УДК 517.5

Прокоф'єв П. Г.

ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНІ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ, ЩО Є СУМАМИ ЧОТИРЬОХ $\mathbb{Z}^3$-ОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ АЛГЕБРИ ПОЛІНОМІВ ВІД ТРЬОХ ЗМІННИХ[1]

У статті описано всі локально нільпотентні диференціювання (ЛНД) алгебри поліномів від трьох змінних, які є сумою не більше ніж чотирьох $\mathbb{Z}^3$-однорідних. Охарактеризовано поліедри Ньютона локально нільпотентних диференціювань.
Ключові слова: локально нільпотентні диференціювання, однорідні диференціювання, поліедри Ньютона.

Позначення та попередні відомості

Поліноміальні диференціювання.
Нехай $A = \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — поліноміальна алгебра над полем нульової характеристики $\mathbb{F}$. Поліноміальні диференціювання алгебри A мають форму лінійних диференціальних операторів

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

$\mathbb{Z}^n$-градуювання визначається стандартним чином. А саме, для мономів $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ і мономіальних диференціювань $D = x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}$:
$mdeg(x^\alpha) = \alpha$.
$mdeg(x^\alpha\frac{\partial}{\partial x_i}) = \alpha - 1_i$, $1_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, де 1 стоїть на i-тому місці.
Однорідні диференціювання мають вигляд

$$D_\alpha = x^\alpha\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (2)$$

або є мономіальними.
Дія цих диференціювань на довільний моном x^m дає або моном мультистепеня

$$mdeg(D_\alpha(x^m)) = \alpha + m, \qquad (3)$$

або нуль, внаслідок рівності нулю коефіцієнта $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m_i$, зокрема для мономіальних диференціювань це можливо лише, коли $m_i = 0$.
Будь-яке поліноміальне диференціювання є сумою мономіальних:

$$D = \sum_\alpha\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha(i)}x^{\alpha(i)}\frac{\partial}{\partial x_i}, a_{\alpha(i)} \in \mathbb{F} \qquad (4)$$

.

Поліедри Ньютона.
Розглянемо диференціювання вигляду (4). $Supp(D)$ (носій диференціювання) складається з множини цілочисельних векторів $\alpha(i) \in \mathbb{Z}^n$, для яких $a_\alpha(i) \neq 0$.

Означення 1. *Поліедром Ньютона називається опукла оболонка векторів $\alpha(i) - 1_i$ ($\alpha(i) \in \mathbb{Z}^n$) та вектора $(-1, \ldots, -1)$.*

Будемо називати основними ребрами поліедра Ньютона такі, які не проходять через точку $(-1, \ldots, -1)$.

Локально нільпотентні диференціювання (ЛНД).

Означення 2. *Диференціювання* (1) *називається локально нільпотентним, якщо для довільного поліному $f \in A$ існує натуральне число $m = m(f)$, для якого $D^m(f) = 0$.*

Прикладами локально нільпотентних диференціювань є елементарні диференціювання:

$$a(x_1 \ldots x_{i-1}x_{i+1} \ldots x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (5)$$

а також трикутні диференціювання, які мають вигляд

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j(x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j} + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad (6)$$

$a_n \in \mathbb{F}$. Одним зі способів побудови нетривіальних локально нільпотентних диференціювань є множення елементарного або трикутного диференціювання на певний елемент його ядра. Таке диференціювання має вигляд $\phi \times D$, де D має вигляд (5) або (6), а $\phi \in KerD$. Прикладом, отриманим в такий

[1]Стаття підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень Ф25/096 та Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

спосіб, є таке диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних:

$$\left(x_3x_1 + x_2^2\right)\left(-2x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad (7)$$

експонента якого

$$< x_1 - 2x_2(x_2^2 + x_3x_1) - x_3(x_2^2 + x_3x_1)^2, \\ x_2 + x_3(x_2^2 + x_3x_1), x_3 > \qquad (8)$$

є знаменитим автоморфізмом Нагати, дикість якого була доведена Шестаковим та Умірбаєвим у [5].

Іншим прикладом такого типу є диференціювання

$$\left(x_3x_1 + x_2x_4\right)\left(-x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad (9)$$

експонента якого — автоморфізм Аніка — кандидат до класу диких автоморфізмів алгебри поліномів від чотирьох змінних.

Узагальнення для цих двох прикладів отримано у праці [8]:

Теорема 1. *Трикореневі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних після відповідного переіменування змінних з точністю до сталого множника мають одну з форм:*

$$\left((k_2+1)x_1x_3^m + \beta x_2^{k_2+1}\right)x_3^l \times \\ \times\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_3^m}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad (10)$$

$$\left((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1}x_3^m\right)x_3^l \times \\ \times\left(x_2^{k_2}x_3^m\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad (11)$$

де $m, l, k_2 = 0, 1, 2, \ldots, \beta \in \mathbb{F}^*$ *або є трикутним однієї з форм:*

$$x_2^{k_2}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda x_3^l\frac{\partial}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \left(x_2^{k_2}x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \mu x_3^m\frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \left(x_2^{k_2}x_3^{k_3} + \lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3} + \mu x_2^{m_2}x_3^{m_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}. \qquad (12)$$

Теорема 2. $\mathbb{Z}^n$*-однорідні диференціювання є ЛНД тоді і лише тоді, коли вони є елементарними, тобто мономіальними.*

Доведення наведено в [8] і грунтується на тому, що ЛНД не може мати власних поліномів (поліномів Дарбу), тобто таких $D(f) = h \times f$, де поліном $h \in \mathbb{F}[x]$.

Для однорідних диференціювань виду (2) для змінних x_i, для яких $\alpha_i \neq 0$, матимемо $D_\alpha(x_i) = \alpha_i x^{\alpha + 1_i}$, що ділиться на x_i, тому такі диференціювання не будуть ЛНД.

Наслідок 1. *Вершини поліедра Ньютона для ЛНД лежать в гіперплощинах* H_i*, таких, що* $x_i = -1$.

Доведення. Нехай диференціювання $D = D_\alpha + \overline{D}$ містить як доданок компоненту D_α виду (2).

Якщо $D_\alpha^m(x_i) = x^{\alpha m} \times C$, то мають існувати однорідні доданки D', D'' в диференціюванні $\overline{D}$, числа a, m і цілочисельні вектори u, v, такі, що $m\alpha = au + (m-a)v$.

Композиції в довільному порядку a диференціювань D' та $(m-a)$ D'', застосованих до x_i буде також давати моном x^{am} і тільки тоді можливе скорочення. Отже, необхідною умовою того, щоб D було ЛНД, є можливість подання $\alpha = p\cdot u + q\cdot v$, де $p+q = 1$. Застосувавши ті ж міркування до однорідних диференціювань D', D'', ми дійдемо висновку, що на прямій, яка містить точки u, v, мають бути вектори з координатами -1 і вони повинні бути елементарними диференціюваннями, що входять в D.

Наслідок 2. *Нехай* D *— ЛНД. Сума мономіальних диференціювань, мультистепінь яких лежить в площині, що містить основне ребро поліедра Ньютона і початок координат, є ЛНД.*

Доведення. Дійсно, нехай диференціювання $D = D' + \overline{D}$ містить доданок компоненту D', що є сумою мономіальних диференціювань, мультистепінь яких лежить в площині, що містить основне ребро поліедра Ньютона (позначимо R) і початок координат.

Якщо D' не є ЛНД, то для певного x_i $D'^m(x_i) \neq 0$ для всіх m. Старший моном цього виразу має вигляд $x^{\alpha m} \times C$, де α — певна лінійна комбінація мультистепенів диференціювань з D'. Тоді мають існувати однорідні доданки D'', D''' в диференціюванні $\overline{D}$, числа a, m і цілочисельні вектори u, v, такі що $m\alpha = au + (m-a)v$.

Застосувавши ті ж міркування, що і в попередньому доведенні, дійдемо висновку, що u, v лежать на прямій R або ж вони лежать на прямій, яка перетинає R в точці α по різні боки від R. Але тоді R не ребро, отже, D' має бути ЛНД.

Наведемо формулювання ще кількох теорем про ЛНД, які будуть використані.

Теорема 3. *(Rentschler, [1]) Якщо D — локально нільпотентне диференціювання алгебри поліномів $\mathbb{F}[x_1, x_2]$, то існують поліноми $P, Q \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$, такі, що:*

1. $KerD = \mathbb{F}[P]$;
2. $\mathbb{F}[P, Q] = \mathbb{F}[x_1, x_2]$;
3. *існує поліном $\alpha = \alpha(t)$ такий, що для довільного $h \in \mathbb{F}[x_1, x_2]$*

$$D(h) = \alpha(P) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Наступна теорема дає алгоритм перевірки того, чи є диференціювання алгебри поліномів від двох змінних локально нільпотентним.

Теорема 4. *([2], Теорема 1.3.52, с. 33) Диференціювання $D = a_1(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $D^{d^*+2}(x_i) = 0, i = 1, 2$, де $d^* = max_{i,j} \deg_{x_i} a_j(x_1, x_2)$.*

Наступна лема є одним із наслідків теорії слайсів (див. [2], с. 26–27):

Лема 1. *Якщо існує поліном $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, такий, що для даного локально нільпотентного диференціювання D елемент $D(f)$ ділиться на f, то $D(f) = 0$.*

Локально нільпотентні диференціювання, що є сумами чотирьох $\mathbb{Z}^n$-однорідних

Лема 2. *ЛНД D, що є сумою чотирьох $\mathbb{Z}^n$-однорідних, може:*
1) або містити рівно два моногенних не елементарних диференціювання D_k, D_l виду (2), в цьому випадку воно повинно мати вигляд

$$D = D_k + D_l + D_u + D_v, \quad (14)$$

де D_u, D_v є елементарними локально нільпотентними, причому мультистепені мають бути зв'язані лінійним зв'язком з натуральними коефіцієнтами:

$$a_1 \times mdeg(D_k) = b_1 \times mdeg(D_l) + c_1 \times mdeg(D_u) + \\ + (a_1 - b_1 - c_1) \times mdeg(D_v), \quad (15)$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}, a_1 \geq b_1 + c_1$$

$$a_2 \times mdeg(D_l) = b_2 \times mdeg(D_k) + c_2 \times mdeg(D_u) + \\ + (a_2 - b_2 - c_2) \times mdeg(D_v), \quad (16)$$

$$a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{N}, a_2 \geq b_2 + c_2;$$

2) або містити одне моногенне не елементарне диференціювання D_k виду (2), в цьому випадку воно повинно мати вигляд

$$\left((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1}\right)\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \\ + \alpha x_1^{v_1} x_2^{v_2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (17)$$

де $k_2, v_1, v_2 = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta \in \mathbb{F}^*$,
або

$$\left((k_2+1)x_1 + \beta x_2^{k_2+1}\right) x_3^l \left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + \\ + \alpha\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (18)$$

де $k_2, l = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta \in \mathbb{F}^*$;

3) або складатися з чотирьох елементарних диференціювань, в цьому випадку воно повинно бути трикутним або мати вигляд:

$$\lambda_1 x_2^{k_2} x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_3^{k_3+1})\frac{\partial}{\partial x_2} - \\ - \frac{\lambda_1\lambda_2}{(k_3+1)\lambda_3} x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (19)$$

де $k_2 > 0, k_3 \geq 0, \lambda_i \in \mathbb{F}^*$.

Доведення. Розглянемо поліедр Ньютона D. З (1) випливає, що як мінімум 2 однорідних диференціювання, з яких складається D, є елементарними.

У випадку, коли в D є два неелементарні диференціювання D_k, D_l всі однорідні диференціювання лежатимуть на одному ребрі поліедра Ньютона, звідси отримали співвідношення (15) і (16).

Розглянемо випадок, коли в D є одне неелементарне D_k і три елементарні — D_l, D_u, D_v. За (1) мультистепінь D_k може лежати або на грані поліедра Ньютона, або ж на ребрі. У першому випадку маємо всі пари $D_l + D_u$, $D_l + D_v$, $D_u + D_v$ — ЛНД. Без втрати загальності:

$$D_l = \beta_1 x_2^{l_2} x_3^{l_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, D_u = \beta_2 x_3^{u_2}\frac{\partial}{\partial x_2}, D_v = \beta_3\frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{F}. \quad (20)$$

Оскільки для D_k має виконуватись (15), підставимо $a_1 \times k_1 = -1 \times c_1 \Rightarrow k_1 < 0$, отже, D_k — елементарне, що не відповідає умові.

Розглянемо тепер випадок, коли мультистепінь D_k лежить на ребрі поліедра Ньютона, нехай, крім

D_k, на цьому ребрі наявні ще і мультистепені D_l, D_u. За (2) $D_k + D_l + D_u$ — ЛНД, так само, як і суми $D_l + D_v$ та $D_u + D_v$.

З теореми 1 випливає загальний вигляд трикореневих диференціювань. Якщо покласти $m = 0, l > 0$ у формулах 11 та 10, то з попередніх міркувань: $D_v = \alpha \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Покажемо, що таке диференціювання буде локально нільпотентним. $D = D_0 + D_v$, де $D_0 = D_k + D_l + D_u$, нехай N_0 — ступінь нільпотентності D_0. Нехай $N > N_0 + lN_0$. $D^N(x_j) = (D_0 + D_v)^N(x_j), j = 1, 2$. Сюди належать всі набори з i диференціювань D_0 та $(N - i) - D_v$. Всі набори, в які входить більше ніж N_0 диференціювань D_0 скорочуються, оскільки D_v не впливає на інші змінні, крім x_3, а ступінь по x_3 зменшує на 1, а при застосуванні D_0 ступінь по x_3 просто збільшується на l. Тому, якщо $D_0^{N_0}(x_j) = 0$, то вставивши всередину цього виразу довільну кількість D_v, ми все одно отримаємо 0. Тепер розглянемо ті набори, в які входить не більше ніж N_0 диференціювань D_0. Степінь результату по x_3 не більше ніж lN_0. Кількість же диференціювань D_v більше цього числа, тому всі такі набори теж скорочуються, отже, D — ЛНД.

Якщо покласти $m > 0$ у формулах (11) та (10), то яке б D_v ми не брали, скорочення не відбуватиметься, і тому D не буде ЛНД.

Якщо взяти $m = l = 0$ у формулах (11) та (10), і до такого диференціювання додати ще елементарне вигляду $D_v = \beta x_1^{v_1} x_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\beta \in \mathbb{F}$, ми отримаємо ЛНД.

Розглянемо випадок, коли всі доданки в D є елементарними.

Припустимо, що D не є трикутним. Тоді виконується (без втрати загальності): $D_k = x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, D_l = x_1^{l_1} x_3^{l_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, k_2 > 0, l_1 > 0$.

Щоб D було локально нільпотентним степеня N, треба, аби існували

$$a_1 \times mdeg(D_k) + b_1 \times mdeg(D_l) = c_1 \times mdeg(D_u) + \\ + d_1 \times mdeg(D_v), a_1 + b_1 = c_1 + d_1 = N, \quad (21)$$

звідси $D_u + D_v$ — теж не локально нільпотентне, тобто не трикутне. Якщо жодне з D_u, D_v не є диференціюванням по x_3, то вони збігаються з D_k, D_l. Значить, $D_u = x_1^{u_1} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, D_v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial x_3}, u_3 > 0, v_2 > 0$.

За (2), $D_k + D_u$, $D_k + D_v$, $D_l + D_u$, $D_l + D_v$ мають бути ЛНД, а отже, трикутними. Тобто без втрати загальності ми отримали такий можливий вигляд для $D = D_k + D_l + D_u + D_v$:

$D_k = \alpha_k x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, D_l = \alpha_l x_1^{l_1} \frac{\partial}{\partial x_2}, D_u = \alpha_u x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, D_v = \alpha_v x_2^{v_2} \frac{\partial}{\partial x_3}, k_2 > 0, l_1 > 0, u_3 > 0, v_2 > 0$.

При диференціюванні x_2 маємо:

$$D(x_2) = \alpha_l x_1^{l_1} + \alpha_u x_3^{u_3} \neq 0$$

$$D(x_2)^2 = \alpha_l \alpha_k l_1 x_1^{l_1 - 1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} + \alpha_l \alpha_v u_3 x_2^{v_2} x_3^{u_3 - 1}.$$

Розглянувши $D(x_2)^N$, бачимо, що для скорочення монома зі старшим коефіцієнтом по x_1 потрібно, аби $v_2 = k_2$. В цьому випадку позначимо

$$D(x_2)^2 = (\alpha_l \alpha_k l_1 x_1^{l_1 - 1} x_3^{k_3} + \alpha_l \alpha_v u_3 x_3^{u_3 - 1}) x_2^{k_2} = \\ = \omega(x_1, x_3) x_2^{k_2}, \quad (22)$$

$$D(x_2)^3 = k_2 \omega(x_1, x_3) x_2^{k_2 - 1} (\alpha_l x_1^{l_1} + \alpha_u x_3^{u_3}) + \\ + \omega'(x_1, x_3) x_2^{k_2}. \quad (23)$$

Знову розглянувши $D(x_2)^N$, отримаємо, що в моном зі старшим коефіцієнтом по x_1 буде входити ω в певному степені і для його скорочення потрібно, щоб $\omega = 0$, тобто $D(x_2)^2 = 0$. Для цього треба, аби $l_1 = 1, u_3 = k_3 + 1, v_2 = k_2, \alpha_v = -\frac{\alpha_k \alpha_l}{(k_3 + 1)\alpha_u}$. Можна пересвідчитись, що при виконанні цих умов D буде нільпотентним і за двома іншими змінними.

Отже, у випадку, коли всі чотири диференціювання D_k, D_l, D_u, D_v є елементарними, можливо, що D або має трикутний вигляд, або наступний:

$$D_k = \alpha_k x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, D_l = \alpha_l x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$D_u = \alpha_u x_3^{k_3 + 1} \frac{\partial}{\partial x_2}, D_v = -\frac{\alpha_k \alpha_l}{(k_3 + 1)\alpha_u} x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

де $k_2 > 0, k_3 \geq 0$.

Це завершує доведення леми.

Перейдемо до опису локально нільпотентних диференціювань D алгебри поліномів від трьох змінних виду $D = D_k + D_l + D_u + D_v$, два з яких є неелементарними.

Ці диференціювання D_k, D_l мають вигляд:

$$D_k = \alpha_1 x_1^{k_1 + 1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 x_1^{k_1} x_2^{k_2 + 1} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + \alpha_3 x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3 + 1} \frac{\partial}{\partial x_3}, \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}, \quad (24)$$

$$D_l = \phi_1 x_1^{l_1 + 1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \phi_2 x_1^{l_1} x_2^{l_2 + 1} x_3^{l_3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \\ + \phi_3 x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3 + 1} \frac{\partial}{\partial x_3}, \ \phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \mathbb{F}. \quad (25)$$

Будемо вважати, що елементарні диференціювання мають вигляд

$$D_u = \beta x_2^{u_2} x_3^{u_3} \frac{\partial}{\partial x_1}, \ D_v = \gamma x_1^{v_1} x_3^{v_3} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad (26)$$

$\beta, \gamma \in \mathbb{F}$, адже можна зробити перейменування змінних. У [8] показано, що однорідне диференціювання можна подати у вигляді

$$D_k = \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_r \varepsilon^r (k + 1_r), \tag{27}$$

де

$$\varepsilon^i(k) = x^{k-1_i} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{k_i}{k_n + 1} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{28}$$

За цими формулами, при $n = 4$ отримуємо

$$\begin{aligned} D(x_3) &= D_k(x_3) + D_l(x_3) = \\ &= \alpha_1 \varepsilon^1 (k + 1_1)(x_3) + \alpha_2 \varepsilon^2 (k + 1_2)(x_3) + \\ &+ \phi_1 \varepsilon^1 (l + 1_1)(x_3) + \phi_2 \varepsilon^2 (l + 1_2)(x_3) = \\ &= -\frac{\alpha_1(k_1+1) + \alpha_2(k_2+1)}{k_3+1} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3+1} - \\ &- \frac{\phi_1(l_1+1) + \phi_2(l_2+1)}{l_3+1} x_1^{l_1} x_2^{l_2} x_3^{l_3+1}. \end{aligned}$$

Оскільки $D(x_3)$ ділиться на x_3, то, за лемою 1, або $k = l$, і тоді диференціювання складається з трьох однорідних, або $\alpha_1(k_1+1) + \alpha_2(k_2+1) = 0$ і $\phi_1(l_1+1) + \phi_2(l_2+1) = 0$. Отже, з точністю до сталого множника можна вважати, що

$$D_k = (k_2+1) x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_1+1) x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} x_3^{k_3} \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{29}$$

$$D_l = \alpha(l_2+1) x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} x_3^{l_3} \frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha(l_1+1) x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} x_3^{l_3} \frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{30}$$

Оскільки x_3 належить ядру диференціювання $D_k + D_l + D_u + D_v$, то воно буде локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли таким буде диференціювання алгебри поліномів від двох змінних $\overline{D} = \overline{D}_k + \overline{D}_l + \overline{D}_u + \overline{D}_v$, де:

$$\overline{D}_k = (k_2+1) x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_1+1) x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\overline{D}_l = (l_2+1) x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - (l_1+1) x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} \frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\overline{D}_u = x_2^{u_2} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \overline{D}_v = x_1^{v_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Для характеризації локально нільпотентних диференціювань такого виду скористаємося теоремою 3. Якщо покласти $h = x_1$, а потім $h = x_2$ у формулі (13), то отримаємо

$$D(x_1) = -\alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_2}; \quad D(x_2) = \alpha(P) \frac{\partial P}{\partial x_1}.$$

Нехай $u(t)$ — первісна до функції $\alpha(t)$, тобто $\frac{du}{dt} = \alpha(t),\ u(0) = 0$, тоді отримуємо

$$D(x_1) = -\frac{\partial u(P)}{\partial x_2}; \quad D(x_2) = \frac{\partial u(P)}{\partial x_1}.$$

Якщо D є локально нільпотентним, то для нього має існувати вказане зображення, а отже, мають існувати функція $u(t)$ та координатний поліном $P = P(x_1, x_2)$ такі, що виконуються рівності

$$-\frac{\partial u(P)}{\partial x_2} = (k_2+1) x_1^{k_1+1} x_2^{k_2} + \alpha(l_2+1) x_1^{l_1+1} x_2^{l_2} + \beta x_2^{u_2};$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x_1} = -(k_1+1) x_1^{k_1} x_2^{k_2+1} - (l_1+1) x_1^{l_1} x_2^{l_2+1} + \gamma x_1^{v_1}.$$

Нескладно помітити, що з точністю до константи єдиним розв'язком системи є функція

$$u(P) = \psi(x_1, x_2) = -x_1^{k_1+1} x_2^{k_2+1} - \alpha x_1^{l_1+1} x_2^{l_2+1} + \frac{\gamma}{v_1+1} x_1^{v_1+1} - \frac{\beta}{u_2+1} x_2^{u_2+1}. \tag{31}$$

Поліном $u(P)$ може бути сумою чотирьох мономів лише за таких умов:

1. P є мономом, а $u(t)$ є сумою чотирьох мономів ненульового степеня.

2. P є сумою двох мономів, а $u(t) = At^3$.

3. P є сумою чотирьох мономів, а $u(t) = At$,

$A \in \mathbb{F}$.

В першому випадку кожен моном $u(P)$ має ділитися на моном P, що, очевидно, не виконується в правій частині (31). У третьому випадку з точністю до сталого множника P повинно набути вигляду правої частини (31). За з формулами (15), (16), $a_1 k_1 = b_1 l_1 - c_1 + (a_1 - b_1 - c_1) v_1, a_2 l_1 = b_2 k_1 - c_2 + (a_2 - b_2 - c_2) v_1$. Оскільки $a_1 > b_1, a_2 > b_2$, то $v_1 > 0$. Аналогічно, $u_2 > 0$. Тоді точка $(0,0)$ є спільним нулем частинних похідних $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial P}{\partial x_2}$, а отже, P не може бути координатним.

У другому випадку для того, щоб виконувалось (31), поліном P повинен мати вигляд $P = p_1 x_1^{m_1} + p_2 x_2^{m_2}$, звідки

$$\begin{aligned} &3m_1 = v_1 + 1, 2m_1 = k_1 + 1, m_1 = l_1 + 1, \\ &m_2 = k_2 + 1, 2m_2 = l_2 + 1, 3m_2 = u_2 + 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Крім того, для того, щоб вказані частинні похідні не оберталися одночасно в нуль, очевидно, що або m_1, або m_2 мають дорівнювати 1. ($p_1 m_1 x_1^{m_1-1} = 0 = p_2 m_2 x_2^{m_2-1}$).

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що $m_1 = 1$, тоді $v_1 = 2, k_1 = 1, l_1 = 0$, а поліном $P = x_1 + x_2^{m_2}$ є очевидно координатним. При цьому зі співвідношень (32) отримуємо $u_2 = 3k_2 + 2, l_2 = 2k_2 + 1$, тобто приходимо до диференціювання $\overline{D}$, що є сумою чотирьох кореневих

$$\overline{D}_k = (k_2+1)x_1^2 x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1 x_2^{k_2+1}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\overline{D}_l = \alpha(2k_2+2)x_1 x_2^{2k_2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha x_2^{2k_2+2}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$\overline{D}_u = \beta x_2^{3k_2+2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \overline{D}_v = \gamma x_1^2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Лема 3. *Диференціювання $\overline{D} = \overline{D}_k + \overline{D}_l + \overline{D}_u + \overline{D}_v$ є локально нільпотентним тоді і тільки тоді, коли $\gamma = -\frac{1}{\alpha}$ і $\beta = (k_2+1)\alpha^2$.*

Доведення. Позначимо N — степінь нільпотентності по x_2. Застосуємо теорему 4. Для диференціювання $\overline{D}$ маємо $N \le (3k_2+2)+2$.

$$\overline{D}^2(x_2) = 2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)x_1^2 x_2^{2k_2+1} + 2((k_2+1)\alpha + \beta\gamma)x_1 x_2^{3k_2+2} + 2(\alpha^2(k_2+1)-\beta)x_2^{4k_2+3}.$$

Розглянемо два випадки:

1. $N \le (2k_2+1)+2$ $\overline{D}^N(x_2) = \overline{D}^{N-2}(\overline{D}^2(x_2))$

Знайдемо моном з максимальним степенем по x_1 в записі $\overline{D}^N(x_2)$. З того, що $\overline{k} = (1, k_2, 0)$, $\overline{l} = (0, 2k_2+1, 0)$, $\overline{u} = (-1, 3k_2+2, 0)$, $\overline{v} = (2, -1, 0)$, випливає, що таким буде моном, отриманий $(N-2)$-кратним застосуванням $\overline{D_v}$ до $2(k_2+1)\times(\alpha\gamma+1)x_1^2 x_2^{2k_2+1}$, тобто

$$\overline{D}^{N-2}(2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)x_1^2 x_2^{2k_2+1}) = \frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+3-N)!}2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\gamma^{N-2}\times x_1^{2+2(N-2)}x_2^{2k_2+3-N}$$

Оскільки $N \le 2k_2+3$, то степінь по x_2 цього монома не менше нуля. Щоб він знищився, потрібно, аби $(\alpha\gamma+1) = 0$. З цього випливає, що $\overline{D}^2(x_2)$ не містить x_1^2. Тоді знову знайдемо моном з максимальним степенем по x_1. З аналогічних міркувань, це:

$$\overline{D}_v^{N-2}(2((k_2+1)\alpha+\beta\gamma)x_1 x_2^{3k_2+2}) = \frac{(3k_2+2)!}{(3k_2+4-N)!}2(\alpha(k_2+1)-\frac{\beta}{\alpha})\gamma^{N-2}\times x_1^{1+2(N-2)}x_2^{3k_2+4-N}.$$

Щоб цей моном знищився, потрібно, аби $\beta = (k_2+1)\alpha^2$, а з цього випливає, що $\overline{D}^2(x_2) = 0$. Для цього випадку лема доведена.

2. $(2k_2+1)+2 < N \le (3k_2+2)+2$

Знову знайдемо моном з максимальним степенем по x_1 в записі $\overline{D}^N(x_2) = \overline{D}^{N-2}(\overline{D}^2(x_2))$.

$$\overline{D}_v^{N-2}(x_1^2 x_2^{2k_2+1}) = \overline{D}_v^{N-2-(2k_2+1)}(\overline{D}_v^{2k2+1}(x_1 x_2^{2k_2+1})) = 0,$$

адже при кожному застосуванні D_v степінь по x_2 зменшується на 1.

Отже, максимальним степенем по x_1 буде $1 + 2(N-2)$. З мультистепенів D_k, D_l, D_u, D_v випливає, що він може бути отриманим після

1) $(N-2)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ до $x_1 x_2^{3k_2+2}$;

2) $(N-3)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ і однократного D_k до $x_1^2 x_2^{2k_2+1}$ (в довільному порядку).

У випадку 1) маємо

$$c_1 = \overline{D}_v^{N-2}(2((k_2+1)\alpha+\beta\gamma)x_1 x_2^{3k_2+2}) = \frac{(3k_2+2)!}{(3k_2+4-N)!}2(\alpha(k_2+1)+\beta\gamma)\gamma^{N-2}\times x_1^{1+2(N-2)}x_2^{3k_2+4-N}.$$

У випадку 2) на початку можемо застосувати D_v не більше ніж $2k_2+1$ разів. Тому отримаємо

$$c_2 = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\overline{D}_v^{N-3-i}(\overline{D}_k(\overline{D}_v^i(2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\times x_1^2 x_2^{2k_2+1})))) = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\overline{D}_v^{N-3-i}(\overline{D}_k(2(k_2+1)\times(\alpha\gamma+1)\frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+1-i)!}\gamma^i x_1^{2+2i}x_2^{2k_2+1-i}))) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\overline{D}_v^{N-3-i}(2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+1-i)!}\times\gamma^i(2k_2 i+4i-2k_2)x_1^{3+2i}x_2^{3k_2+1-i})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\frac{(3k_2+1-i)!}{(3k_2+1-i-(N-3-i))!}\gamma^{N-3-i}\times 2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+1-i)!}\gamma^i(2k_2 i+4i-2k_2)\times x_1^{3+2i+2(N-i-3)}x_2^{3k_2+1-i-(N-i-3)}) =$$

$$= 4\gamma^{N-3}(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\frac{(2k_2+1)!}{(3k_2+4-N)!}x_1^{2N-3}\times x_2^{3k_2+4-N}\sum_{i=0}^{2k_2+1}(\frac{(3k_2+1-i)!}{(2k_2+1-i)!}(2k_2 i+4i-2k_2)).$$

Ця остання сума дорівнює $\frac{(3k_2+2)(3k_2+1)!}{(2k_2+1)!}$, тобто

$$c_2 = 4\gamma^{N-3}(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\frac{(3k_2+2)!}{(3k_2+4-N)!}\times \times x_1^{2N-3}x_2^{3k_2+4-N}.$$

Щоб $\overline{D}^N(x_2) = 0$, потрібно, щоб $c_1 + c_2 = 0$, тобто

$$2\gamma^{N-3}\frac{(3k_2+2)!}{(3k_2+4-N)!}((\alpha(k_2+1)+\beta\gamma)\gamma + + 2(k_2+1)(\alpha\gamma+1))x_1^{2N-3}x_2^{3k_2+4-N} = 0$$
$$\alpha\gamma(k_2+1) + \beta\gamma^2 + 2(k_2+1)(\alpha\gamma+1) = 0$$
$$\beta = -(k_2+1)\frac{3\alpha\gamma+2}{\gamma^2}.$$

Якщо це виконується, то коефіцієнт при мономі $x_1^{2N-3}x_2^{3k_2+4-N}$ в $\overline{D}^2(x_2)$ буде нульовим.

Розглянемо тепер коефіцієнт при мономі зі степенем $2N-4$ по x_1. Його отримуємо після:
1) $(N-2)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ до $x_2^{4k_2+3}$;
2) $(N-3)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ і однократного D_k до $x_1x_2^{3k_2+2}$ (в довільному порядку);
3) $(N-3)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ та однократного D_l до $x_1^2x_2^{2k_2+1}$ (в довільному порядку);
4) $(N-4)$-кратного застосування $\overline{D_v}$ та двократного D_k до $x_1^2x_2^{2k_2+1}$ (в довільному порядку).

У випадках 3), 4) з огляду на те, що степенем по x_2 є $2k_2+1$, на початку можемо застосувати D_v не більше ніж $2k_2+1$ разів.

Це випливає з мультистепенів D_k, D_l, D_u, D_v:
1) $2(N-2) = 0 + 2(N-2)$;
2) $2(N-2) = 1 + 2(N-3) + 1$;
3) $2(N-3) = 2 + 2(N-3) + 0$;
4) $2(N-2) = 2 + 2(N-4) + 2$.
Іншими способами отримати $2(N-2)$ неможливо.
У випадку 1) маємо

$$c_1 = \overline{D}_v^{N-2}(2(\alpha^2(k_2+1)-\beta)x_2^{4k_2+3}) = = \frac{(4k_2+3)!}{(4k_2+5-N)!}2(\alpha^2(k_2+1)-\beta)\gamma^{N-2}\times \times x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}.$$

У випадку 2) маємо

$$c_2 = \sum_{i=0}^{N-3}(\overline{D}_v^{N-3-i}(\overline{D}_k(\overline{D}_v^i(2((k_2+1)\alpha+\beta\gamma)\times \times x_1x_2^{3k_2+2})))) = \sum_{i=0}^{N-3}(\frac{(4k_2+2-i)!}{(4k_2+5-N)!}\gamma^{N-3-i}\times$$
$$\times(2k_2i+4i-5k_2-3)\frac{(3k_2+2)!}{(3k_2+2-i)!}\gamma^i 2((k_2+1)\alpha+\beta\gamma)\times \times x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}) = 2\gamma^{N-3}(k_2+1)\alpha+\beta\gamma)\times \times(\frac{(3-2N)(3k_2+2)!(4k_2+5-N)!}{(4k_2+5-N)!(3k_2+4-N)!} + + \frac{(4k_2+3)!(3k_2+4-N)!}{(4k_2+5-N)!(3k_2+4-N)!})x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}.$$

У випадку 3)

$$c_3 = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\overline{D}_v^{N-3-i}(\overline{D}_l(\overline{D}_v^i(2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\times \times x_1^2x_2^{2k_2+1})))) = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\frac{(4k_2+2-i)!}{(4k_2+5-N)!}\gamma^{N-3-i}\times \times(4k_2i+5i+2k_2+3)\alpha\frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+1-i)!}\gamma^i\times \times 2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}) = = 2\gamma^{N-3}\alpha(\alpha\gamma+1)\frac{(k_2+1)(6k_2+7)(4k_2+3)!}{(2k_2+3)(4k_2+5-N)!}\times \times x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}.$$

У випадку 4)

$$c_4 = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\sum_{j=0}^{N-4-i}(\overline{D}_v^{N-4-j-i}(\overline{D}_k(\overline{D}_v^j(\overline{D}_k(\overline{D}_v^i(2\times \times(k_2+1)(\alpha\gamma+1)x_1^2x_2^{2k_2+1})))))) = = \sum_{i=0}^{2k_2+1}(\sum_{j=0}^{N-4-i}(\frac{(4k_2+1-i-j)!}{(4k_2+5-N)!}\gamma^{N-4-i-j}\times \times(2k_2(i+j)-3k_2+1+4i+4j)\frac{(3k_2+1-i)!}{(3k_2+1-i-j)!}\times \times\gamma^j(2k_2i+4i-2k_2)\frac{(2k_2+1)!}{(2k_2+1-i)!}(2(k_2+1)(\alpha\gamma+1)\times \times x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}))) = = \frac{\gamma^{N-4}(1+\alpha\gamma)}{(2k_2+3)(4k_2+5-N)!(3k_2+4-N)!}\times \times((3k_2+2)!(4k_2+5-N)!(k_2+1)(-8N+12)(2k_2+3) + +(3k_2+4-N)!(4k_2+5)!(1+\alpha\gamma))x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}.$$

З того, що $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$, випливає:

$$\frac{\gamma^{N-4}x_1^{2N-4}x_2^{4k_2+5-N}}{(2k_2+3)(4k_2+5-N)!(3k_2+4-N)!}\times$$
$$\times((4k_2+3)!(2k_2+3)(3k_2+4-N)!2\gamma^2(\alpha^2(k_2+1)-\beta)+$$
$$+(3-2N)(3k_2+2)!(2k_2+3)(4k_2+5-N)!\times$$
$$\times 2(\alpha\gamma(k_2+1)+\beta\gamma^2)+(4k_2+3)!(2k_2+3)(3k_2+4-N)!\times$$
$$\times 2(\alpha\gamma(k_2+1)-\beta\gamma^2)+(4k_2+3)!(k_2+1)(6k_2+7)\times$$
$$\times(3k_2+4-N)!2\alpha\gamma(\alpha\gamma+1)+(3k_2+2)!(4k_2+5-N)!\times$$
$$\times(k_2+1)(-4)(2N-3)(2k_2+3)(1+\alpha\gamma)+$$
$$+(3k_2+4-N)!(4k_2+5)!(1+\alpha\gamma))=0,$$

тобто

$$(4k_2+3)!(3k_2+4-N)!((2k_2+3)2\gamma^2(\alpha^2(k_2+1)-\beta)+$$
$$+(2k_2+3)2(\alpha\gamma(k_2+1)+\beta\gamma^2)+$$
$$+(k_2+1)(6k_2+7)2\alpha\gamma(\alpha\gamma+1)+$$
$$+(4k_2+5)(4k_2+4)(1+\alpha\gamma))+$$
$$+(3k_2+2)!(4k_2+5-N)!(-2)(2N-3)(2k_2+3)\times$$
$$\times(\alpha\gamma(k_2+1)+\beta\gamma^2+2(k_2+1)(1+\alpha\gamma))=0.$$

Оскільки $\beta=-(k_2+1)\frac{3\alpha\gamma+2}{\gamma^2}$, то $\beta\gamma^2+3(k_2+1)\alpha\gamma+2(k_2+1)=0$, тому

$$2(k_2+1)((2k_2+3)\alpha^2\gamma^2+(2k_2+3)\alpha\gamma+$$
$$+((6k_2+7)\alpha\gamma+2(4k_2+5))(\alpha\gamma+1))=0,$$
$$(2k_2+3)\alpha\gamma(\alpha\gamma+1)+\alpha\gamma(\alpha\gamma+1)(6k_2+7)+$$
$$+(\alpha\gamma+1)(8k_2+10)=0,$$
$$(\alpha\gamma+1)((8k_2+10)\alpha\gamma+(8k_2+10))=0,$$
$$(\alpha\gamma+1)^2(8k_2+10)=0.$$

Звідси $\alpha\gamma+1=0$, тобто $\beta=\alpha^2(k_2+1)$, отже, знову $\overline{D}^2(x_2)=0$. Для цього випадку лема теж доведена.

Тому $\overline{D}$ набуває вигляду :

$$\left(x_1^2+2\alpha x_1x_2^{k_2+1}+\alpha^2x_2^{2k_2+2}\right)\times$$
$$\times\left((k_2+1)x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \quad (33)$$

Тепер локальна нільпотентність $\overline{D}$ випливає з того, що поліном $x_1+\alpha x_2^{k_2+1}$ належить ядру трикутного диференціювання $(k_2+1)x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Наступна теорема узагальнює отримані результати:

Теорема 5. *Чотирикореневі локально нільпотентні диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних після відповідного переіменування змінних з точністю до сталого множника мають форму:*

$$\left(x_1x_3^{m_3}+\alpha x_2^{k_2+1}\right)^2x_3^{n_3}\times$$
$$\times\left((k_2+1)x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{x_3^{m_3}}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad (34)$$

$$\left(x_1+\alpha x_2^{k_2+1}x_3^{m_3}\right)^2x_3^{n_3}\times$$
$$\times\left((k_2+1)x_2^{k_2}x_3^{m_3}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad (35)$$

де $m_3,n_3,k_2=0,1,2,\ldots,\alpha\in\mathbb{F}^*$
або

$$\left((k_2+1)x_1+\beta x_2^{k_2+1}\right)\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\alpha x_1^{v_1}x_2^{v_2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (36)$$

де $k_2,v_1,v_2=0,1,2,\ldots,\alpha,\beta\in\mathbb{F}^*$,
або

$$\left((k_2+1)x_1+\beta x_2^{k_2+1}\right)x_3^l\left(x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)+$$
$$+\alpha\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (37)$$

де $k_2,l=0,1,2,\ldots,\alpha,\beta\in\mathbb{F}^*$,
або є сумою чотирьох елементарних вигляду

$$\lambda_1x_2^{k_2}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1}+(\lambda_2x_1+\lambda_3x_3^{k_3+1})\frac{\partial}{\partial x_2}-$$
$$-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(k_3+1)\lambda_3}x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\text{де } k_2>0, k_3\geq 0, \lambda_i\in\mathbb{F}^*, \quad (38)$$

або є трикутним однієї з форм:

$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}+\lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\mu x_3^m\frac{\partial}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\lambda x_3^l+\mu x_3^m\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}+\lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3}+\mu x_2^{m_2}x_3^{m_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\nu x_3^n\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}+\lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\mu x_3^m+\nu x_3^n\right)\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\lambda x_3^l+\mu x_3^m+\nu x_3^n\right)\frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$\left(x_2^{k_2}x_3^{k_3}+\lambda x_2^{l_2}x_3^{l_3}+\mu x_2^{m_2}x_3^{m_3}+\nu x_2^{n_2}x_3^{n_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Доведення. Як уже зазначалося, чотирикореневе локально нільпотентне диференціювання може містити не більше двох кореневих, що не є елементарними. Вигляд диференціювань, в яких є рівно одне неелементарне, описано в наслідку 2. У випадку, коли є два неелементарних, маємо $D = D_k + D_l + D_u + D_v$, де доданки мають вигляд як у (26), (24), причому співвідношення (15) та (16) повинні виконуватися для мультистепенів мономів від трьох змінних. З іншого боку, з (33), отримуємо вигляд диференціювання алгебри поліномів від трьох змінних $D = D_k + D_l + D_u + D_v$:

$$D_k = (k_2+1)x_1^2 x_2^{k_2} x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_1} - 2x_1 x_2^{k_2+1}x_3^{k_3}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$D_l = \alpha(2k_2+2)x_1 x_2^{2k_2+1}x_3^{l_3}\frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha x_2^{2k_2+2}x_3^{l_3}\frac{\partial}{\partial x_2};$$

$$D_u = \beta x_2^{3k_2+2}x_3^{u_3}\frac{\partial}{\partial x_1},\quad D_v = \gamma x_1^2 x_3^{v_3}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

$$D = \left(x_1 x_3^{q_1} + \alpha x_2^{k_2+1}x_3^{q_2}\right)^2 \times \\ \times\left((k_2+1)x_2^{k_2}x_3^{q_3}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3^{q_4}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Тут $k_3 = 2q_1 + q_3 = q_1 + q_2 + q_4, l_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 2q_2 + q_4, u_3 = 2q_2 + q_3, v_3 = 2q_1 + q_4$. Звідси, $q_1 + q_3 = q_2 + q_4$. Можна побачити, що співвідношення (15) та (16) виконуються для k_3, l_3, u_3, v_3.

Якщо $k_3 \geq l_3$, то отримуємо $q_1 \geq q_2, q_4 \geq q_3$,

$$D = \left(x_1 x_3^{q_1-q_2} + \alpha x_2^{k_2+1}\right)^2 x_3^{2q_2+q_3} \times \\ \times\left((k_2+1)x_2^{k_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3^{q_4-q_3}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Позначивши $m_3 = q_1 - q_2 = q_4 - q_3 = k_3 - l_3$, $n_3 = q_2^2 q_3$, отримуємо (34).
Якщо $k_3 < l_3$, то отримуємо $q_1 < q_2, q_4 < q_3$,

$$D = \left(x_1 + \alpha x_2^{k_2+1}x_3^{q_2-q_1}\right)^2 x_3^{2q_1+q_4} \times \\ \times\left((k_2+1)x_2^{k_2}x_3^{q_3-q_4}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Позначивши $m_3 = q_2 - q_1 = q_3 - q_4 = l_3 - k_3$, $n_3 = q_1^2 q_4$, отримуємо (35).

Випадки, коли в D менше двох неелементарних диференціювань, розглянуто в лемі (2).

У випадку, якщо D має трикутний вигляд, ми з точністю до перейменування змінних отримаємо одну з форм, заданих у теоремі.

1. Rentschler R. Operations du groupe additif sur le plan affine / R. Rentschler // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A. — 1968. — V. 267. — P. 384–387.
2. van den Essen A. Automorphisms and the Jacobian Conjecture / A. van den Essen // Progress in Mathematics. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2000. — V. 190. — 329 p.
3. Freudenburg R. Algebraic theory of locally nilpotent derivations / R. Freudenburg. — Springer Verlag (Berlin, Heidelberg, New York), 2006. — 261 p.
4. Makar-Limanov L. Locally nilpotent derivations, a new ring invariant and applications / L. Makar-Limanov. Lecture notes. — Режим доступу: www.math.wayne.edu/ lml/lmlnotes.pdf.
5. Shestakov I. The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables / I. Shestakov, U. Umirbaev // Journal of the American Mathematical Society. — 2004. — V. 17. — PART 1. — P. 197–228.
6. Bodnarchuk Yu. Root locally nilpotent derivations of polynomial algebras / Yu. Bodnarchuk // Abstracts of 6-th International Algebraic Conference in Ukraine, Kamyanets-Podilsky, «Кам'янець-Подільський університет», 2007. — P. 39–40.
7. Bodnarchuk Yu. Locally nilpotent polynomial derivations which are a sum of several root ones/ Yu. Bodnarchuk // Abstracts of International Conference «Transformation Groups» dedicated to the 70-th anniversary of E. B. Vinberg. — Moscow.: «Московское математическое общество», 2007. — P. 22–23.
8. Боднарчук Ю. В. Локально нільпотентні диференціювання та автоморфізми Нагатівського типу алгебри поліномів/ Ю. В. Боднарчук, П. Г. Прокоф'єв // Український математичний журнал. — 2009. — Т. 61. — С. 1011–1024.

P. Prokofiev

LOCALLY NILPOTENT DERIVATIONS OF POLINOMIAL ALGEBRA IN THREE VARIABLES WHICH ARE SUMS OF FOUR $\mathbb{Z}^3$-HOMOGENEOUS

Locally nilpotent derivations (LND) of polynomial algebra are a source of numerous exotic examples of automorphisms of affine space. We can mention Nagata's and Anick's automorphisms among most important.

Taking into consideration natural $\mathbb{Z}^3$-grading on the algebra of polynomial differential operators we can put such question: what kind of homogeneous summands should we take in order to get LND as their sum. This task includes problem of characterization of Newton polygons of LND.

The aim of this work is to describe all LND of polynomial algebra in three variables which are sums of four $\mathbb{Z}^3$-homogeneous.

Keywords: locally nilpotent derivations, homogeneous derivations, Newton polygons.