

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет  
"Києво-Могилянська Академія"

Факультет інформатики  
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота  
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **Властивості графа ідеального перетину  
кільця  $Zn$**

Виконала: студентка 4-го року навчання,  
Освітньої програми «Прикладна математика», 113

Утенко Єлізавета Олександрівна

Керівник: Олійник Б.В., проф., д. ф.-м. наук

Рецензент \_\_\_\_\_

Кваліфікаційна робота захищена з оцінкою

Секретар \_\_\_\_\_ ЕК \_\_\_\_\_

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

Київ, 2023 р.

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Необхідні визначення, а також відомі рівняння та нерівності</b>	<b>4</b>
1.1 Граф. Прості графи . . . . .	4
1.2 Кільця, кільце $Z_n$ . Ідеали . . . . .	5
1.3 Діаметр. Триаметр. Розбиття на рівні. . . . .	7
1.4 Ексцентриситет. Центр графу . . . . .	8
1.5 Хроматичне число . . . . .	9
<b>2 Властивості графу ідеалів <math>Z_n</math></b>	<b>10</b>
<b>Висновки</b>	<b>14</b>
<b>Література</b>	<b>15</b>

# Вступ

Теорія графів розділ математики, що активно розвивається в сучасному світі. Він знаходить застосування в галузях робототехніки, нейронних мереж, хімії, фармацевтиці тощо. Дослідження теорії графів зосереджені також на вивченні властивостей графів, які характеризують різні математичні об'єкти. Наприклад, кільця характеризуються графами дільників нуля кільця. Для характеристизації груп використовують графи Келлі і графи Шраєра. Описуючи властивості графів, пов'язаних з кільцями, можна охарактеризувати комбінаторні властивості кільця, що, у свою чергу, допомагає краще описати їх структуру [4].

Граф перетину ідеалів кільця — це схема перетину класів еквівалентності, де вершини являють собою ідеали. Ці графи цікаві математикам, а також корисні для побудови моделі технічних і соціальних процесів та пошуку оптимальних рішень. Створення таких графів базується на пошуку найкоротших шляхів [6, 7, 8, 9].

Метою даної дипломної роботи є дослідження властивостей графа перетину ідеалів кільця  $Z_n$  цілих чисел за модулем  $n$ . Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів та висновків. Перший розділ охоплює всі необхідні для побудови графа визначення та властивості. У другому розділі описано властивості графа перетину ідеалів кільця  $Z_n$ . А саме, охарактеризовано кліку, триметр, ексцентриситет та хроматичне числа графу. Наведено приклади.

# Розділ 1

## Необхідні визначення, а також відомі рівняння та нерівності

### 1.1 Граф. Прості графи

**Означення 1.1.1.** [1] Загальним неорієнтованим графом називається сукупність  $G = (V, E, L, \delta_E, \delta_L)$ , яка складається з трьох множин:  $V$  — множина вершин (*vertexes*),  $E$  — множина ребер (*edges*),  $L$  — множина петель (*loops*), та відображень:

$$\delta_E : E \rightarrow C_V^2$$

(множина двоелементних підмножин множини  $V$ ),

$$\delta_L : L \rightarrow V.$$

Якщо існують пари вершин  $v_1, v_2$ , для яких існують  $m$  ребер  $e$  таких, що  $\delta(e) = v_1, v_2$  і  $m > 1$ , то говоримо про наявність кратних ребер. Іноді говорять, що вершини  $v_1, v_2$  мають спільне ребро кратності  $m$ .

**Означення 1.1.2.** Простий граф  $G = (V, E)$  можна визначити як множину вершин  $V$  і множину ребер  $E$ , яка є підмножиною двоелементної підмножини вершин, тобто  $E \subseteq C_V^2$ .

**Означення 1.1.3.** Припустимо, що  $G$  є загальним неорієнтованим графом, а пара вершин  $v_1, v_m$  та скінченна послідовність ребер  $e_1, e_2, \dots, e_m$  — маршрут (шлях) між вершинами  $v_1, v_m$ , якщо  $v_1$  інцидентна  $e_1$ ,  $v_m$  інцидентна  $e_m$ , а послідовні пари ребер  $e_{i-1}, e_i$  є суміжними для довільного  $i : 1 < i \leq m$ . Початком маршруту є вершина  $v_1$ , а  $v_m$  — його кінцем.

Довжиною найкоротшого шляху, що з'єднує вершини  $v$  та  $u$  є кількість ребер в цьому шляху.

**Означення 1.1.4.** [10] Відстань  $d(u, v)$  між будь-якими двома вершинами  $u$  і  $v$  в графі  $G$  визначається, як довжина найкоротшого шляху, що їх з'єднує.

**Означення 1.1.5.** [11] Множина  $T \in V(G)$  називається метричним генератором для  $G$ , якщо будь-яка пара вершин  $G$  розділяється деяким елементом з множини  $T$ , тобто для довільних  $u$  і  $v$  графа  $G$  існує вершина  $s$  з  $T$  така, що виконується нерівність  $d(u, s) \neq d(v, s)$ .

**Означення 1.1.6.** Метричним базисом є метричний генератор графа  $G$ , що має найменшу кількість вершин.

Метричні базиси зазвичай використовуються у задачах перевірки ізоморфності графів, пошуку підпростору, ізометричного даному, робототехніці тощо.

**Означення 1.1.7.** Кількість вершин у метричному базисі називається метричною розмірністю графа  $G$  і позначається  $\dim(G)$ .

## 1.2 Кільця, кільце $Z_n$ . Ідеали

Спочатку нагадаємо означення кільця.

**Означення 1.2.1.** [2] Кільце – це непорожня множина  $R$  з двома бінарними операціями на ній: додаванням і множенням (позначаються як “+” і “·” відповідно), що задовольняє таким умовам:

1) для довільних  $x, y, z \in R$   $(x + y) + z = x + (y + z)$  (асоціативність додавання);

2) для довільних  $x, y \in R$   $x + y = y + x$  (комутативність додавання);

3) існує такий елемент  $0 \in R$  (його називають нулем кільця), що для довільного елемента  $x \in R$   $x + 0 = x$  (існування нуля);

4) для довільного елемента  $x \in R$  існує елемент  $y \in R$  (його називають протилежним до  $x$  і позначають  $-x$ ) такий, що  $x + y = 0$  (існування протилежного елемента);

5) для довільних  $x, y, z \in R$   $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  (асоціативність множення);

6) для довільних  $x, y, z \in R$   $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  і  $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$  (дистрибутивність множення відносно додавання зліва і справа).

Розглянемо множину класів лишків  $Z_n = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$  з дією додавання і множення класів лишків  $Z_n^* = \{\bar{i} \mid (i, n) = 1\}$  з дією множення. Вони будуть утворювати відповідно адитивну і мультиплікативну групи. Ці групи є абелевими і називаються групами класів лишків.

**Означення 1.2.2.** [3] Підмножина  $I \subset K$  називається ідеалом, якщо виконуються наступні властивості:

$$1) a, b \in I \Rightarrow a + b \in I;$$

$$2) a \in I, b \in K \Rightarrow a \cdot b \in I, b \cdot a \in I.$$

У графі ідеального перетину ненульові ідеали кільця є вершинами графа.

**Приклад 1.2.1.** В  $Z_{18}$  входять ідеали:  $\langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 9 \rangle$ .

**Означення 1.2.3.** [4] Для комутативного кільця  $R$ , граф ідеального перетину – це простий граф, вершини якого ненульові ідеали кільця і дві вершини (ідеали) суміжні, якщо їх перетин також ненульовий ідеал кільця.

**Позначення:**  $G(R)$  – граф ідеального перетину;  $P(n)$  – набір всіх простих чисел, які використовуються для розкладу  $n$  (якщо  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , то  $P(n) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ ).

**Лема 1.2.1.** [4] Для будь-якого додатнього цілого числа  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , кожен ідеал кільця  $Z_n$  має вигляд

$$I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle,$$

де  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ .

Тобто, якщо  $I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle$ , то число  $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r}$  є дільником  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ .

**Приклад 1.2.2.** Для  $Z_{18}$ :  $18 = 2 \cdot 3^2$  – будь-який дільник  $2^a \cdot 3^b$  буде породжувати ідеал  $\langle 2^a \cdot 3^b \rangle$ , де  $a \in \{0, 1\}$ ,  $b \in \{0, 1, 2\}$ .

**Лема 1.2.2.** [4] Для  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , у графі ідеального перетину  $G(Z_n)$  кількість вершин дорівнює

$$\prod_{1 \leq i \leq r} (\alpha_i + 1) - 2$$

*Доведення.* З Лема 1.2.1, для кожного ідеалу  $I$  кільця  $Z_n$  виконується наступне:

$$I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle,$$

де  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ , тоді маємо

$$\prod_{1 \leq i \leq r} (\alpha_i + 1)$$

ідеалів. Нехай  $\beta_i$  та  $\alpha_i$  рівні при  $i = 0, 1, \dots, r$ , тоді  $I = \langle 0 \rangle$ , а при  $\beta_i = 0$ ,  $I = Z_n$ . Припускаючи, що граф  $G(Z_n)$  має ненульові вершини, то їх кількість можна порахувати за формулою

$$\prod_{1 \leq i \leq r} (\alpha_i + 1) - 2.$$

□

### 1.3 Діаметр. Триаметр. Розбиття на рівні.

7

**Означення 1.3.1.** Діаметром  $\text{diam}(G)$  графа  $G$  називається максимальна відстань між вершинами в графі:

$$\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}.$$

**Означення 1.3.2.** [5] Триаметром простого графа  $G$  є параметр

$$\text{tr}(G) = \max\{d(a, b) + d(a, c) + d(b, c) : a, b, c \in V(G)\},$$

де  $d$  – найкоротший шлях між заданими вершинами.

**Означення 1.3.3.** [4] Для будь-якого ідеалу  $I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle$  кільця  $Z_n$  з  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , визначаємо набір  $L(I) = \{p_i : \beta_i = \alpha_i\}$ , який називається набір рівнів для  $I$ . Також визначаємо рівень  $L'(I) = \{p_i : \beta_i \neq \alpha_i\}$ . Очевидно, що для ідеалу  $I$ ,  $L(I) \subset P(n)$  і  $L'(I)$  – доповнення до  $L(I)$  в  $P(n)$ , тоді

$$L(I) \cup L'(I) = P(n)$$

$i$

$$L(I) \cap L'(I) = \emptyset.$$

**Лема 1.3.1.** [4] Для будь-яких двох ідеалів  $I$  та  $J$  кільця  $Z_n$ ,  $L(I \cap J) = L(I) \cup L(J)$

*Доведення.* Опіраючись на Лему 1.2.1, маємо  $I = \langle p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\beta_r} \rangle$  і  $J = \langle p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\gamma_r} \rangle$ . Тоді  $I \cap J = \langle p_1^{\max\{\beta_1, \gamma_1\}}, p_2^{\max\{\beta_2, \gamma_2\}}, \dots, p_r^{\max\{\beta_r, \gamma_r\}} \rangle$ . З означення 1.3.3.,  $L(I \cap J) = \{p_i : \max\{\beta_i, \gamma_i\} = \alpha_i\} = \{p_i : \text{або } \beta_i = \alpha_i \text{ або } \gamma_i = \alpha_i\} = L(I) \cup L(J)$ .  $\square$

**Теорема 1.3.1.** [4] Дві вершини  $I$  та  $J$  в  $G(Z_n)$  не суміжні тоді і тільки тоді, якщо

$$|L(I \cap J)| = r.$$

**Наслідок 1.3.1.** [4] Дві вершини  $I$  та  $J$  в  $G(Z_n)$  суміжні тоді і тільки тоді, якщо

$$|L(I \cap J)| < r.$$

**Наслідок 1.3.2.** Кожна вершина, сформована ідеалом з класу нульового рівня – суміжна до будь-якої з вершин графу  $G(Z_n)$ .

**Приклад 1.3.1.** Для  $Z_{84}$ :  $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$P(n) = \{2, 3, 7\}$$

$$\langle 2 \rangle = I_2 \rightarrow L(I_2) = \emptyset$$

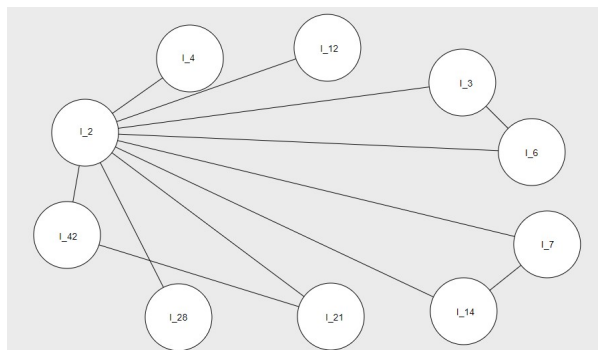


Рис. 1.1: Граф ідеального перетину

$$\langle 3 \rangle = I_3 \rightarrow L(I_3) = \{3\}$$

$$\langle 4 \rangle = I_4 \rightarrow L(I_4) = \{2\}$$

$$\langle 6 \rangle = I_6 \rightarrow L(I_6) = \{3\}$$

$$\langle 7 \rangle = I_7 \rightarrow L(I_7) = \{7\}$$

$$\langle 12 \rangle = I_{12} \rightarrow L(I_{12}) = \{2, 3\}$$

$$\langle 14 \rangle = I_{14} \rightarrow L(I_{14}) = \{7\}$$

$$\langle 21 \rangle = I_{21} \rightarrow L(I_{21}) = \{3, 7\}$$

$$\langle 28 \rangle = I_{28} \rightarrow L(I_{28}) = \{2, 7\}$$

$$\langle 42 \rangle = I_{42} \rightarrow L(I_{42}) = \{3, 7\}$$

Класи еквівалентності:

Клас 1:  $I_2$ .

Клас 2:  $I_4$ .

Клас 3:  $I_3, I_6$ .

Клас 4:  $I_7, I_{14}$ .

Клас 5:  $I_{21}, I_{42}$ .

Клас 6:  $I_{12}$ .

Клас 7:  $I_{28}$ .

Спираючись на попередні лєми та наслідки, отримали граф, зображений на Рис. 1.1.

## 1.4 Ексцентриситет. Центр графу

**Означення 1.4.1.** Ексцентриситет вершини  $v$  у неорієнтованому графі  $G$  визначається як максимальна відстань між  $v$  та будь-якою іншою вершиною в  $G$ . Тобто, це найбільша кількість ребер, які необхідно пройти, щоб дістатися від  $v$  до будь-якої іншої вершини в графі.

Ексцентриситет вершин  $v$  можна позначити, як:

$$ecc(v) = \max\{d(v, u) : u \in G\}$$



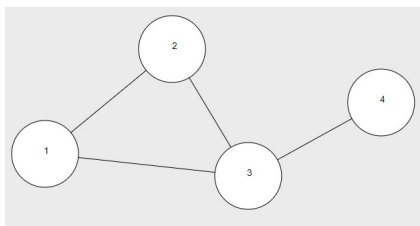


Рис. 1.2: Граф-простий цикл

**Означення 1.4.2.** [10] *Центр графа – множина центральних вершин, тобто вершин з мінімальним ексцентриситетом.*

**Приклад 1.4.1.** *Якщо розглянемо в уніциклячному графі на Рис. 1.2 вершину 3, то ексцентриситет буде 1, для всіх інших вершин ексцентриситет буде 2. Центром є вершина 3.*

## 1.5 Хроматичне число

**Означення 1.5.1.** [1] *Хроматичним числом графа  $G$  називається мінімальна кількість фарб, яку потрібно використати для розфарбування графа так, щоб довільні дві його суміжні вершини були розфарбовані різними кольорами.*

*Позначається  $\chi(G)$ .*

**Приклад 1.5.1.** *Для уніциклячного графа на Рис. 1.2 достатньо три кольори, оскільки вершина 3 є вершиною степеня 4 і вершини 1 і 2 з'єднані між собою ребром.*

## Розділ 2

### Властивості графу ідеалів $Z_n$

Для початку згадаємо означення кліки графа.

**Означення 2.0.1.** Повний підграф графа з максимальною кількістю вершин називається клікою графа.

**Теорема 2.0.1.** Для графу  $G(Z_n)$  справджуються наступні властивості:

- 1) Діаметр графу  $G(Z_n) \leq 2$ .
- 2) Для двох ідеалів  $I_1 \in [I]$  і  $J_1 \in [J]$  з кожної відмінної пари класів  $[I]$  та  $[J]$   $d(I_1, J_1) = 1$  тоді і тільки тоді, коли  $d(I, J) = 1$  і  $d(I_1, J_1) = 2$ , тоді і тільки тоді, коли  $d(I, J) = 2$ .
- 3) Всі класи ідеалів  $[I]$  формують повний підграф в графі  $G(Z_n)$ .

*Доведення.* 1) Відстань між двома довільними вершинами графу ідеалів  $Z_n$  ніколи не перевищуватиме двох. Як вже згадувалося вище, вершини нульового класу з'єднані з усіма іншими вершинами, тоді будь-які дві вершини  $u$  і  $v$  графа  $G$  або будуть з'єднані ребром, або існуватиме вершина  $s$  нульового рівня, з'єднана ребром з  $u$  і  $v$ . Отже, відстань між цими вершинами менше або рівна 2. Опіраючись на те, що вершини обиралися довільно, то діаметр графа не більше 2. В прикладі 2.0.1 розглянуто випадок, коли діаметр графа строго менший 2.

Варто зауважити, що якщо класів еквівалентності більше трьох, то в графі перетину ідеалів  $Z_n$  є такі вершини, які не з'єднані ребром. Тоді діаметр графу  $G(Z_n) = 2$ .

2) Оскільки в пункті вище діаметр графу ідеалів не перевищує 2, то  $d(I, J) = 1$  або  $d(I_1, J_1) = 2$ .

3) З Лема 1.2.1 кожна пара вершин з одного класу еквівалентності з'єднані ребрами, а отже, кожен клас ідеалів  $I$  визначає повний підграф в графі  $G(Z_n)$ .  $\square$

**Приклад 2.0.1.** Для  $Z_{16}$ :  $16 = 2^4$

$$P(n) = \{2\}$$

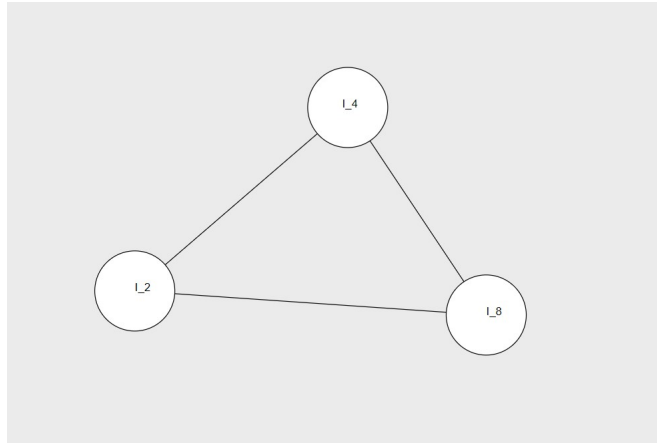


Рис. 2.1: Граф перетину ідеалів

$$\langle 2 \rangle = I_2 \rightarrow L(I_2) = \emptyset$$

$$\langle 4 \rangle = I_4 \rightarrow L(I_4) = \emptyset$$

$$\langle 8 \rangle = I_8 \rightarrow L(I_8) = \emptyset$$

Класи еквівалентності:

Клас 1:  $I_2, I_4, I_8$ . Спираючись на попередні лема та наслідки, отримали граф, зображений на Рис. 2.1.

**Твердження 2.1** Нехай  $L_i$  є класом ідеалів кільця  $Z_n$ , що визначає підграф в графі перетину ідеалів з максимальною кількістю вершин. Тоді максимальною клікою графу перетину ідеалів  $Z_n$  буде  $L_i \cup L_0$ .

*Доведення.* Опираючись на попередню лему, можемо стверджувати, що повний підграф в графі ідеального перетину  $Z_n$  формується вершинами одного класу. Варто пам'ятати, що довільна вершина з класу нульового рівня з'єднана з будь-якою вершиною. А отже, всі вершини з  $L_i \cup L_0$  формуватимуть повний підграф і при умові, що  $L_i$  міститиме максимальну кількість вершин, це буде максимальна кліка.  $\square$

**Лема 2.0.1.** Якщо в графі перетину ідеалів кільця  $Z_n$  існують вершини, що не з'єднані між собою (тобто вони належать до різних ненульових класів еквівалентності), то

$$tr(G) = 6$$

У випадку, якщо таких вершин не існує, то

$$tr(G) < 6$$

*Доведення.* Якщо  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$  розкладається на 3 і більше чисел, то матимемо 3 і більше класів еквівалентності, а значить, існуватимуть 3 точки, що не з'єднані між собою. Вони матимуть максимально можливу відстань

один між одним, яка, опираючись на Теорему 2.0.1, дорівнює 2. А отже, сума

$$\begin{aligned} tr(G) &= \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\} = \\ &= tr(G) = 2 + 2 + 2 = 6. \end{aligned}$$

За умовою, якщо не існує вершин, які попарно не з'єднані між собою, то триа́метр графа дорівнюватиме 3 або 4:

1) Якщо маємо граф, який є зв'язним (тобто граф має лише один клас еквівалентності), то найкоротші відстані між цими вершинами дорівнюватимуть 1. А отже, сума  $tr(G) = \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\} = tr(G) = 1 + 1 + 1 = 3$ . Виконується для прикладу, розглянутому вище для кільця  $Z_{16}$ .

2) Якщо маємо граф, у якого крім нульового класу еквівалентності є також інші, проте не існує трьох вершин, які належать до різних класів еквівалентності, то відстань між двома вершинами, які не є з'єднаними дорівнюватиме 2 (максимальна можлива відстань). А отже, сума  $tr(G) = \max\{d_G(a, b) + d_G(a, c) + d_G(b, c) : a, b, c \in V(G)\} = tr(G) = 1 + 1 + 2 = 4$ .

□

**Теорема 2.0.2.** Для будь-якого додатнього цілого числа  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ , при  $k \geq 3$ ,  $tr(G) = 6$ . Інакше,  $tr(G) < 6$ .

*Доведення.* Якщо  $n$  розкладається на 3 і більше чисел, то матимемо 3 і більше класів еквівалентності, а значить, існуватимуть 3 точки, що не з'єднані між собою. □

**Лема 2.0.2.** Центральними вершинами в графі перетину іделів кільця  $Z_n$  є ідеали нульового класу.

*Доведення.* Оскільки вершини нульового рівня з'єднані з усіма іншими вершинами, то вони є вершинами з мінімальним ексцентриситетом. А тому, ідеали нульового класу, як впливає з Означення 1.4.2, є центрами.

Оскільки з Теорема 2.0.1 відстань у графі перетину іделів кільця  $Z_n$  може набувати значень 1 або 2, то ексцентриситет може набувати значень 1 або 2. Тоді маємо:

$$ecc_{min} = 1$$

Оскільки вершини, сформовані ідеалами нульового класу з'єднані ребром з усіма вершинами графу та між собою, то їх ексцентриситет дорівнюватиме 1, що і буде  $ecc_{min}$ . З означення центру можемо зробити висновок, що ідеали нульового класу є центрами. □

**Лема 2.0.3.** Хроматичне число графа ідеального перетину кільця  $Z_n$  дорівнює сумі кількості елементів нульового класу еквівалентності та класу з найбільшою кількістю елементів.

*Доведення.* 1) Оскільки вершини нульового класу еквівалентності з'єднані з усіма вершинами та між собою, то очевидним буде припустити, що всі ці вершини треба розфарбовувати у різні кольори (адже вони суміжні один для одної).

2) Оскільки вершини одного класу (з найбільшою кількістю елементів) з'єднані між собою та з вершинами нульового класу, то їх треба розфарбувати у різні кольори, щоб клас з меншою кількістю елементів можна було розфарбувати використовуючи кольори даного класу (оскільки вершини різних класів, які не є нульовими, не будуть суміжними).

Для інших вершин можна використати кольори, якими розфарбований клас з найбільшою кількістю вершин, оскільки різні класи, окрім нульового, мають несуміжні вершини з вершинами інших класів. (Дивитися Рис.1.1).

□

**Твердження 2.2** Нехай  $v$  вершина в графі  $G$  перетину іделів кільця  $Z_n$ . Тоді ексцентриситет вершини  $v$  в графі  $G$  дорівнює 1, якщо це вершина нульового рівня або  $n$  має не більше двох простих дільників, і 2 в іншому випадку.

## Висновки

Дипломну роботу присвячено дослідженню графу перетину ідеалів кільця  $Z_n$  цілих чисел за модулем  $n$ . Графом перетину ідеалів  $G(R)$  називається простий граф, вершинами якого є ненульові ідеали кільця і дві вершини суміжні, лише коли їхнім перетином є ненульовий ідеал кільця. В роботі показано, що

- Якщо число  $n$  є добудком більше ніж двох простих чисел, то триамер графа  $tr(G)$  перетину ідеалів кільця  $Z_n$  дорівнює 6.
- Охарактеризовано кліку цього графу.
- Доведено, що центральними вершинами графа є вершини нульового рівня.
- Показано, що ексцентриситет довільної вершини  $v$  графу перетину ідеалів кільця  $Z_n$  завжди дорівнює або 1, або 2.
- Доведено, що хроматичне число цього графа дорівнює сумі кількості елементів нульового рівня та рівня з найбільшою кількістю вершин.
- Наведено приклади.

Перший розділ охоплює всі необхідні для побудови графа визначення та властивості. У другому розділі показано, що діаметр графа  $G(Z_n)$  не перевищує 2, причому дорівнює 2, якщо класів еквівалентності більше трьох. Описано максимальну кліку графу ідеального перетину  $Z_n$ , охарактеризовано триамер графа  $G(Z_n)$ , його ексцентриситет та центри, а також торкається тема хроматичного числа графа  $G(Z_n)$ .

Результати роботи доповідались на 11-ій Всеукраїнській Науковій конференції молодих математиків [12].

## Література

- [1] Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В.: Основи дискретної математики // Теорія графів, Р.7 , с.111-116, 2007
- [2] Кудрявцева Г.М., Олійник А.С.: Кільця. Приклади і задачі // Кільця та підкільця, Р.1, с.5, 2005
- [3] <https://amatematika.xyz/uk/lecture/11-ideali-kilec/text> Ідеали кілець.
- [4] Laxman Saha, Mithun Basak Kalishankar Tiwary (2021) Metric dimension of ideal-intersection graph of the ring  $Z_n$ , AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 18:2, 101-105
- [5] Artem Hak, Sergiy Kozerenko, Bogdana Oliynyk: Discrete Applied Mathematics // A note on the triameter of graphs, p.278-279.
- [6] Kiani, Dariush, and Mohsen Mollahajjaghaei. "On the unitary Cayley graphs of matrix algebras." Linear Algebra and its Applications 466 (2015): 421-428.
- [7] Klotz, Walter, and Torsten Sander. "Some properties of unitary Cayley graphs." the electronic journal of combinatorics (2007): R45-R45.
- [8] Maimani, H. R., et al. "Graphs attached to rings revisited." Arabian Journal for Science and Engineering 36.6 (2011): 997-1011.
- [9] Anderson, David F., and Ayman Badawi. "The total graph of a commutative ring." Journal of algebra 320.7 (2008): 2706-2719.
- [10] Kuzmenko I. Graph theory (2020): 12.
- [11] András Sebő and Eric Tannier. "On Metric Generators of Graphs". Journal article (May, 2004): 383-393.
- [12] Утенко Є.О. Тези на тему "Властивості графу ідеалів  $Z_n$ "