Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Кафедра інформатики факультету інформатики

Курсова робота на тему:
Реберні та тотальні розфарбування графів

Керівник курсової роботи:
к. ф.-м. н. *Козеренко С.О.*
(прізвище та ініціали)

____
(підпис)
"_____"______________________ 2021 р.

Виконав студент
3-го року навчання спеціальності
"Комп'ютерні науки"
Декрет Владислав Володимирович
(ПІБ)

Київ – 2021

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ”

Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф. д,ф-м.н.
__________________ Б.В. Олійник
(підпис)
“____”__________________ 2021 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу
студенту 3-го курсу факультету інформатики
Декрет Владиславу Володимировичу

Тема: Реберні та тотальні розфарбування графів.
Вихідні дані: Досліджено властивості реберного та тотального розфарбування графів.
Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання
1 Анотація
2 Вступ
3 Основні означення та попередні результати
4 Основні результати
5 Висновки
Література

Дата видачі “____”__________ 2021 р. Керівник ______________________
(підпис)
Завдання отримав ______________
(підпис)

Тема: Реберні та тотальні розфарбування графів.
Календарний план виконання роботи:

Номер	Назва етапу курсової	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання теми курсової роботи.	17.10.2020	
2.	Ознайомлення з темою курсової.	19.10.2020	
3.	Розробка плану та структури роботи.	19.10.2020	
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень теорії графів.	07.11.2020	
5.	Дослідження основних властивостей реберного розфарбування графів	21.11.2020	
6.	Дослідження основних властивостей тотального розфарбування графів	07.02.2021	
7.	Робота над текстовим оформленням результатів.	05.03.2021	
8.	Попередній аналіз курсової. Виправлення помилок.	01.05.2021	

Зміст

1 Анотація

У даній курсовій роботі розглядаються та аналізується реберні та тотальні розфарбування графів. Розглянуто теореми та їх наслідки з цієї тематики, зокрема основна теорема Візінга. Дослідженно реберне хроматичне число для різних типів графів: Петерсена, повного, двочасткового, дерева.

2 Вступ

Теорія графів має широке застосування в усьому світі: в фізиці, економіці, соціології, лінгвістиці тощо. Широко використовується в задачах вираховуючих комп'ютерів.

Починаючи з проблеми чотирьох кольорів у 1852 р., проблема розфарбування графів стала однією з найпопулярніших напрямків теорії графів. Завдяки розфарбуванню графів можна вирішити проблеми програмування, політики, біології, екології тощо.

Ця тематика має багато недосліджених гіпотез, які досліджуються математиками сьогодення. Є багато недоведених гіпотез, зокрема гіпотези тотального графу чи проблеми Візінга. Це водночас і складна, і дуже цікава складова теорії графів.

Ця робота описує реберні та тотальні розфарбування графів, що є менш дослідженною частиною проблеми розфарбування графів, чим розфарбування вершин.

Основною задачею було визначити хроматичний індекс для усіх графів, та різних типів зокрема.

Дана робота складається з 3 розділів. У першому розділі моєї роботи представлено основні означення і твердження, серед яких необхідна термінологія для розуміння роботи. Також представлено різні типи графів, які ми будемо дослуджувати пізніше.

У другому розділі розглядаються основні теореми реберного розфарбування та їх доведення. Також розглядається гіпотеза та теореми про тотальне розфарбування графу.

У третьому розділі представлене дослідження реберного хроматичного числа для графа Петерсена, повного, двочасткового та дерева.

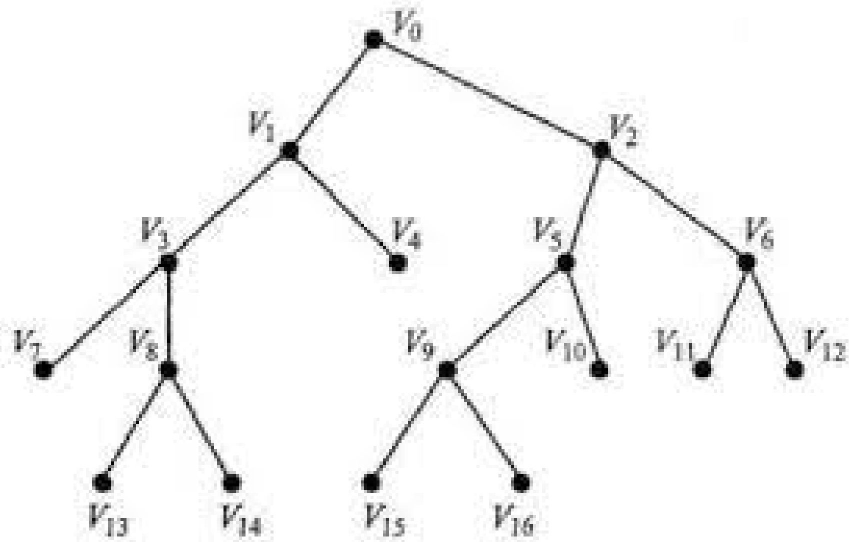

Рис. 1:

3 Основні означення та попередні результати

3.1 Означення

Граф - це впорядкована пара $G = (V, E)$, де V - непорожня скінченна **множина вершин** графа G і E - множина пар різних елементів V, яка є **множиною ребер** графа G.

Неорієнтований граф - це граф, ребра якого не мають напрямок, тобто не вказано початок (кінець).

Шлях або маршрут графу - це послідовність вершин множини V, які з'єднуються ребрами множини E.

Зв'язний граф - це граф, між кожною вершиною якого існує шлях.

Суміжні вершини - це вершини, які зв'язані одним ребром.

Суміжні ребра - це ребра, які мають спільну вершину.

Маршрут називається **ланцюгом**, якщо всі його ребра різні.

Маршрут називається **замкнутим**, якщо кінцева вершина співпадає з початковою.

Замкнений ланцюг називається **циклом**.

Дерево - зв'язний граф без циклів (Рис 1).

Граф G' називається **підграфом** графу G, якщо множина ребер G' є підмножиною множини ребер G, аналогічно множина вершин G' має бути підмножиною множини вершин G.

Степінь вершини - це кількість суміжних до неї вершин.

Максимальна степінь графа - це максимальне число степені вершин графа.

Вершинне розфарбування графа - це призначення кольорів вершинам неорієваного графа за таким правилом, що ніякі два суміжні вершини не мають однаковий колір.

Реберне розфарбування графа - це призначення кольорів ребрам неорієваного графа за таким правилом, що ніякі два суміжних ребра не мають однаковий колір.

Реберним графом графа G називають граф G', вершинами якого є ребра графа G, а ребрами - вершини. Реберний граф дозволяє перетворювати реберне розфарбування графу G на вершинне розфарбування реберного графу G' графа G.

Тотальне розфарбування графа - це призначення кольорів вершинам та ребрам неорієваного графа за таким правилом, що немає суміжних ребер та вершин на кінцях ребер, які розфарбовані в один і той же колір.

Тотальним графом графа G називають граф G', вершинами якого є вершини та ребра графа G, а ребрами - їх суміжність. Тотальний граф дозволяє перетворювати тотальне розфарбування графу G на вершинне розфарбування тотального графу G' графа G.

Хроматичне число графа - це найменше число кольорів, необхідне для повного розфарбування графу. Позначається грецьким χ для вершинного, χ' - реберного, χ'' - тотального.

Графом Петерсена називають граф на Рис. 2.

Двочастковим графом називається граф, який можна розбити на дві підмножини так, що кожне ребро графа має одну вершину з першої підмножини і одну з другої. (Рис. 3)

Повним графом називають такий граф, кожна вершина якого суміжна з усіма іншими вершинами. Приклад 10-вершинного повного графа на Рис. 4.

Надалі в роботі усі графи вважаються зв'язними та неорієнтованими (якщо явно не вказано протилежне).

3.2 Теореми про реберне хроматичне число

Теорема 3.1. *Якщо граф G розміру $m >= 1$, тоді*
$\chi' = m/\alpha'(G)$.

Доведення. Нехай $\chi'(G) = k$ і що E_1, E_2, .., E_n є класами реберного розфарбування графу G в k кольорів. Також $|E_i| <= \alpha'(G)$ для кожного

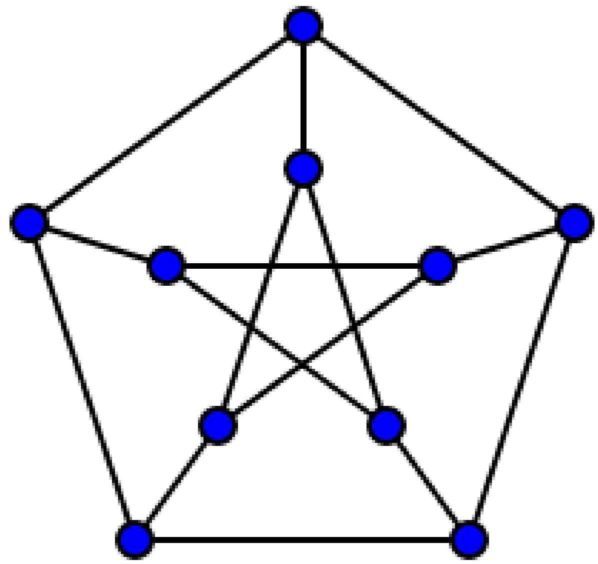

Рис. 2:

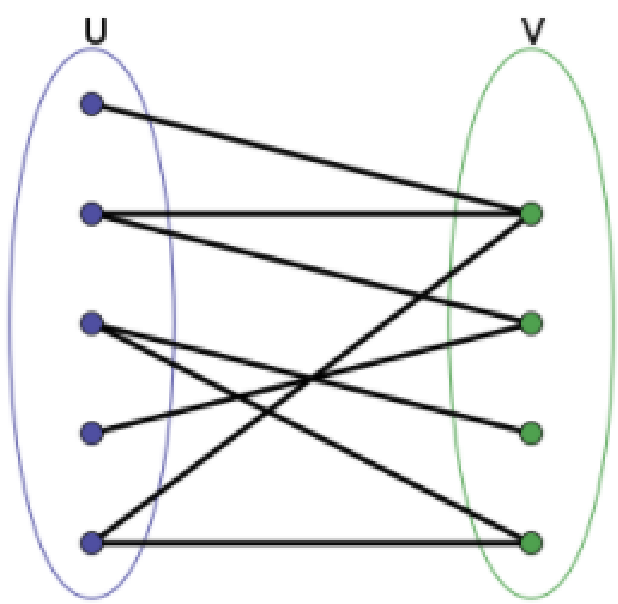

Рис. 3:

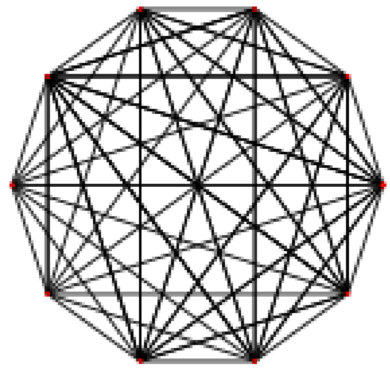

Рис. 4:

$i(1 <= i <= k)$. Тоді

$m = |E(G)| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| <= k\alpha'(G)$

і тоді $\chi'(G) = k >= m/\alpha'(G)$. □

Оскільки кожне можливе розфарбування графа G має містити різні кольори для суміжних ребер, для яких вершина v графу G, то з цього слидуэ, що $degv$ кольорів має бути використано для розфарбування з інцидентними v графу G. Тоді

$\chi'(G) >= \Delta(G)$

для кожного не пустого графа.

Теорема 3.2. ***(Теорема Візінга)*** *Для кожного непустого графа G,*

$\chi'(G) <= 1 + \Delta(G)$.

Доведення. Нехай теорема не вірна. Тоді серед усіх графів H для яких $\chi'(H) >= 2 + \Delta(G)$ можемо взяти один з мінімальним розміром. Нехай $\Delta = \Delta(G)$. Тоді G не є $(1 + \Delta)$-колірним графом. З іншої сторони, якщо $e = uv$ є ребром G, тоді $G - e$ є $(1 + \Delta(G - e))$-колірним графом.

Нехай є $(1+\Delta)$-колірний граф $G-e$. Отже, з виключення e, кожне ребро G розфарбується в $(1+\Delta)$ колір, так як суміжні ребра розфарбовуються порізному. Для кожного ребра $e' = uv'$ графу G суміжного з u (включаючи ребро e), ми бачимо подвійний колір для e' як і для кожного з $(1 + \Delta)$ кольору, що не використовується для ребра суміжного з v'. (Рис. 5)

Оскільки $degv' <= \Delta$, завжди буде хоча б один можливий колір для подвійної колоризації для ребер uv'. Це може показати, що різні ребра мають однаковий подвійний колір. Нехай e_0 має подвійний колір α_1. Важливо, що є ребра $e_1 = uv_1$ суміжні з u розфарбовані в α_1, а з іншої сторони колір α_1 може бути призначений до e, вказуючи на $(1 + \Delta)$-колірне розфарбування графу.

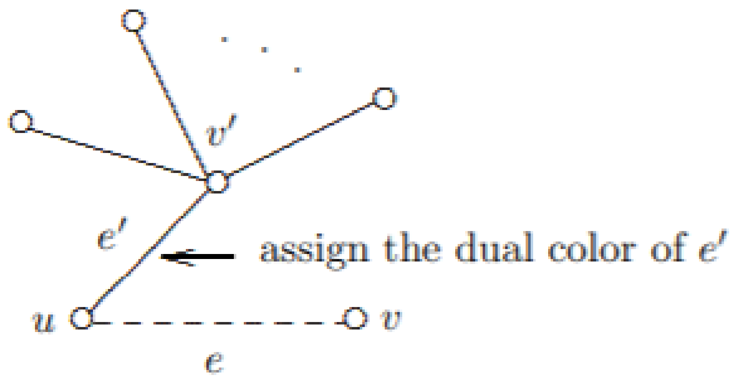

Рис. 5:

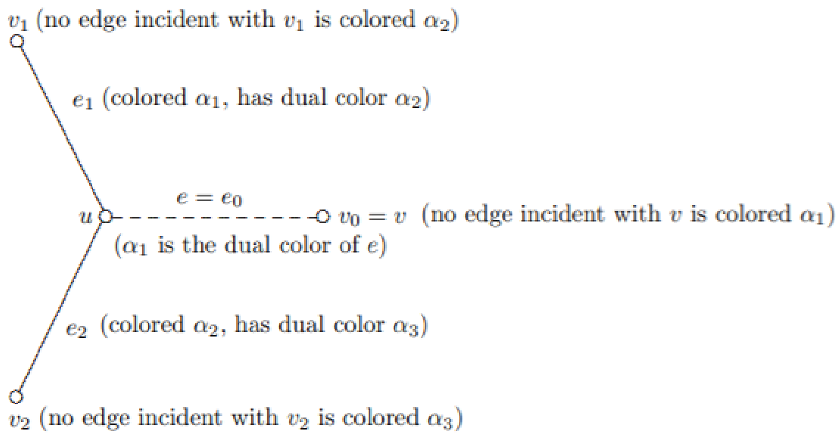

Рис. 6:

Нехай α_2 буде подвійним кольором e_1. Якщо тут має бути деякі ребра інцидентні до u, що кольоризовані з α_2, тоді перепозначаємо це ребро $e_2 = uv_2$ і перезаписуємо цей колір на α_3. (Рис. 6)

Продовжуючи, ми побудуємо послідовність e_1, e_2, .., e_k $(k >= 1)$, яка включає максимальну кількість різних вершин, де $e_1 = uv_1$, для $0 <= i <= k$. Слідуючи, фінальне ребро e_k цієї послідовності кольоризовано в α_k і має подвійний колір α_{k+1}. Тоді кожне ребро e_i $(0 <= i <= k)$ кольоризується в α_i, і має подвійний колір α_{i+1}.

Тоді ми отримуємо, що деякі суміжні u ребра кольоризуються в α_{k+1}. Це не є вірним. Тоді для кожного ребра e_0, e_1, .., e_k може бути присвоєний свій подвійний колір, з $(1 + \Delta)$-кольорів графу G. Але це не є можливим, отже протиріччя.

Звідси, як ми отримали, є ребро e_{k+1} суміжне до u, що кольоризовано з

α_{k+1}.

Оскільки послідовність e_1, e_2, .., e_k містить максимальне число різних ребер, з цього слідує, що $e_{k+1} = e_j$ для якогось j де $1 <= j <= k$ і тоді $\alpha_{k+1} = \alpha_j$. Звідси колір присвоюємо до e_k, що не є однаковим з подвійним кольором, з цього слідує, що $\alpha_{k+1} <> \alpha_k$. Тоді, $1 <= j <= k$. Нехай $j = t+1$ для $0 <= t <= k-1$. Звідси $\alpha_{k+1} = \alpha_{t+1}$ і тоді e_k та e_t мають однаковий подвійний колір.

Має використовуватись колір β, щоб фарбувати суміжні ребра в v графа $G-e$, що не використовує колір будь-якого інцидентного до u ребра. Якщо це не є можливим, тоді $deg_G u - 1 <= \Delta - 1$ кольорів використано, для фарбування ребер, які інцедентні u або v, лишаючи два або більше кольорів для e. Прикріпимо до e якийсь з цих кольорів, що показує $(1+\Delta)$-реберне розмалювання графа G, в результаті операцій.

Колір β також використаєм для розфарбування деяких ребер суміжних до v_i для кожного i з $1 <= i <= k$. Якщо це не можливо, то буде існувати вершина v_r з $1 <= r <= k$ така, що ніяке ребро суміжне з v_r не буде з кольором β. Але ми можемо змінити колір e_r, тода β і колір кожного ребра e_i $(0 <= i <= r)$ з подвійним кольоромщоб підтримувать $(1+\Delta)$-реберне розфарбування G, що є неможливим.

Нехай P буде максимально довгим шляхом до ініційованого v_k, його ребра зафарбовані в β та α_{k+1}, і нехай Q буде максимально довгим шляхом до ініційованого v_t, де його кольори будуть β та $\alpha_{t+1} = \alpha_{k+1}$. Припустимо P має $v_k - x$ шлях і Q це $v_t - y$ шлях. Зараз розглянемо 4 можливих випадки, залежно від того, де вершини x та y в множині $v_0, v_1, .., e_{k-1}, u$.

Випадок 1. $x = v_r$ для якогось цілого r з $0 <= r <= k-1$. Звідси α_{k+1} є подвійним кольором e_k, нема вершини суміжної до v_k, що розфарбована в α_{k+1}, тобто ініційоване ребро P має бути розфарбованим β. Ми бачимо це для кожного цілого i з $0 <= i <= k$, де ребро суміжне з v_i, що кольоризований з β. Через різні значення P, колір основного ребра P не може бути α_{k+1}. Це включає, що ніяке ребро не суміжне з v_r, що з кольором α_{k+1} і обидва ініціалізовані і головна ребра P, що з кольором β. Поки не $v_r = v_t$, вершина v_t не є P, де ніяке ребро, що суміжне з v_t, розфарбоване в α_{k+1}.

Тепер ми обмінюємось кольорами β і α_{k+1} ребер P. Якщо $r = 0$, то e може бути з кольором β, в іншому випадку $r > 0$ і жодне ребро, суміжне з v_r, кольоризоване β і подвійний колір для e_i з $0 <= i < r$ не змінюється. Тоді ребро e_r може мати колір β і для кожного ребра e_i, де $0 <= i < r$ можна розфарбувати з цим подвійним кольором. Однак це призводить до $(1+\Delta)$-кольорового розфарбування G, що неможливо.

Випадок 2. $y = v_r$ для деякого цілого числа r з $0 <= r <= k$, де $r <> t$. Як і у випадку 1, початковий та кінцевий ребра Q також мають розфарбовуватись β і не мати ребра, що суміжні до v_r та пофарбовані a_{k+1}. Окрім того, Q не містить вершини v_k, якщо $v_r = v_k$. Тепер можна змінити колір β та α_{k+1} ребра Q.

Якщо $r < t$, то ми продовжуємо як у випадку 1. З іншого боку, якщо $r > t$, ми змінюємо колір e на β, якщо $t = 0$, тоді як якщо $t > 0$, змінюємо колір e_t на β і розфарбовуємо кожне ребро e_i $(0 <= i < t)$ з подвійним кольором. Звідси випливає, що G є $(1+\Delta)$-кольоровим графом, що утворює суперечність.

Випадок 3. Або (1) $x <> v_r$ для $0 <= r <= k-1$ і $x <> u$ або (2) $y <> v_r$ для $r <> t$ і $y <> u$. Оскільки (1) та (2) подібні, ми розглянемо лише (1). При обміні кольори β і α_{k+1} ребер P, ребро, що падає з v_k, забарвлене β. Крім того, подвійний колір кожного краю e_i $(0 <= i < k)$ не змінювався. Таким чином e_k забарвлений β, а кожен край e_i $(0 <= i < k)$ забарвлений своїм подвійним кольором, що дає суперечність.

Випадок 4. $x = y = u$. Обов'язково початкові ребра P і Q пофарбовані β і кінцеві ребра P і Q пофарбовані $\alpha k + 1$. Оскільки u не має сумісних ребер, то позначенмо його β, шляхи P і Q не можуть бути непересічними з ребрами, оскільки це означатиме, що u сумісний з двома іншими ребрами, що мають однаковий колір (а саме $\alpha k + 1$), тобто неможливо. Таким чином, P і Q мають однакові кінцеві ребра. Оскільки f прилягає до іншого ребра P таа іншого ребра Q, є три суміжні ребра G, що належать P або Q отже, є сусідні ребра $G - e$, які пофарбовані однаково. Оскільки це неможливо, виникає суперечність.

$\square$

З цих двух важливих теорем отримуємо, що реберне хроматичне число графу G

$\Delta(G) <= \chi'(G) <= 1 + \Delta(G)$.

Що спрошує задачу знаходження реберного хроматичного числа, до визначення того, чи воно рівне $\Delta(G)$, чи $1 + \Delta(G)$.

Якщо хроматичне число графу рівне $\Delta(G)$, то він належить першому класу, якщо $1 + \Delta(G)$, то до другого.

Теорема 3.3. *Нехай G має q ребер. Тоді, якщо $q > \Delta(G) * \beta_1(G)$, тоді G належить другому класу.*

Доведення. Нехай G належить першому класу, тоді $\chi'(G) = \Delta(G)$, тоді ми можемо думати, що G $\Delta(G)$-розфарбований граф. Скільки ребер однакового кольору ми можемо мати в G. Здебільшого $\beta_1(G)$, тому що ребра однакового кольору мають бути не сусідніми.Тоді, кількість ребер q в G є здебільшого $\Delta(G) * \beta_1(G)$, що суперечить даній умові. Виникає протиріччя, отже G належить другому класу. $\square$

Твердження 3.4. ***Проблема Візінга***

Якщо G планарний граф з $\Delta(G) >= 8$, тоді цей граф належить першому класу і його хроматичне число рівне:

$\chi' = \Delta(G)$

Ця проблема до сих пір не доведена.

3.3 Теореми про тотальне хроматичне число

Твердження 3.5. ***Гіпотеза про тотальне розфарбування***
Для будь-якого не пустого графа G
$\chi'' <= \Delta(G) + 2$

Відомо, що гіпотеза перевірена для декількох важливих класів графів: двочасткових і більшість планарних, за винятком з максимальним степенем 6. Випадок планарних графів буде доведено, якщо буде доведена гіпотеза Візінга про планарні графи.

Лема 3.6. *Нехай K_n повний граф з n вершинами. Тоді $\chi''(K_n) = n$, якщо n - непарне, і $\chi''(K_n) = n + 1$, якщо n - парне.*

Теорема 3.7. *Планарний граф G задовольняє $\chi''(G) <= \Delta(G) + 2$ поки*
$(v_5)^4 + 2((v_5)^5 + (v_6)^4) + 3(v_5)^6 + 4(v_6)^6 < 24$

4 Основні результати

4.1 Дослідження реберного хроматичного числа дерева

Якщо G дерево, то його хроматичний індекс $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Доведення. Використаємо математичну індукцію: Нехай для G з n вершин хроматичне число рівне $\chi'(G) = \Delta(G)$. Приєднаємо ще одну вершину $(n+1)$-шу. Є два варіанти куди її можна приєднати: до вершини з максимальним степенем чи до вершини не максимального степеня.

Приєднуючи до вершини **максимального степеня**, ми збільшуємо степінь на 1 і додаємо ще один колір. Тобто хроматичне число $\chi'(G') = \chi'(G) + 1$, а $\Delta(G') = \Delta(G) + 1$, тоді $\chi'(G') = \Delta(G')$.

Для іншого випадку ми приєднуємо до вершини **не максимального степеня**. Тоді максимальний степінь не збільшується, як і не збільшується кількість кольорів, оскільки кольору на нове ребро вистачить, при приєднанні до вершини не максимального степеня. Ні степінь, ні хроматичне число не змінилось, а отже $\chi'(G') = \Delta(G')$. □

4.2 Дослідження реберного хроматичного числа двочасткового графа

Якщо G двочастковий граф, то його хроматичний індекс $\chi'(G) = \Delta(G)$. Або хроматичний індекс двочасткового графу $K_{m,n}$ рівний максимуму з m, n.

Доведення. Застосуємо математичну індукцію на кількість ребер в G. Нехай $\Delta(G) = r$. Легко довести, що кожне ребро $G - e$ (де e ребро G) можна кольоризувати використовуючи множину S з r кольорів, ребра G можуть також бути кольоризовані за допомогою цієї множини.

Припустимо ребро e на вершинах u та v. Нехай S_u буде множиною кольорів в S, що не використовуються для сусідніх до u. Що S_u, що S_v є непустими підмножинами S. Беручи перетин цих множин, кожен колір з перетину може використовуватись для кольоризації e. Тоді, для ребра G можна кольоризувати з r ребер. Але перетин пустий. Припустимо s належить S_u, а t - S_v. Нехай $H(s,t)$ з'єнаний з підграфом $G - e$, який включає вершину u і всі вершини і ребра з $G - e$, що можуть бути досягнуті з u лише через s-кольоризовані та t-кольоризовані ребра.

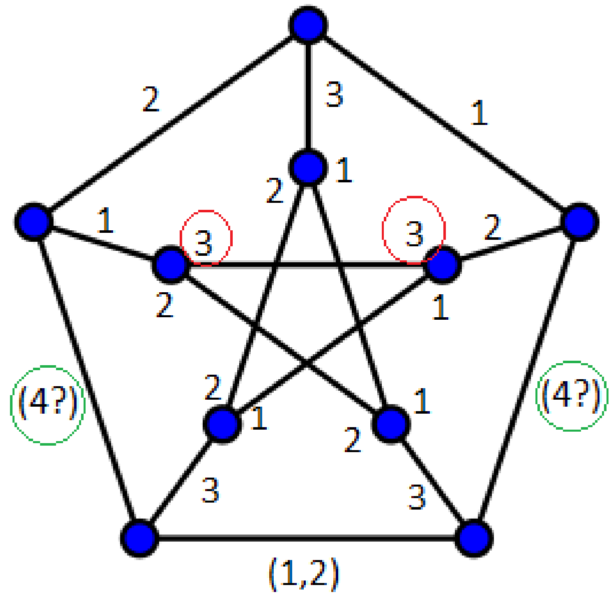

Рис. 7:

Якщо v вершина в цій компоненті, ребро e і будь-який шлях включаючи u та v в H, кожна s-ребро стає t-ребром. Потім призначимо колір s ребру e. Включаючи, що ребра G можна кольорізувати, використовуючи r кольорів. Цей хроматичний індекс дочасткового графу є максимальним степенем цього графу. Якщо цей граф є $K_{m,n}$, максимальна степінь є максимумом m, n. □

4.3 Дослідження реберного хроматичного числа графа Петерсена

Якщо G граф Петерсена, то його хроматичний індекс $\chi'(G) = 4$, тобто належить класу $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$.

Доведення. Максимальна степінь графа Петерсена рівна 3. Існує 3 різних можливих розфарбування графа Петерсона, починаючи розфарбуваня з різних частин графу:

1) **Розфарбування починаючи з зірки всередині**: (Рис 7)

На рисунку показано розфарбування, при будь-якому початку зірку не можна розфарбувати в 2 кольори, тобто її хроматичне число - 3. Легко зафарбувати з'єднючі ребра після зірки, оскільки не залишається варіантів для вибору з 3-ьох кольорів. Вже розмальовуючи крайній п'ятикутник, бачимо, що дві сторони не маємо можливості. Тут 4 кольори.

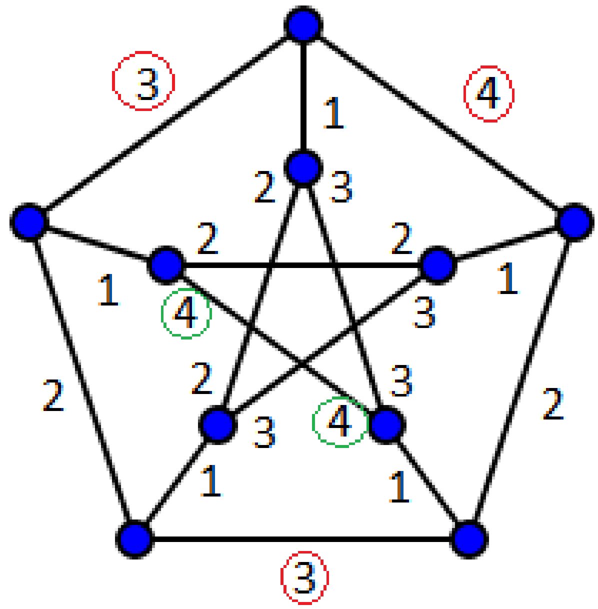

Рис. 8:

2) **Розфарбування починаючи зі з'єднуючого ребра**: (Рис. 8)

На рисунку показано розфарбування, на початку фарбуємо з'єднувальні ребра одним кольором, далі виникають проблеми з розмалюванням п'ятикутника і ми не можемо його вже розмалювати в 3 кольори. Аналогічно зірки ми також не можемо розмалювати в 3 кольори. Тут 4 кольори.

3) **Розфарбування починаючи зі п'ятикутника**: (Рис. 9)

На рисунку показано розфарбування, при будь-якому початку п'ятикутник не можна розфарбувати в 2 кольори, тобто її хроматичне число - 3. Легко зафарбувати з'єднючі ребра після зірки, оскільки не залишається варіантів для вибору з 3-ьох кольорів. Вже розмальовуючи крайній зірку, бачимо, що дві сторони не маємо можливості. Тут 4 кольори.

Отже розфарбовуючи усіма трьома методами, ми отримали 4 кольори. Отже, хроматичне число рівне 4, а оскільки максимальна степінь 3, то граф Петерсена належить групі $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$.

$\square$

4.4 Дослідження реберного хроматичного числа повного графа

Якщо G повний граф, то його хроматичний індекс $\chi'(G) = \Delta(G)$, якщо має парну кількість вершин, і $\chi'(G) = 1 + \Delta(G)$, якщо непарну.

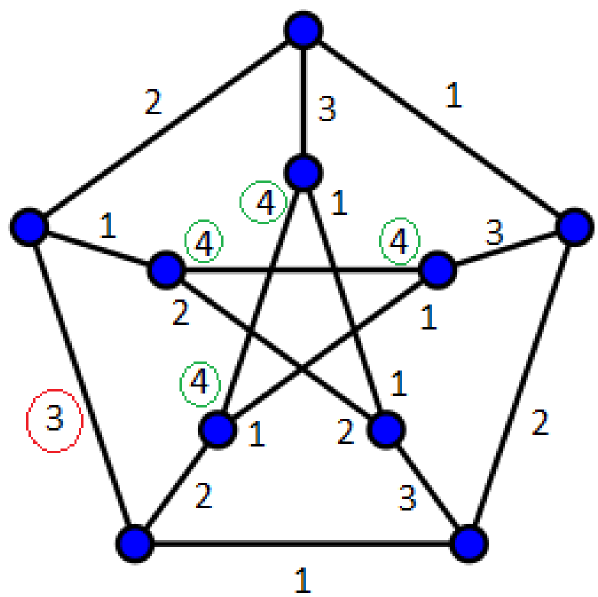

Рис. 9:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 1 & 2 & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n \end{bmatrix}.$$

Рис. 10:

Доведення. Доведемо спочатку для **парних**:

Кількість вершин є парною. Нехай $V = 1, 2, 3, ..., 2n$ буде множиною вершин. Максимальною степіню буде $2n - 1$.

Створимо множину $S = c_i : i = 1, 2, 3, ..., (2n - 1)$ кольорів. Кольоризація ребер повного графу, використовуючи кожен колір з S n разів може бути представлена у процедурі. Представимо можливе розфарбування у вигляді матриці $(2n - 1) * 2n$. (Рис. 10)

Візьмемо елементи з першого рядка матриці і позначимо їх як пари $(1, 2n)$, $(2, 2n-1)$, $(3, 2n-2)$. Тут буде n пар, і кожну пару співставляємо з унікальним ребром в повному графі. Призначаємо колір c_1 до цієї колекції.

Візьмемо елементи з другого рядка матриці і позначимо їх як пари $(2, 2n)$, $(3, 1)$, $(4, 2n - 1)$. Тут буде n пар, і кожну пару співставляємо з унікальним ребром в повному графі. Призначаємо колір c_2 до кожноїпари цієї колекції.

Продовжуємо, поки не закінчаться $2n-1$ колекцій, і отримаємо, що усього ми використали $2n-1$ колір.

Тепер перевіримо для **непарних**:

Кількість вершин непарна. Хроматичне число K_{2n} це $(2n-1)$. Видалимо одну вершину. Тоді ми матимем K_{2n-1} з розмалюванням в $(2n-1)$ кольорів. Нехай можливе розфарбування в $(2n-2)$ кольори. Усього $(n-1)(2n-1)$ ребер в графі. Коли кількість ребер $(n-1)(2n-1)$ ділиться на кількість кольорів $(n-1)(2n-2)$, отримуємо число більше за $(n-1)$. Це включає в себе кольори з множини $(2n-2)$ кольорів що мають бути призначені на n ребер, що потрібні для $2n$ вершин. Але кількість вершин тільки $(2n-1)$. Отже нам потрібно $(2n-1)$ кольорів для розмалювання ребер в K_{2n-1}.

□

5 Висновки

У даній курсовій роботі ми розглянули та проаналізували реберні та тотальні розфарбування графів. Було розглянуто теореми та їх наслідки з цієї тематики, зокрема основна теорема Візінга. Досліджено реберне хроматичне число для різних типів графів: Петерсена, повного, двочасткового, дерева.

За дослідженням було виявлено, що дерева, двочастковий та повний граф з парною кількістю вершин належить першому класу реберного розфарбування. Також було досліджено, що граф Петерсена та повний граф з непарною кілкістю верши належить до другого класу.

Література

[1] Ф. Харари, *Теория графов*, М. Мир. **20** (1973), 91—104.

[2] G. Chartrand and P. Chang, *Discrete-mathematics-and-its-applications*, Western Michigan University **20** (2005), 265—269.

[3] S. Nakano, X. Zhou and T. Nishizeki *Edge-Coloring Algorithms*, Tohoku University **20** (1977-1980), 1—12.

[4] A. Sofier, *The Mathematical Coloring book Mathematics*, **20** (1987), 150—160.