначні відображення $Fs\to Fn^A$ та $Ps\to Pr^A$.

ААС з доданою сигнатурою Z назвемо Z-АС і будемо їх позначати $((A, Fn^A\cup Pr^A), \boldsymbol{I}_A)$. Вважаючи множину $Fn^A\cup Pr^A$ заданою неявно, будемо також позначати Z-АС у вигляді $(A, \boldsymbol{I}_A)$. Введемо позначення g_A для функції $\boldsymbol{I}_A(g)$ та p_A для предикату $\boldsymbol{I}_A(p)$.

Гомоморфізми алгебр та алгебраїчних систем з доданою сигнатурою. Для Z-алгебр та Z-АС звичайно будемо розглядати сюртотальні та уніопераційні гомоморфізми.

Якщо (φ, μ) – гомоморфізм Z-алгебри $\boldsymbol{A}=((A, F^A), \boldsymbol{I}_A)$ в Z-алгебру $\boldsymbol{B}=((B, F^B), \boldsymbol{I}_B)$, то вважаємо, що для μ виконується умова $\mu(\boldsymbol{I}_A(g_A))=\boldsymbol{I}_B(g)$, тобто $\mu(g_A)=g_B$.

Якщо (φ, μ) – гомоморфізм Z-АС $\boldsymbol{A}= =((A, Fn^A\cup Pr^A), \boldsymbol{I}_A)$ в Z-АС $\boldsymbol{B}=((B, Fn^B\cup Pr^B), \boldsymbol{I}_B)$, то вважаємо, що $\mu(\boldsymbol{I}_A(g_A))=\boldsymbol{I}_B(p)$ та $\mu(\boldsymbol{I}_A(p_A))=\boldsymbol{I}_B(p)$, тобто $\mu(g_A)=g_B$ та $\mu(p_A)=p_B$.

Такі гомоморфізми Z-алгебр та Z-АС назвемо *Z-гомоморфізмами.*

Кожний Z-гомоморфізм (φ, μ) однозначно визначається відображенням φ, тому для Z-алгебр поняття Z-гомоморфізму можна сформулювати так:

Z-гомоморфізм Z-алгебри $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I}_A)$ в Z-алгебру $\boldsymbol{B}=(A, \boldsymbol{I}_B)$ – це відображення $\varphi: A\to B$ таке, де виконується умова:

$$\text{для всіх } g\in Z,\ a\in A \text{ маємо } \varphi(g_A(a))\cong g_B(\varphi(a)). \qquad \text{(HF)}$$

Z-гомоморфізм φ назвемо *слабким Z-ізоморфізмом*, якщо φ бієктивне.

Сильним Z-ізоморфізмом Z-алгебри $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I}_A)$ на Z-алгебру $\boldsymbol{B}=(A, \boldsymbol{I}_B)$ назвемо бієктивне відображення $\varphi: A\to B$, де виконується умова:

$$\text{для всіх } g\in Z,\ a\in A \text{ маємо } \varphi(g_A(a))=g_B(\varphi(a)). \qquad \text{(SF)}$$

Z-гомоморфізмом Z-АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I}_A)$ в Z-АС $\boldsymbol{B}=(A, \boldsymbol{I}_B)$ назвемо відображення $\varphi: A\to B$ таке, за якого виконується умова (HF) та

$$\text{для всіх } p\in Ps,\ a\in A \text{ якщо } p_A(a))=T \text{ і } p_B(\varphi(a))\downarrow, \text{ то } p_B(\varphi(a))=T. \qquad \text{(HP)}$$

Z-гомоморфізм φ Z-АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I}_A)$ в Z-АС $\boldsymbol{B}=(A, \boldsymbol{I}_B)$ назвемо *PD-Z-гомоморфізмом*, якщо умова (HF) замінюється умовою

$$\text{для всіх } g\in Fs,\ a\in A \text{ якщо } g_A(a)\downarrow \text{ та } g_B(\varphi(a))\downarrow, \text{ то } \varphi(g_A(a))\downarrow=g_B(\varphi(a)). \qquad \text{(HD)}$$

Якщо відображення φ тотальне, то умови (HF) та (HD) еквівалентні.

Z-гомоморфізм Z-АС φ назвемо *повним Z-гомоморфізмом*, якщо замість (HP) маємо:

$$\text{для всіх } p\in Ps,\ a\in A \text{ маємо } p_A(a)\cong p_B(\varphi(a)). \qquad \text{(EP)}$$

Повний Z-гомоморфізм назвемо *сильним Z-гомоморфізмом*, якщо φ сюр'єктивне.

Повний Z-гомоморфізм назвемо *слабким Z-ізоморфізмом*, якщо φ бієктивне.

Сильним Z-ізоморфізмом Z-АС $\boldsymbol{A}=(A, \boldsymbol{I}_A)$ на Z-АС $\boldsymbol{B}=(A, \boldsymbol{I}_B)$ назвемо бієктивне відображення $\varphi: A\to B$ таке, що виконуються умови:

– для всіх $g\in Fs$, $a\in A$ маємо $\varphi(g_A(a))=g_B(\varphi(a))$; (SF);

– для всіх $p\in Ps$, $a\in A$ маємо $p_A(a)=p_B(\varphi(a))$. (SP).

Надалі Z-АС, Z-гомоморфізм та Z-ізоморфізм будемо називати просто АС, гомоморфізмом та ізоморфізмом.

2. Некласичні алгебри

Семантичними моделями логік квазіарних предикатів з екстенсіонального погляду є об'єкти вигляду $({}^VA, Fn^A\cup Pr^A, \boldsymbol{C})$ – *композиційні системи квазіарних функцій та предикатів* [4]. Тут $A\neq\varnothing$, Fn^A та Pr^A – множини V-квазіарних функцій та V-квазіарних предикатів на A, множина композицій $\boldsymbol{C}$ задається базовими композиціями відповідного рівня. Композиції визначають засоби побудови предикатів, вони є ядром логіки відповідного типу.

Множина композицій визначається рівнем абстракції розгляду. При зафіксованому рівні розгляду вважаємо множину $\boldsymbol{C}$ зафіксованою. Тоді композиційні системи визначаються об'єктами вигляду $(A, Fn^A\cup Pr^A)$, які назвемо *алгебраїчними системами з квазіарними функціями та предикатами,* або *некласичними алгебрами* (*алгебраїчними системами*).

Множину A називають *носієм,* або *основою* алгебри $\boldsymbol{A}=(A, Fn^A\cup Pr^A)$.

Якщо $Fn^A=\varnothing$, то некласичні алгебри набувають вигляду (A, Pr^A).

Зауважимо, що в традиційних алгебрах і АС функції (операції) та предикати – скінченно-арні [5, 6], причому предикати – тотальні, а базові функції та предикати – тотальні n-арні. В некласичних алгебрах функції та предикати – квазіарні, тому вони є природним узагальненням традиційних алгебр і АС.

Розгляд композиційних систем фактично передбачає наявність мови логіки, індукованої відповідними інтенсіональними моделями (рівнями розгляду). Це означає необхідність виділення і позначення базових функцій та базових предикатів, із яких за допомогою композицій будуються складніші функції та предикати.

Таким чином, спочатку задаємо множину BF базових функцій і множину BP базових предикатів, потім вибираємо множину Fs для позначення (іменування) базових функцій та множину Ps для позначення базових предикатів. При цьому задаємо відображення $\boldsymbol{I} : Fs \cup Ps \to BF \cup BP$, яке природно вважати бієктивним (взагалі кажучи, остання вимога не є принциповою, можна брати $\boldsymbol{I}$ як тотальне сюр'єктивне однозначне відображення, важливо не допускати різних значень для одного імені). Таке $\boldsymbol{I}$ задає бієкції $Fs \to BF$ та $Ps \to BP$.

Імена базових функцій називають *функціональними символами* (ФНС), імена базових предикатів – *предикатними символами* (ПС). Тоді Fs та Ps – це множини ФНС та ПС.

Множину $Z = Fs \cup Ps$ називають *сигнатурою*. Відображення $\boldsymbol{I} : Z \to BF \cup BP$ називають відображенням *інтерпретації* сигнатурних символів.

Відображення інтерпретації $\boldsymbol{I} : Fs \cup Ps \to \to BF \cup BP$ фактично прив'язує АС $(A, Fn^A \cup Pr^A)$ до першопорядкової мови сигнатури $Fs \cup Ps$, яка є засобом опису такої АС. Це перетворює АС $(A, Fn^A \cup Pr^A)$ на об'єкт вигляду $\boldsymbol{A} = ((A, Fn^A \cup Pr^A), \boldsymbol{I})$.

Пару $((A, Fn^A \cup Pr^A), \boldsymbol{I})$ називають *АС з доданою сигнатурою*.

Неокласичні АС з доданою сигнатурою Z позначаємо у вигляді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}, Z)$.

Вживаними є також скорочені позначення $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\boldsymbol{A} = (A, Z)$.

Відображення $\boldsymbol{I}$ продовжується до відображення $\boldsymbol{J}$ інтерпретації основних об'єктів мови (термів та формул) на множині $Fn^A \cup Pr^A$ [4].

Для кожного $g \in Fs$ функцію $\boldsymbol{I}(g) \in Fn^A$ назвемо *значенням* ФНС g при інтерпретації $\boldsymbol{I}$ на АС $\boldsymbol{A} = ((A, Fn^A \cup Pr^A), \boldsymbol{I})$. Позначимо таку функцію g_A.

Для кожного $p \in Ps$ предикат $\boldsymbol{I}(p) \in Pr^A$ назвемо *значенням* ПС p при інтерпретації $\boldsymbol{I}$ на АС $\boldsymbol{A} = ((A, Fn^A \cup Pr^A), \boldsymbol{I})$. Такий предикат позначимо p_A.

Нехай АС з доданою сигнатурою $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\boldsymbol{A}_1 = (A, \boldsymbol{I}_1)$ такі, що $\boldsymbol{I}_1 : Fs_1 \cup Ps_1 \to BF_1 \cup BP_1$ є звуженням $\boldsymbol{I} : Fs \cup Ps \to BF \cup BP$, тобто $\boldsymbol{I}_1 \subseteq \boldsymbol{I}$.

У цьому випадку АС $\boldsymbol{A}$ назвемо *збагаченням* АС $\boldsymbol{A}_1$, АС $\boldsymbol{A}_1$ назвемо *збідненням* АС $\boldsymbol{A}$.

Нехай $\boldsymbol{A} = ((A, Fn^A \cup Pr^A), \boldsymbol{I}_A)$ і $\boldsymbol{B} = ((B, Fn^B \cup Pr^B), \boldsymbol{I}_B)$ – АС із однією сигнатурою $Fs \cup Ps$, причому $A \subseteq B$.

АС $\boldsymbol{A}$ назвемо *звуженням* АС $\boldsymbol{B}$, якщо для кожного $h \in Fs \cup Ps$ для кожного $d \in {}^VA$ маємо $h_B(d) = h_A(d)$, тобто $h_B(d)$ та $h_A(d)$ одночасно визначені та рівні. Це, зокрема, означає, що для кожного $f \in Fs$ маємо $f_B({}^VA) \subseteq A$. Цей факт позначатимемо $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$.

У цьому випадку АС $\boldsymbol{B}$ назвемо *розширенням* АС $\boldsymbol{A}$.

Якщо $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, то АС $\boldsymbol{A}$ назвемо *підсистемою* АС $\boldsymbol{B}$, натомість АС $\boldsymbol{B}$ – *надсистемою* АС $\boldsymbol{A}$.

3. Гомоморфізми неокласичних алгебр. Теореми про гомоморфізм

Введемо поняття гомоморфізму та ізоморфізму для неокласичних алгебр (алгебраїчних систем) з квазіарними функціями та предикатами.

Нехай $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A, \sigma)$ та $\boldsymbol{B} = (B, \boldsymbol{I}_B, \sigma)$ – АС однієї сигнатури σ.

Нехай $\varphi : A \to B$. Таке φ, не змінюючи його позначення, продовжимо до відображення $\varphi : {}^VA \to {}^VB$: $\varphi([v_i \mapsto a_i]_{i \in I}) = [v_i \mapsto \varphi(a_i)]_{i \in I.}$

Якщо $\varphi : A \to B$ – сюр'єкція, то зрозуміло, що $\varphi^{-1}({}^VB) = {}^VA$.

Гомоморфізмом АС $\boldsymbol{A}$ в АС $\boldsymbol{B}$ назвемо відображення $\varphi : A \to B$ таке:

– для всіх $f \in Fs$, $d \in {}^VA$ маємо $\varphi(f_A(d)) \cong f_B(\varphi(d))$; (HF)

– для всіх $p \in Ps$, $d \in {}^VA$ якщо $p_A(d) = T$ та $p_B(\varphi(d))\downarrow$, то $p_B(\varphi(d)) = T$. (HP)

Гомоморфізм φ АС $\boldsymbol{A}$ в АС $\boldsymbol{B}$ назвемо *повним гомоморфізмом*, якщо (HP) замінюється сильнішою умовою:

$$\text{для всіх } p \in Ps,\ d \in {}^VA \text{ маємо } p_A(d) \cong p_B(\varphi(d)). \qquad (EP)$$

Повний гомоморфізм φ назвемо *сильним гомоморфізмом*, якщо φ сюр'єктивне.

Повний гомоморфізм φ назвемо *ізоморфізмом*, якщо φ бієктивне.

АС $\boldsymbol{A}$ та АС $\boldsymbol{B}$ *ізоморфні*, що будемо позначати $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$, якщо існує ізоморфізм АС $\boldsymbol{A}$ в АС $\boldsymbol{B}$. Таке визначення коректне, тому що відношення $\cong$ на множині АС однієї сигнатури є відношенням еквівалентності.

Ізоморфізм АС $\boldsymbol{A}$ в АС $\boldsymbol{A}$ називають *автоморфізмом* АС $\boldsymbol{A}$.

Теореми про гомоморфізми та ізоморфізм. Доведемо теореми про гомоморфізми та ізоморфізм для неокласичних алгебр (алгебраїчних систем) з еквітонними функціями і предикатами. Розглядаємо загальний випадок логік функціонально-еквацiйного рівня.

Формула *елементарна* [4], якщо вона має вигляд p, $=ts$ чи $S^{\bar{v}}(p, \bar{t}\,)$, де $p \in Ps$.

Формула $\exists$-*позитивна*, якщо вона елементарна або утворена з елементарних формул за допомогою символів суперпозиції, $\vee$, & та $\exists x$.

Формула *позитивна*, якщо вона елементарна або утворена з елементарних формул за допомогою символів суперпозиції, $\vee$, &, $\exists x$ та $\forall x$.

Для випадку АС із повнототальними еквітонними функціями і предикатами справджується теорема про гомоморфізм:

Теорема 1. *Нехай $\varphi : A \to B$ – гомоморфізм АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ в АС $\boldsymbol{B} = (B, \sigma)$. Тоді:*

1) *для кожного терму t сигнатури σ для довільних $d \in {}^VA$ маємо $\varphi(t_A(d)) \cong t_B(\varphi(d))$;*

2) *для кожної ∃-позитивної формули* Φ *сигнатури* σ *для довільних* $d \in {}^V\!A$, *якщо* $\Phi_A(d) = T$ *та* $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, *то* $\Phi_B(\varphi(d)) = T$.

П. 1 доводимо індукцією за побудовою терму t.

Якщо t – це ФНС f, то п. 1 – це умова (HF).

Нехай терм t має вигляд $S^{v_1,\dots,v_n}(s, s_1,\dots, s_n)$. Нехай $\varphi(t_A(d)) = b_1$, $t_B(\varphi(d)) = b_2$. Покажемо, що тоді $b_1 = b_2$. Звідси випливатиме $\varphi(t_A(d)) \cong t_B(\varphi(d))$.

Припустимо супротивне: $b_1 \neq b_2$. Розширимо d до V-повного $\delta \in A^V$. Звідси $\varphi(\delta) \in B^V$. За еквітонністю маємо: $t_A(\delta) = t_A(d)$, $t_B(\varphi(\delta)) = t_B(\varphi(d))$ – звідки $\varphi(t_A(\delta)) = \varphi(t_A(d)) = b_1$, $t_B(\varphi(\delta)) = t_B(\varphi(d)) = b_2$. Тепер маємо: $b_1 = \varphi(t_A(\delta)) = \varphi(S^{v_1,\dots,v_n}(s, s_1, \dots, s_n)_A(\delta)) = \varphi(s_A(\delta\nabla v_1\mapsto(s_1)_A(\delta)\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_A(\delta))) =$ (припущення індукції для s) $= s_B(\varphi(\delta\nabla v_1\mapsto(s_1)_A(\delta)\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_A(\delta))) = s_B(\varphi(\delta)\nabla v_1\mapsto\varphi((s_1)_A(\delta))\nabla\dots\nabla v_n\mapsto\varphi((s_n)_A(\delta)))$ = (припущення індукції для s_i) $= s_B(\varphi(\delta)\nabla v_1\mapsto(s_1)_B(\varphi(\delta))\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_B(\varphi(\delta))) = t_B(\varphi(\delta)) = b_2$.

Отримали $b_1 \neq b_2$, що суперечить припущенню. Отже, $\varphi(t_A(d)) \cong t_B(\varphi(d))$.

П. 2 доводимо індукцією за побудовою формули Φ.

Якщо Φ – це ПС p, то п. 2 – це умова (HP).

Нехай Φ – елементарна формула вигляду $=ts$. Нехай $(=ts)_A(d) = T$, звідси $t_A(d)\downarrow$, $s_A(d)\downarrow$, $t_A(d) = s_A(d)$, $\varphi(t_A(d)) = \varphi(s_A(d))$. Нехай $(=ts)_B(\varphi(d)) = F$. Тоді $t_B(\varphi(d))\downarrow$, $s_B(\varphi(d))\downarrow$, $t_B(\varphi(d)) \neq s_B(\varphi(d))\downarrow$. Згідно з п. 1 отримуємо $\varphi(t_A(d)) = t_B(\varphi(d))$, $\varphi(s_A(d)) = s_B(\varphi(d))$, звідки $t_B(\varphi(d)) = s_B(\varphi(d))$ – суперечність.

Нехай Φ має вигляд $S^{v_1,\dots,v_n}(\Psi, s_1, \dots, s_n)$. Нехай $\Phi_A(d) = T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$. Покажемо, що $\Phi_B(\varphi(d)) = T$. Припустимо супротивне: $\Phi_B(\varphi(d)) = F$. Розширимо d до V-повного $\delta \in A^V$. Звідси $\varphi(\delta) \in B^V$. За еквітонністю маємо $\Phi_A(\delta) = \Phi_A(d)$, $\Phi_B(\varphi(\delta)) = \Phi_B(\varphi(d))$, звідки $\Phi_A(\delta) = \Phi_A(d) = T$, $\Phi_B(\varphi(\delta)) = \Phi_B(\varphi(d)) = F$. Тепер $T = \Phi_A(\delta) = (S^{v_1,\dots,v_n}(\Psi, s_1, \dots, s_n))_A(\delta)) = \Psi_A(\delta\nabla v_1\mapsto(s_1)_A(\delta)\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_A(\delta))$ = (припущення індукції для Ψ) $= \Psi_B(\varphi(\delta\nabla v_1\mapsto(s_1)_A(\delta)\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_A(\delta))) = \Psi_B(\varphi(\delta)\nabla v_1\mapsto\varphi((s_1)_A(\delta))\nabla\dots\nabla v_n\mapsto\varphi((s_n)_A(\delta)))$ = (згідно з п. 1 для s_i) $= \Psi_B(\varphi(\delta)\nabla v_1\mapsto(s_1)_B(\varphi(\delta))\nabla\dots\nabla v_n\mapsto(s_n)_B(\varphi(\delta))) = \Phi_B(\varphi(d)) = F$.

Отримали суперечність, тому $\Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\Psi\vee\Xi$. Нехай $\Phi_A(d) = T$, тобто $(\Psi\vee\Xi)_A(d) = T$. Звідси: $\Psi_A(d) = T$ або $\Xi_A(d) = T$. Нехай $\Phi_B(\varphi(d)) = F$, тобто $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$, звідки – $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow = F$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow = F$. Але при $\Psi_A(d) = T$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$, за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d)) = T$, – суперечність; при $\Xi_A(d) = T$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$, за припущенням індукції $\Xi_B(\varphi(d)) = T$, – теж суперечність. Отже, якщо $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, то $\Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\Psi\&\Xi$. Нехай $\Phi_A(d) = T$, тобто $(\Psi\&\Xi)_A(d) = T$. Звідси $\Psi_A(d) = T$ та $\Xi_A(d) = T$. Нехай $\Phi_B(\varphi(d)) = F$, тобто $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d)) = F$, звідки – $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow = F$ або $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow = F$. Але при $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$ із $\Psi_A(d) = T$, за припущенням індукції, маємо $\Psi_B(\varphi(d)) = T$ – суперечність; при $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$ із $\Xi_A(d) = T$, за припущенням індукції, маємо $\Xi_B(\varphi(d)) = T$ – знову суперечність. Отже, якщо $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, то $\Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\exists x\Psi$. Нехай $\Phi_A(d) = T$ та $\Psi_B(\varphi(d)) = F$, тобто $(\exists x\Psi)_A(d) = T$ та $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$. Тоді для деякого $a \in A$ маємо $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$, для всіх $b \in B$ маємо $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto b) = F$. Зокрема, $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto\varphi(a)) = F$, звідки – $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = F$. Але $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$, тому, згідно з $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a))\downarrow$, за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = T$, що суперечить $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = F$. Отже, якщо $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, то $\Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Зауважимо, що в [4] теорема 1 доведена тільки для випадку логік повнототальних еквітонних функцій та предикатів функціонального рівня.

Для загального випадку АС із еквітонними функціями і предикатами теорема 1 не справджується, що засвідчує приклад 1. Цей приклад також засвідчує, що для АС із еквітонними функціями і предикатами при несюр'єктивному відображенні φ той факт, що φ є гомоморфізмом АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A, \sigma)$ в АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B, \sigma)$, зовсім не означає *подібності* $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$.

Приклад 1. Задамо АС із еквітонними функціями і предикатами $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A, \sigma)$ та $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B, \sigma)$ таким чином.

Нехай $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $\sigma = Fs = \{f, g\}$, причому істотним для f та g є тільки x.

Визначимо $f_A(d)\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A$, $g_A(d)\downarrow = 0$ для всіх $d \in {}^V\!A$, $f_B(d)\downarrow = 1$ для всіх $d \in {}^V\!B$, $g_B(d)\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!B$ таких, що $x \notin im(d)$; визначимо $g_B(d\nabla x\mapsto 0) = 0$ та $g_B(d\nabla x\mapsto 1) = 1$ для всіх $d \in {}^V\!B$. Задамо $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

Маємо $\varphi(f_A(d))\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A$, звідки $\varphi(f_A(d)) \cong f_B(\varphi(d))$ для всіх $d \in {}^V\!A$.

Тепер $\varphi(g_A(d)) = 0$ для всіх $d \in {}^V\!A$, $g_B(\varphi(d)) = 0$ для всіх $d \in {}^V\!A$ таких, що $x \in im(d)$, $g_B(\varphi(d))\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A$ таких, що $x \notin im(d)$.

Звідси отримуємо, що значення функцій, заданих за допомогою суперпозиції, тобто заданих неатомарними термами, при відображенні φ не зберігаються.

Справді, маємо $\varphi((S^x(g,f))_A(x\mapsto 1)) = \varphi(g_A(x\mapsto 1 \nabla x\mapsto f_A(x\mapsto 1))) = \varphi(g_A(\varnothing)) = \varphi(0) = 0$, проте $(S^x(g,f))_B(\varphi(x\mapsto 1)) = (S^x(g,f))_B(x\mapsto 0) = g_B(x\mapsto 0\nabla x\mapsto f_B(x\mapsto 0))) = g_B(x\mapsto 1) = 1$.

Таким чином, у випадку АС із еквітонними функціями і предикатами для виконання твердження теореми 1 необхідно посилити обмеження на гомоморфізм.

Теорема 2. *Нехай сюр'єктивне відображення* $\varphi : A\to B$ *є гомоморфізмом* АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ *в* АС $\boldsymbol{B} = (B, \sigma)$. *Тоді:*

1) *для кожного терму t сигнатури σ для довільних* $d\in{}^VA$ *маємо* $\varphi(t_A(d))\cong t_B(\varphi(d))$;
2) *для кожної позитивної формули Φ сигнатури σ для довільних* $d\in{}^VA$, *якщо* $\Phi_A(d)=T$ *та* $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, *то* $\Phi_B(\varphi(d))=T$.

П. 1 доводимо індукцією за побудовою терму t.

Якщо t – це ФНС f, то п. 1 – це умова (HF).

Нехай терм t має вигляд $S^{v_1,\ldots,v_n}(\tau, t_1,\ldots, t_n)$. Покажемо: для довільного $d\in{}^VA$ якщо $\varphi(t_A(d))\downarrow=b_1$ та $t_B(\varphi(d))\downarrow=b_2$, то $b_1=b_2$. Будемо розглядати загальний випадок, коли терм t має вигляд $S^{u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_l}(\tau, q_1,\ldots, q_k, s_1,\ldots, s_m, t_1,\ldots, t_n, r_1,\ldots, r_l)$, що позначимо $S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\tau, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r})$. Тут усі $(q_i)_A(d)\downarrow$, усі $(q_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, усі $(s_i)_A(d\,\overline{y})\uparrow$, усі $(s_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(t_i)_A(d)\downarrow$, усі $(t_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(r_i)_A(d)\uparrow$, усі $(r_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, що позначимо $\overline{q}_A(d)\downarrow$, $\overline{q}_B(\varphi(d))\uparrow$, $\overline{s}_A(d)\uparrow$, $\overline{s}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\overline{t}_A(d)\downarrow$, $\overline{t}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\overline{r}_A(d)\uparrow$, $\overline{r}_B(\varphi(d))\uparrow$. Тоді маємо:

$$\varphi(t_A(d))=\varphi((S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\tau, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r}))_A(d))=$$
$$=\varphi(\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{xz}}))=b_1, \quad (1)$$

$$t_B(\varphi(d))=(S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\tau, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r}))_B(\varphi(d))=$$
$$=\tau_B((\varphi(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{uz}})=b_2. \quad (2)$$

Позаяк φ – сюр'єкція, то $\varphi^{-1}(c)\downarrow$ для всіх $c\in B$.

Нехай $\varphi^{-1}(\overline{s}_B(\varphi(d)))=\overline{a}$, тоді $\varphi(\overline{a})=\overline{s}_B(\varphi(d))$.

Із (1) маємо $\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{xz}})\downarrow$, тому за еквітонністю маємо $\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{a}\ \overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}})\downarrow=\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{xz}})$, звідки згідно з (1) отримуємо $b_1=\varphi(\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))$.

Маємо $\tau_B((\varphi(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{uz}})=\tau_B((\varphi(d)\nabla\overline{x}\mapsto\varphi(\overline{a})\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{uz}})=$ (за еквітонністю) $=\tau_B((\varphi(d)\nabla\overline{u}\mapsto\varphi(\overline{q}_A(d))\nabla\overline{x}\mapsto\varphi(\overline{a})\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{z}})=$ (припущення індукції для $\overline{t}_A$) $=\tau_B((\varphi(d)\nabla\overline{u}\mapsto\varphi(\overline{q}_A(d))\nabla\overline{x}\mapsto\varphi(\overline{a})\nabla\overline{y}\mapsto\varphi(\overline{t}_A(d)))\|_{-\overline{z}})=$ $=\tau_B(\varphi((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))$, тому згідно з (2) отримуємо $b_2=\tau_B(\varphi((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))$. За припущенням індукції для τ маємо $\varphi(\tau_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))=\tau_B(\varphi((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))$, звідки $b_1=b_2$.

П. 2 доводимо індукцією за побудовою формули Φ.

Якщо Φ – це ПС p, то п. 2 – це умова (HP).

Нехай Φ – елементарна формула вигляду $=ts$. Нехай $(=ts)_A(d)=T$ та $(=ts)_B(\varphi(d))\downarrow$. Тоді $t_A(d)\downarrow$, $s_A(d)\downarrow$, $t_B(\varphi(d))\downarrow$, $s_B(\varphi(d))\downarrow$, $t_A(d)=s_A(d)$. Звідси $\varphi(t_A(d))=\varphi(s_A(d))$. Згідно з п. 1 маємо $\varphi(t_A(d))=t_B(\varphi(d))$, $\varphi(s_A(d))=s_B(\varphi(d))$, звідки $t_B(\varphi(d))=s_B(\varphi(d))$, тому $(=ts)_B(\varphi(d))=T$.

Нехай Φ має вигляд $S^{v_1,\ldots,v_n}(\Psi, t_1,\ldots, t_n)$. Покажемо: для довільного $d\in{}^VA$ якщо $\Phi_A(d)\downarrow=T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow=b$ то $b=T$. Розглядаємо загальний випадок, коли формула Φ має вигляд $S^{u_1,\ldots,u_k,x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n,z_1,\ldots,z_l}(\Psi, q_1,\ldots, q_k, s_1,\ldots, s_m, t_1,\ldots, t_n, r_1,\ldots, r_l)$, що будемо позначати $S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\Psi, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r})$. Тут усі $(q_i)_A(d)\downarrow$, усі $(q_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, усі $(s_i)_A(d)\uparrow$, усі $(s_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(t_i)_A(d)\downarrow$, усі $(t_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(r_i)_A(d)\uparrow$, усі $(r_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, що позначимо $\overline{q}_A(d)\downarrow$, $\overline{q}_B(\varphi(d))\uparrow$, $\overline{s}_A(d)\uparrow$, $\overline{s}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\overline{t}_A(d)\downarrow$, $\overline{t}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\overline{r}_A(d)\uparrow$, $\overline{r}_B(\varphi(d))\uparrow$. Тоді:

$$\Phi_A(d)=(S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\Psi, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r}))_A(d)=$$
$$=\Psi_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{xz}})=T, \quad (3)$$

$$\Phi_B(\varphi(d))=(S^{\overline{u},\overline{x},\overline{y},\overline{z}}(\Psi, \overline{q}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{r}))_B(\varphi(d))=$$
$$=\Psi_B((\varphi(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{uz}})=b. \quad (4)$$

Позаяк φ – сюр'єкція, то $\varphi^{-1}(c)\downarrow$ для всіх $c\in B$.

Нехай $\varphi^{-1}(\overline{s}_B(\varphi(d)))=\overline{a}$, тоді $\varphi(\overline{a})=\overline{s}_B(\varphi(d))$.

Із (3) за еквітонністю отримуємо $\Psi_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}})\downarrow=\Psi_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{xz}})=T$.

Із (4) за еквітонністю маємо $\Psi_B((\varphi(\overline{y}\,d)\nabla\overline{u}\mapsto\varphi(\overline{q}_A(d))\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{z}})\downarrow=$ $=\Psi_B((\varphi(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{uz}})=$ $=b$. Враховуючи п. 1 для $\overline{t}_A$ та $\varphi(\overline{a})=\overline{s}_B(\varphi(d))$, звідси $b=\Psi_B((\varphi(d)\nabla\overline{u}\mapsto\varphi(\overline{q}_A(d))\nabla\overline{x}\mapsto\overline{s}_B(\varphi(d))\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\overline{z}})=\Psi_B((\varphi(d)\nabla\overline{u}\mapsto\varphi(\overline{q}_A(d))\nabla\overline{x}\mapsto\varphi(\overline{a})\nabla\overline{y}\mapsto\varphi(\overline{t}_A(d)))\|_{-\overline{z}})=$ $=\Psi_B(\varphi(d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))$. Але $\Psi_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}})=T$, тому, зважаючи на те, що $\Psi_B(\varphi(d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))\downarrow=b$, за припущенням індукції для Ψ, маємо $b=\Psi_B(\varphi(d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}}))=\Psi_A((d\nabla\overline{u}\mapsto\overline{q}_A(d)\nabla\overline{x}\mapsto\overline{a}\nabla\overline{y}\mapsto\overline{t}_A(d))\|_{-\overline{z}})=T$. Отже, $b=T$.

Нехай Φ має вигляд $\Psi\vee\Xi$. Нехай $\Phi_A(d)=T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, тобто $(\Psi\vee\Xi)_A(d)=T$ та $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$. Із $(\Psi\vee\Xi)_A(d)=T$ маємо $\Psi_A(d)=T$ або $\Xi_A(d)=T$, із $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$ маємо $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))=T$ або $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))=F$. Нехай $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))=F$, тоді $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow=F$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow=F$. У той же час із $\Psi_A(d)=T$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції маємо $\Psi_B(\varphi(d))=T$, із $\Xi_A(d)=T$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції маємо $\Xi_B(\varphi(d))=T$. В обох випадках постає суперечність із $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))=F$. Отже, $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))=\Phi_B(\varphi(d))=T$.

Нехай Φ має вигляд $\Psi\&\Xi$. Нехай $\Phi_A(d)=T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, тобто $(\Psi\&\Xi)_A(d)=T$ та $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$. Із $(\Psi\&\Xi)_A(d)=T$ маємо $\Psi_A(d)=T$ та $\Xi_A(d)=T$, із $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$ маємо $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d))=T$ або $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d))=F$. Нехай $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d))=F$, тоді

$\Psi_B(\varphi(d))\downarrow = F$ або $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow = F$. У той же час із $\Psi_A(d) = T$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d)) = T$, із $\Xi_A(d) = T$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції $\Xi_B(\varphi(d)) = T$. Звідси $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d)) = T$, що суперечить припущенню $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d)) = F$. Отже, $(\Psi\&\Xi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\exists x\Psi$. Нехай $\Phi_A(d) = T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, тобто $(\exists x\Psi)_A(d) = T$ та $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$. Тоді для деякого $a\in A$ маємо $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$. Позаяк $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$, то $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$. Нехай $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$, тоді $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in B$, зокрема, $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto\varphi(a)) = F$, звідки $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a))\downarrow = F$. Але $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$, тому, згідно $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a))\downarrow$, за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = T$, що суперечить $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = F$. Отже, $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$ неможливо, тому $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\forall x\Psi$. Нехай $\Phi_A(d) = T$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, тобто $(\forall x\Psi)_A(d) = T$ та $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$. Тоді $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$ для всіх $a\in A$. Позаяк $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$, то $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$. Нехай $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$, тоді $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto b) = F$ для деякого $b\in B$. Але φ – сюр'єкція, тому $b = \varphi(c)$ для деякого $c\in A$. Маємо $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto\varphi(c)) = F$, звідки $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c))\downarrow = F$. Проте $\Psi_A(d\nabla x\mapsto c) = T$, тому, враховуючи $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c))\downarrow$, за припущенням індукції маємо $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c)) = T$, що суперечить умові $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c)) = F$. Отже, $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$ неможливо, тому $(\forall x\Psi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Наслідок. *Нехай φ – сюр'єктивний гомоморфізм* АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ *в АС* $\boldsymbol{B} = (B, \sigma)$. *Тоді для кожної позитивної формули* Φ *сигнатури* σ *маємо: якщо* $\boldsymbol{A} \models \Phi$, *то* $\boldsymbol{B} \models \Phi$.

Нехай для формули Φ маємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$. Тоді $\Phi_A(d) \cong T$ для довільних $d\in{}^VA$. За теоремою 2 для довільних $d\in{}^VA$ тоді $\Phi_B(\varphi(d)) \cong T$. Однак φ – сюр'єкція, тому кожне $\delta\in{}^VB$ суть $\varphi(d)$ для деякого $d\in{}^VA$. Отже, $\Phi_B(\delta) = T$ для всіх $\delta\in{}^VB$, звідки $\boldsymbol{B} \models \Phi$.

Зауважимо, що в [4] теорема 2 та наступна теорема 3 доведені тільки для випадку логік повнототальних еквітонних функцій та предикатів функціонального рівня.

Теорема 3 (про ізоморфізм). *Нехай* $\varphi : A\to B$ – *ізоморфізм* АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ *в АС* $\boldsymbol{B} = (B, \sigma)$. *Тоді:*

1) *для кожного терму t сигнатури* σ *для довільних* $d\in{}^VA$ *маємо* $\varphi(t_A(d)) \cong t_B(\varphi(d))$;
2) *для кожної формули* Φ *сигнатури* σ *для довільних* $d\in{}^VA$ *маємо* $\Phi_A(d) \cong \Phi_B(\varphi(d))$.

Враховуючи, що кожна біекція є сюр'єкцією, доведення п. 1 є дослівним повторенням доведення п. 1 теореми 2. П. 2 доводимо індукцією за побудовою формули Φ.

Якщо Φ – це ПС p, то п. 2 – це умова (*EP*).

Нехай Φ має вигляд $=ts$. Нехай $(=ts)_A(d)\downarrow$ та $(=ts)_B(\varphi(d))\downarrow$. Тоді $t_A(d)\downarrow$, $s_A(d)\downarrow$, $t_B(\varphi(d))\downarrow$, $s_B(\varphi(d))\downarrow$. Маємо $(=ts)_A(d) = T \Leftrightarrow t_A(d) = s_A(d) \Leftrightarrow$ (φ – біекція) $\varphi(t_A(d)) = \varphi(s_A(d)) \Leftrightarrow$ (згідно п. 1 $\varphi(t_A(d)) = t_B(\varphi(d))$ та $\varphi(s_A(d)) = s_B(\varphi(d))$) $t_B(\varphi(d)) = s_B(\varphi(d)) \Leftrightarrow (=ts)_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $S^{v_1,\ldots,v_n}(\Psi, t_1,\ldots, t_n)$. Покажемо: для довільного $d\in{}^VA$ якщо $\Phi_A(d))\downarrow = b_1$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow = b_2$, то $b_1 = b_2$. Розглядаємо загальний випадок, коли формула Φ має вигляд $S^{u_1,\ldots,u_k, x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_n, z_1,\ldots,z_l}(\Psi, q_1, \ldots, q_k, s_1, \ldots, s_m, t_1,\ldots, t_n, r_1, \ldots, r_l)$, що позначимо $S^{\bar{u},\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(\Psi, \bar{q}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{r})$. Тут усі $(q_i)_A(d)\downarrow$, усі $(q_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, усі $(s_i)_A(d)\uparrow$, усі $(s_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(t_i)_A(d)\downarrow$, усі $(t_i)_B(\varphi(d))\downarrow$, усі $(r_i)_A(d)\uparrow$, усі $(r_i)_B(\varphi(d))\uparrow$, що позначимо $\bar{q}_A(d)\downarrow$, $\bar{q}_B(\varphi(d))\uparrow$, $\bar{s}_A(d)\uparrow$, $\bar{s}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\bar{t}_A(d)\downarrow$, $\bar{t}_B(\varphi(d))\downarrow$, $\bar{r}_A(d)\uparrow$, $\bar{r}_B(\varphi(d))\uparrow$. Тоді маємо:

$$\Phi_A(d) = (S^{\bar{u},\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(\Psi, \bar{q}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{r}))_A(d) = \\ = \Psi_A((d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{x}\bar{z}}) = b_1, \quad (1)$$

$$\Phi_B(\varphi(d)) = (S^{\bar{u},\bar{x},\bar{y},\bar{z}}(\Psi, \bar{q}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{r}))_B(\varphi(d)) = \\ = \Psi_B((\varphi(d)\nabla\bar{x}\mapsto\bar{s}_B(\varphi(d))\nabla\bar{y}\mapsto\bar{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\bar{u}\bar{z}}) = b_2. \quad (2)$$

Позаяк φ – біекція, то $\varphi^{-1}(c)\downarrow$ для всіх $c\in B$.

Нехай $\varphi^{-1}(\bar{s}_B(\varphi(d))) = \bar{a}$, тоді $\varphi(\bar{a}) = \bar{s}_B(\varphi(d))$.

Із (1) за еквітонністю отримуємо $\Psi_A((d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{x}\mapsto \bar{a}\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{z}})\downarrow = = \Psi_A((d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{x}\bar{z}}) = b_1$.

Із (2) за еквітонністю маємо $\Psi_B((\varphi(d)\nabla \bar{u}\mapsto \varphi(\bar{q}_A(d))\nabla \bar{x}\mapsto \bar{s}_B(\varphi(d))\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\bar{z}})\downarrow = = \Psi_B((\varphi(d)\nabla \bar{x}\mapsto\bar{s}_B(\varphi(d))\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\bar{u}\bar{z}}) = b$. Враховуючи п. 1 для $\bar{t}_A$ та $\varphi(\bar{a}) = \bar{s}_B(\varphi(d))$, звідси $b_2 = \Psi_B((\varphi(d)\nabla \bar{u}\mapsto\varphi(\bar{q}_A(d))\nabla \bar{x}\mapsto \bar{s}_B(\varphi(d))\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_B(\varphi(d)))\|_{-\bar{z}}) = = \Psi_B((\varphi(d)\nabla \bar{u}\mapsto\varphi(\bar{q}_A(d))\nabla \bar{x}\mapsto\varphi(\bar{a})\nabla \bar{y}\mapsto\varphi(\bar{t}_A(d)))\|_{-\bar{z}}) = = \Psi_B(\varphi(d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{x}\mapsto \bar{a}\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{z}}))$. Враховуючи $\Psi_B(\varphi(d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{x}\mapsto \bar{a}\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{z}}))\downarrow$ та $\Psi_A((d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{x}\bar{z}})\downarrow$, за припущенням індукції для Ψ маємо $b_2 = \Psi_B(\varphi(d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{x}\mapsto \bar{a}\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{z}})) = \Psi_A((d\nabla \bar{u}\mapsto \bar{q}_A(d)\nabla \bar{x}\mapsto \bar{a}\nabla \bar{y}\mapsto \bar{t}_A(d))\|_{-\bar{z}}) = b_1$. Отже, $b_1 = b_2$.

Нехай Φ має вигляд $\neg\Psi(d))$. Нехай $\Phi_A(d)\downarrow$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$, звідси $\Psi_A(d)\downarrow$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$. Маємо $\Phi_A(d) = T \Leftrightarrow (\neg\Psi)_A(d) = T \Leftrightarrow \Psi_A(d) = F \Leftrightarrow \Psi_B(\varphi(d)) = F$ (згідно з припущенням індукції, адже $\Psi_A(d)\downarrow$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$) $\Leftrightarrow (\neg\Psi)_B(\varphi(d)) = T \Leftrightarrow \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай Φ має вигляд $\Psi\vee\Xi$. Нехай $\Phi_A(d)\downarrow$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$.

Нехай $\Phi_A(d) = T$, тобто $(\Psi\vee\Xi)_A(d) = T$, тоді $\Psi_A(d) = T$ або $\Xi_A(d) = T$. Із $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$ маємо $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$. Якщо $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$, то $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow = F$ та

$\Xi_B(\varphi(d))\downarrow = F$. Проте із $\Psi_A(d) = T$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції маємо $\Psi_B(\varphi(d)) = T$, із $\Xi_A(d) = T$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції $\Xi_B(\varphi(d)) = T$. В обох випадках маємо суперечність із $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$, тому $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай $\Phi_A(d) = F$, тобто $(\Psi\vee\Xi)_A(d) = F$, тоді $\Psi_A(d) = F$ та $\Xi_A(d) = F$. Із $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d))\downarrow$ маємо $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$. Якщо $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = T$, то $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow = T$ або $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow = T$. Проте із $\Psi_A(d) = F$ та $\Psi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції маємо $\Psi_B(\varphi(d)) = F$, із $\Xi_A(d) = F$ та $\Xi_B(\varphi(d))\downarrow$ за припущенням індукції $\Xi_B(\varphi(d)) = F$. Звідси $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = F$, що суперечить припущенню $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = T$. Отже, $(\Psi\vee\Xi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = F$.

Нехай Φ має вигляд $\exists x\Psi$. Нехай $\Phi_A(d)\downarrow$ та $\Phi_B(\varphi(d))\downarrow$.

Нехай $\Phi_A(d) = T$, тобто $(\exists x\Psi)_A(d) = T$. Тоді для деякого $a\in A$ маємо $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$. Позаяк $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$, то $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$. Нехай $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$, тоді для всіх $b\in B$ маємо $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto b) = F$, зокрема, $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto \varphi(a)) = F$, звідки $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a))\downarrow = F$. Але $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = T$, тому, враховуючи $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a))\downarrow$, за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = T$, що суперечить умові $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto a)) = F$. Отже, $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$ неможливо, тому $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = T$.

Нехай $\Phi_A(d) = F$, тобто $(\exists x\Psi)_A(d) = F$. Тоді для всіх $a\in A$ маємо $\Psi_A(d\nabla x\mapsto a) = F$. Позаяк $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d))\downarrow$, то $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$ або $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = F$. Нехай $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$, тоді для деякого $b\in B$ маємо $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto b) = F$. Але φ – сюр'єкція, тому $b = \varphi(c)$ для деякого $c\in A$. Маємо $\Psi_B(\varphi(d)\nabla x\mapsto \varphi(c)) = T$, звідки випливає $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c))\downarrow = T$. Проте $\Psi_A(d\nabla x\mapsto c) = F$, тому, враховуючи $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c))\downarrow$, за припущенням індукції $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c)) = F$, що суперечить $\Psi_B(\varphi(d\nabla x\mapsto c)) = T$. Отже, $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = T$ неможливо, тому $(\exists x\Psi)_B(\varphi(d)) = \Phi_B(\varphi(d)) = F$.

Наслідок 1. *Нехай* φ *– автоморфізм* АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$. *Тоді для кожної формули* Φ *сигнатури* σ *для довільних* $d\in {}^VA$ *маємо* $\Phi_A(d) \cong \Phi_A(\varphi(d))$.

Наслідок 2. *Нехай* φ *– ізоморфізм* АС $\boldsymbol{A} = (A, \sigma)$ *в АС* $\boldsymbol{B} = (B, \sigma)$. *Тоді для кожної формули* Φ *сигнатури* σ *маємо* $\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \Phi$.

Маємо $\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow \Phi_A(d) \cong T$ для довільних $d\in {}^VA$ $\Leftrightarrow$ (теорема 3) $\Phi_B(\varphi(d)) \cong T$ для довільних $d\in {}^VA$ $\Leftrightarrow$ ($\varphi^{-1}({}^VB) = {}^VA$ за сюр'єктивністю φ) $\Phi_B(\delta) \cong T$ для довільних $\delta\in {}^VB \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \Phi$.

Висновки

В роботі розглянуто узагальнені поняття алгебри та алгебраїчної системи. Описано гомоморфізми алгебр та алгебраїчних систем, запропоновано класифікацію таких гомоморфізмів. Досліджено алгебри з квазіарними функціями та предикатами – неокласичні алгебри. Простежено гомоморфізми цих алгебр, зокрема, доведено теореми про гомоморфізми та ізоморфізм.

1. Нікітченко М. С. Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2007. – № 2. – С. 15–40.
2. Никитченко Н. С. Предикатные композиционно-номинативные системы / Н. С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 2. – С. 3–19.
3. Нікітченко М. С. Алгебри еквітонних функцій та їх властивості / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1998. – Вип 2. – С. 222–232.
4. Нікітченко М. С. Основи математичної логіки / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2006. – 246 с.
5. Глушков В. М. Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушков, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – К. : Наукова думка, 1974. – 328 с.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.

S. Shkilnyak

NEOCLASSICAL ALGEBRAS AND THEIR HOMOMORPHISMS

Generalized notions of algebra, structure, homomorphisms of algebras and structures are considered. Neoclassical algebras (algebras with quasi-ary functions and predicates) and their homomorphisms are investigated, the homomorphisms and isomorphism theorems are proved.