Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«ОБЕРНЕНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ НА ЗВАЖЕНИХ ГРАФАХ»**

Виконала: студентка 4-го року навчання
освітньої програми «Прикладна математика»,
спеціальності 113 Прикладна математика

Пилипіва Олександра Віталіївна

Керівник: Тимошкевич Л. М.
кандидат фіз.-мат. наук, ст. викладач

Рецензент: Кочубінська Є.А.

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою ___________________________

Секретар ЕК_________________________
(підпис)

«______» _________________ 20___р.

Київ - 2022

Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Києво-Могилянська академія»
Факультет інформатики
Кафедра математики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав.кафедри математики,
проф., доктор фіз.-мат. наук
_______________*Олійник Б.В.*
(підпис)
“____”________________ 2021

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
для кваліфікаційної роботи
студенту 4-го курсу, факультету інформатики
Пилипівій Олександрі Віталіївні

Тема: «Обернені спектральні задачі на зважених графах»
Зміст кваліфікаційної роботи:

Анотація
1. Вступ
2. Огляд основних означень та тверджень, що пов’язані
зі спектральною теорією графів
3. Розв’язання обернених спектральних задач для різних типів
зважених графів
4. Розв’язання загальних обернених спектральних задач
Висновки
Список літератури

Дата видачі “____”__________ 2021 Керівник _______________
(підпис)

Завдання отримав _______________
(підпис)

Графік підготовки кваліфікаційної роботи до захисту

Графік узгоджено «______» ________________ 2022р.

№ з/п	Перелік робіт	Термін виконання етапу	Підпис наукового керівника	Дата ознайомлення наукового керівника	Примітка
1.	Отримання теми кваліфікаційної роботи.	17.10.2021			
2.	Ознайомлення з темою кваліфікаційної роботи.	25.10.2021			
3.	Розробка плану та структури роботи.	15.11.2021			
4.	Робота з науковою літературою, опис основних означень.	17.01.2022			
5.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	15.02.2022			
6.	Робота над текстовим оформленням результатів.	18.04.2022			
7.	Попередній аналіз кваліфікаційної роботи. Виправлення помилок.	04.05.2022			
8.	Попередній захист кваліфікаційної роботи.	14.06.2022			
9.	Захист кваліфікаційної роботи.	04.07.2022			

Науковий керівник ________________________
(ПІБ)

Виконавець кваліфікаційної роботи ________________________
(ПІБ)

Зміст

Анотація

Метою цієї кваліфікаційної роботи є дослідження зв'язку між спектрами та підспектрами для відновлення ваг на ребрах зважених графів різних типів.

У роботі були отримані точні значення відновлюючого спектрального числа для циклів на трьох та чотирьох вершинах. Були знайдені підспектри, за якими можна відновити ваги графа метелика. Також були знайдені верхні оцінки відновлюючого спектрального числа для уніциклічних графів та графів кактусів-ланцюжків. Ще були досліджені загальні обернені спектральні задачі і була отримана верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для графів кактусів.

1 Вступ

1.1 Актуальність

Спектральна теорія графів — розділ математики, що займається дослідженням властивостей графів за власними значеннями його матриці суміжності, тобто його спектру.

Цей розділ виник у середині 20 століття. У 1980 роках у монографії D. Cvetkovic, M. Doob та H. Sachs[1] узагальнили результати у цій області, що були вже отримані на той час. Трохи пізніше були також видані роботи, що описували підсумки нових досліджень. Детальніше з ними можна ознайомитися у [2] та [3].

Розвиток спектральної теорії графів не стоїть на одному місці, вона доволі активно розвивається, оскільки широко застосовується у багатьох науках, наприклад у хімії, біології, фізиці, математиці та інших. У комп'ютерній науці спектри використовуються при розпізнаванні образів, комп'ютерному зорі та інших інтернет-технологіях. У книзі D. Cvetkovic та I. Gutman[4] та у статтях [5], [6] розглянуто різноманітні застосування у різних галузях.

У своїй роботі я розглядаю саме обернені спектральні задачі, тобто за спектром графа та підграфів відновлюємо ваги на його ребрах. До таких задач також чи мало уваги, наприклад G.M.L. Gladwell у своїй роботі [7] розглядає реконструкцію вібраційної системи, що пов'язано з оберненими спектральними задачами.

Тобто тема кваліфікаційної роботи є досить актуальною. Вона активно розвивається, є багато можливостей для застосувань, а також задачі, які можна дослідити та отримати нові результати.

1.2 Мета, завдання дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження зв'язку спектрів зважених графів і їх підграфів для відновлення вагової функції, тобто ваги кожного ребра вихідного графа.

Це передбачає розгляд таких задач:

- Знаходження відновлюючого спектрального числа для циклу на трьох вершинах.

- Знаходження відновлюючого спектрального числа для циклу на чотирьох вершинах.
- Знаходження підспектрів, за якими можна відновити граф метелик.
- Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для уніциклічних графів.
- Знаходження верхньої оцінки відновлюючого спектрального числа для графів кактусів-ланцюгів.
- Загальна обернена задача для графів, що містять $2k$ непарних вершин.
- Загальна обернена задача для графів-циклів.
- Знаходження верхньої оцінки загального відновлюючого спектрального числа для графів кактусів.

2 Прямі спектральні задачі на реберно-зважених графах

2.1 Основні означення теорії графів

Введемо деякі означення з теорії графів, які є необхідними для розуміння теорем і означень зі спектральної теорії.

Означення 1.
Графом $G = (V, E)$ називається така пара впорядкованих множин V і E, де V — множина вершин, що є непорожньою і скінченною, а E — множина ребер, що складається з невпорядкованих пар елементів множини вершин.

Введемо такі позначення, які надалі будемо використовувати у роботі:
– $E(G)$ — множина ребер E графа G.
– $V(G)$ — множина вершин V графа G.
– (u, v) — ребро, що з'єднує вершини u і v.
Такі уточнення допомагають розуміти про ребра та вершини, якого графа йшлося.

Приклад 1.

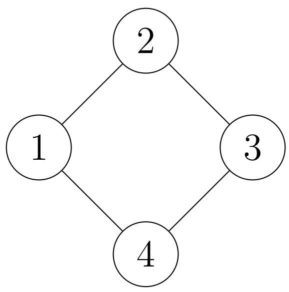

Рис. 1: G

Знайдемо чому дорівнюють множина вершин і ребер графа G, який зображено на рисунку 1. Вершини — точки, що позначені на площині, тобто $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, а ребра — це лінії, що їх з'єднують, тобто $V(G) = \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 1)\}$.

Означення 2.
Реберно-зваженим графом $\mathbf{G}$ називається така пара (G, w), де G — це граф, а $w : E \to (0, +\infty)$ — вагова функція, відображення множини $E(G)$ на множину додатніх дійсних чисел.

Вагу $w(e)$ ребра e, будемо позначати w_e. Також надалі замість терміну "реберно-зважений граф" будемо писати "зважений граф", оскільки це більш зручно і така назва також зустрічається у літературі і вважається загальноприйнятим.

Приклад 2.

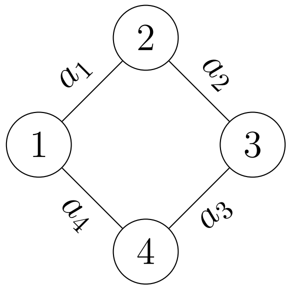

Рис. 2: Реберно-зважений граф **G**

На рисунку 2 зображений зважений граф $\mathbf{G}$, що має 4 вершини і 4 ребра. Випишемо вагу для кожного ребра: $(1, 2) : w_{12} = a_1$, $(2, 3) : w_{23} = a_2$, $(3, 4) : w_{34} = a_3$, $(4, 1) : w_{41} = a_4$.

Означення 3.
Суміжні вершини — це вершини графа, що з'єднані ребром.

Означення 4.
Вершину u і ребро e називають *інцидентними*, якщо $e = (u, v)$, тобто вершина u є кінцем ребра e.

Означення 5.
Степінь вершини $\deg v$ — це кількість ребер, що інцидентні вершині v.

Приклад 3.
Знайдемо степінь, інцидентні ребра і суміжні вершини для першої вершини графа G (див. рисунок 1). Оскільки вершини 1 і 2, та 1 і 4 з'єднані ребром, то вони є суміжними. Отже, інцидентними ребрами до вершини 1 будуть ребра $(1, 2)$ і $(1, 4)$ і степінь вершини буде дорівнювати 2.

У книгах [8]-[10] можна дізнатись більше деталей з загальної теорії графів.

2.2 Основні означення з спектральної теорії зважених графів

Означення 6.

Матриця суміжності — це квадратна матриця:

$$A(\mathbf{G}) = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, \tag{1}$$

де $n = |G|$ — кількість вершин у графі,

$a_{ij} = a_{ji}$ — елемент матриці, що дорівнює 0, якщо вершина i та j несуміжні, або w_{ij}, якщо вершини з'єднані ребром.

Тобто матриця суміжності є симетричною, оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, і вона також має нулі по всій діагоналі, бо немає петель.

Означення 7.

Точки спектра — це власні значення матриці суміжності.

Оскільки матриця суміжності симетрична, то її спектр буде дійсним.

Означення 8.

Спектр графа $\sigma(\mathbf{G})$ — спектр матриці суміжності. Від зміни нумерації вершин спектр не змінюється.

Для характеристичного многочлена матриці суміжності зваженого графа будемо використовувати таке позначення :

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|. \tag{2}$$

2.3 Знаходження характеристичного многочлена та визначника матриці суміжності

Введемо деякі означення та позначення для теорем.

Означення 9.

Лінійний підграф графа G — підграф, компонентами зв'язності якого є тільки ребра та цикли. Позначимо через H_k, де k = $|H_k|$, тобто дорівнює кількості вершин.

Означення 10.

Каркасний підграф графа G — лінійний підграф, що містить усі вершини вихідного графа.

Введемо деякі позначення, які надалі будемо використовувати у теоремі Харарі та Захса:
– $p(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k, що мають парну кількість вершин.
– $r(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k.
– $c(H_k)$ — кількість компонент зв'язності лінійного підграфа H_k, що є циклами.
– $w(H_k)$ — вага H_k, яка є добутком усіх ваг його компонент зв'язності. Якщо компонента зв'язності це ребро (i, j), то його вага буде дорівнювати w_{ij}^2, а якщо цикл, то вага дорівнює добутку значень w_{ij} по всіх ребрах (i, j).

Теорема 1 (Харарі [11]).
Визначник матриці суміжності довільного зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ можна порахувати за такою формулою:

$$\det A(\mathbf{G}) = \sum_{\{H_n\}} (-1)^{p(H_n)} 2^{c(H_n)} w(H_n) \tag{3}$$

Теорема 2 (Захса [12]).
Якщо $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + ... + c_n$,— характеристичний многочлен графа $\mathbf{G} = (G, w)$, то

(1) $c_1 = 0$;

(2) $c_2 = -\sum_{e \in E(\mathbf{G})} w(e)^2$

(3) $c_k = \sum_{\{H_k\}} (-1)^{r(H_k)} 2^{c(H_k)} w(H_k)$ для $k = 1, ..., n$.

Також запишемо теорему, що узагальнює теорему Швенка[13], показує співвідношення між спектром зваженого графа $\mathbf{G}$ і спектром його підграфа, тобто між їх характеристичними многочленами.

Також порожній граф для зручності будемо позначати K_0 і його характеристичний многочлен $P_{\mathbf{K_0}}(\lambda) = 1$.

Теорема 3.
Нехай v — вершина зваженого графа G, через $C(v)$ позначимо множину циклів, що містять v. Тоді

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - \sum_{u \ v} w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) - 2 \sum_{Z \in C(v)} w(Z) P_{\mathbf{G}-V(Z)}(\lambda) \tag{4}$$

Наслідок 1 (Розклад за висячою вершиною).

Якщо вершина v — висяча вершина графа $\mathbf{G}$ і u та v — суміжні вершини, то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda P_{\mathbf{G}-v}(\lambda) - w_{uv}^2 P_{\mathbf{G}-v-u}(\lambda) \tag{5}$$

3 Обернені спектральні задачі на зважених графах

Сформулюємо постановку задачі, яку надалі будемо розглядати у цьому розділі та наступному розділі.

Постановка задачі.

Нехай нам відомий довільний граф G. Ми хочемо однозначно відновити ваги кожного ребра зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$, тобто його вагову функцію w, за спектрами його підграфів.

Лема 1.

Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа $\mathbf{G}$ за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.

Доведення.

Характеристичний многочлен $P_{\mathbf{G}}$ довільного зваженого графа $\mathbf{G}$ можна однозначно відновити за спектром і навпаки, бо корені многочлена, у якого старший коефіцієнт дорівнює одиниці, однозначно його відновлюють.

Нехай $\sigma(\mathbf{G}) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ — спектр зваженого графа $\mathbf{G}$, то

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) \tag{6}$$

3.1 Відновлююче спектральне число $Srn(G)$

Розглянемо першу задачу і введемо деякі означення.

Означення 11.

Породжений або індукований підграф графа G — підграф, утворений підмножиною вершин графа G і усіма ребрами, що з'єднують ці вершини.

Означення 12.

Підспектр графа G — спектр підграфа.

Означення 13.

Відновлююче спектральне число $Srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів породжених підграфів, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа.

Нижня границя $Srn(G)$ дорівнює 1, тобто спектр вихідного графа відновлює свої ж ваги. Єдиним прикладом такого графа є $\mathbf{A_2}$, тобто ребро, спектр якого дорівнює $\sigma(\mathbf{A_2}) = \{-w, w\}$ і однозначно відновлює вагу на ребрі. Отже, для довільного графа відмінного від $\mathbf{A_2}$: $Srn(G) \geq 2$.

Верхня границя для довільного графа $\mathbf{G}$: $Srn(G)$ дорівнює n, бо будь-який зважений граф можна відновити знаючи спектри підграфів на двох вершинах, тобто ребер.
Тобто $1 \leq Srn(G) \leq n$.

Отже, спершу для наступних графів розглянемо задачу, що буде мати такі дві підзадачі: навести приклад такого набору підспектрів, за яким можна відновити усі ваги, та знайти $Srn(G)$.

3.2 Задача відновлення ваг для ланцюга

Для зваженого графа $\mathbf{A_n} = (A_n, w)$, який є ланцюгом, розглянемо поставлену задачу.

Пронумеруємо його вершини від 1 до n, тобто $V(A_n) = \{1, 2, ..., n\}$, і вершина k суміжна з вершинами $k-1$ і $k+1$: $\forall k \in \{2, ..., n-1\}$. Вагу ребра, що з'єднує i та $i+1$ вершини $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, позначимо a_i.

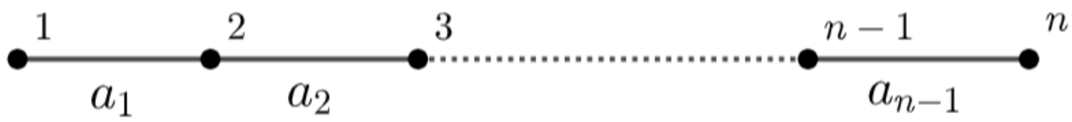

Рис. 3: $\mathbf{A_n}$

Розглянемо випадок, коли $n = 2$.
Для $\mathbf{A_2}$: $\sigma(\mathbf{A_2}) = \{-a_1, a_1\}$ і $P_{\mathbf{A_2}} = \lambda^2 - a_1^2$. Очевидно, що з такого спектра однозначно відновлюються ваги. Оскільки $a_1^2 = b$, де b — коефіцієнт многочлена, який відомий нам за умовою, то $a_1 = \sqrt{b}$, $a_1 > 0$.

Твердження 1.
Для будь-якого $n \geq 3$ можна відновити зважений граф $\mathbf{A_n}$ за спектром всього графа $\sigma(\mathbf{A_n})$ і підспектром $\sigma(\mathbf{A_{n-1}})$.

3.3 Задача відновлення ваг для циклу

Для зваженого графа, який є циклом, розв'яжемо поставлену задачу. Розглянемо три випадки: для циклу на трьох вершинах, на чотирьох вершинах та на n вершинах, де $n \geq 5$.

Відновлення ваг $\mathbf{C_3}$

Відновимо ваги зваженого графа $\mathbf{C_3}$, знаючи його структуру і підспектри, тобто спектри деяких його індукованих підграфів.

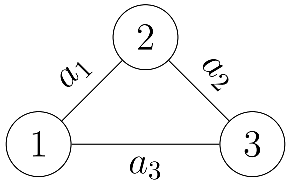

Рис. 4: $\mathbf{C_3}$

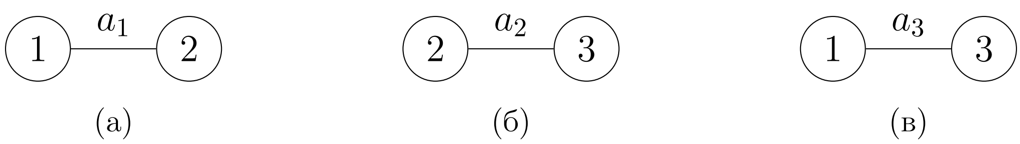

Рис. 5: Підграфи $\mathbf{C_3}$

Так як для кожного власного підграфа, що є ребром, $P(\lambda) = \lambda^2 - a_i^2$, то за трьома підспектрами, можна відновити ваги на ребрах графа $\mathbf{C_3}$, тобто a_1, a_2, a_3.

Чи можна відновити ваги графа $\mathbf{C_3}$ *тільки за двома підспектрами?* Для набору з двох підспектрів можна взяти спектр вихідного графа $\sigma(\mathbf{C_3})$ і спектр графа з видаленням 1 вершини: $\sigma(\mathbf{C_3} - \{i\})$, де i — одна з трьох вершин. З видаленням вершини отримаємо ребро, зі спектра якого можна відновити вагу одного ребра графа.

$$P_{\mathbf{C_3}}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2a_1a_2a_3 \tag{7}$$

Знаючи ліву частину характеристичного многочлена (7) і вагу одного ребра не можна відновити однозначно ваги всього графа через симетричність.

Наприклад, ми однозначно відновлюємо вагу a_1 ребра $(1,2)$ підграфа $\mathbf{C_3} - \{3\}$ Тоді з характеристичного многочлена (7) ми маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 a_3 = b \\ a_2^2 + a_3^2 = c \end{cases}, \tag{8}$$

де $b,\ c$ — коефіцієнти з характеристичного многочлена, що відомі нам за умовою задачі.

Виразимо у першому рівнянні змінну a_2 через змінну $a_3 (a_3 > 0)$

$$\begin{cases} a_2 = \frac{b}{a_3} \\ (\frac{b}{a^3})^2 + a_3^2 = c \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на a_3 і знайдемо розв'язки такого біквадратного рівняння: $(\frac{b}{a_3})^2 + a_3^2 = c \Rightarrow a_3^4 - c a_3^2 + b^2 = 0$

Нехай $a_3^2 = t,\ t \geq 0$, отримаємо таке квадратне рівняння:

$$t^2 - ct + b^2 = 0$$

$$D = c^2 - 4b^2$$

$$t_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4b^2}}{2}$$

Оскільки t має бути більше або рівним нулю, то знайдемо, коли $c \pm \sqrt{c^2 - 4b^2} \geq 0$. $c + \sqrt{c^2 - 4b^2}$ завжди більше 0, бо $c > 0$ і $\sqrt{c^2 - 4b^2} \geq 0$. Розглянемо, чи $c - \sqrt{c^2 - 4b^2} \geq 0$.

$$c \geq \sqrt{c^2 - 4b^2}$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq \sqrt{(a_2^2 + a_3^2)^2 - 4a_2^2 a_3^2}$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq \sqrt{a_2^4 + 2a_2^2 a_3^2 + a_3^4 - 4a_2^2 a_3^2}$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq \sqrt{(a_2^2 - a_3^2)^2}$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq a_2^2 - a_3^2$$

$$a_2^2 + a_3^2 \geq a_2^2 - a_3^2$$

$$2a_3^2 \geq 0$$

Отже, ми отримали що $c - \sqrt{c^2 - 4b^2}$ також завжди більше нуля.

$$a_3 = \pm\sqrt{t}$$

Оскільки ваги графа є додатніми, то $a_3 = \sqrt{\frac{c+\sqrt{c^2-4b^2}}{2}}$ і $a_2 = \sqrt{\frac{2}{c+\sqrt{c^2-4b^2}}}b$ або $a_3 = \sqrt{\frac{c-\sqrt{c^2-4b^2}}{2}}$ і $a_2 = \sqrt{\frac{2}{c-\sqrt{c^2-4b^2}}}b$.

Аналогічно, якщо виразити у першому рівнянні системи (8) змінну a_3 через змінну $a_2 (a_2 > 0)$. Отримаємо біквадратне рівняння: $a_2^4 - ca_2^2 + b^2 = 0$ і такі самі результати.

З цієї системи рівнянь отримуємо симетричні розв'язки: $a_3 = \sqrt{\frac{c+\sqrt{c^2-4b^2}}{2}}$ і $a_2 = \sqrt{\frac{2}{c+\sqrt{c^2-4b^2}}}b$ або $a_3 = \sqrt{\frac{c-\sqrt{c^2-4b^2}}{2}}$ і $a_2 = \sqrt{\frac{2}{c-\sqrt{c^2-4b^2}}}b$. Оскільки нам важлива нумерація вершин, то нам не достатньо знати 2 підспектрів для відновлення ваг зваженого графа $\mathbf{C_3}$.

Отже, $Srn(C_3) = 3$.

Відновлення ваг $\mathbf{C_4}$

Знайдемо точне значення $Srn(C_4)$ для циклу на чотирьох вершинах, який зображений на рисунку 6. Очевидно, що його ваги можна відновити за чотирма підспектрами, що є його ребрами.

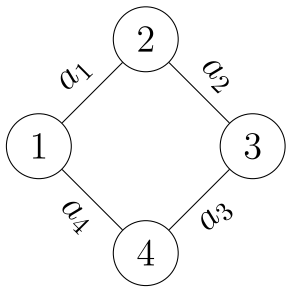

Рис. 6: $\mathbf{C_4}$

Чи достатньо 3 підспектрів для відновлення усіх ваг $\mathbf{C_4}$*?* Запишемо характеристичний многочлен графа $\mathbf{C_4}$:

$$P_{\mathbf{C_4}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + (a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2) - 2a_1 a_2 a_3 a_4 \qquad (9)$$

Випишемо усі можливі варіанти з 3 підграфів:

1. C_4 і $2A_2$, що є сусідніми ребрами у графі.

2. C_4 і $2A_2$, що є паралельними ребрами у графі.

3. C_4 і $2A_3$, що перетинаються.

4. C_4 і $2A_3$, що не перетинаються.

5. C_4 і A_3, A_2, що перетинаються.

6. C_4 і A_3, A_2, що не перетинаються.

7. $3A_3$

8. $2A_3$, що перетинаються і A_2, що не входить у $2A_3$.

9. $2A_3$, що не перетинаються і A_2.

10. A_3 і $2A_2$.

Перевіримо кожен варіант.

1. Оберемо сусідні ребра (1;2)(2;3), зі спектра яких ми можемо відновити ваги a_1, a_2. Нехай $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Тоді з характеристичного многочлена вихідного графа (9) маємо значення таких коефіцієнтів: $a_3^2 + a_4^2$, $b_1^2 a_3^2 + b_2^2 a_4^2$, $a_3 a_4$. Якщо $b_1^2 = b_2^2$, то ми отримаємо симетричність. Тобто для графа $\mathbf{C_4}$(див. рисунок 6) і для графа $\mathbf{C_4'}$(див. рисунок 7), який дорівнює графу $\mathbf{C_4}$, але ваги ребер (1,4) і (3,4) поміняні місцями, тобто $w_{14} = a_3$ і $w_{34} = a_4$, значення $a_3^2 + a_4^2$, $b_1^2 a_3^2 + b_2^2 a_4^2$, $a_3 a_4$ будуть однакові, але розташування ваг різне.

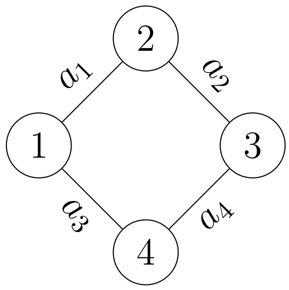

Рис. 7: $\mathbf{C_4'}$

2. Оберемо паралельні ребра (1;2)(3;4), зі спектра яких ми можемо відновити ваги a_1, a_3. Тоді з характеристичного многочлена вихідного графа маємо такі коефіцієнти: $a_2^2 + a_4^2$, $a_2 a_4$. Для довільного значення ваг a_1, a_3, маємо симетричність, тобто ситуацію, як у попередньому пункті.

3. Оберемо такі $2A_3$, що перетинаються: $C_4 - \{4\}$,$C_4 - \{1\}$. Знайдемо їх характеристичні многочлени.

$$P_{\mathbf{C_4}-4}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_1^2 + a_2^2) \tag{10}$$

$$P_{\mathbf{C_4}-1}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_2^2 + a_3^2) \tag{11}$$

Тоді з характеристичного многочлена вихідного графа(9) і підграфів $C_4 - \{4\}$,$C_4 - \{1\}$ маємо такі коефіцієнти: $a_1^2 + a_2^2$,$a_2^2 + a_3^2$, $a_1^2 + a_4^2$,$a_3^2 + a_4^2$,$a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2$,$a_1 a_2 a_3 a_4$, з яких не можна однозначно відновити усі ваги.

4. Оберемо такі $2A_3$, що не перетинаються: $C_4 - \{4\}$,$C_4 - \{2\}$. Знайдемо характеристичний многочлен для $\mathbf{C_4} - \{2\}$:

$$P_{\mathbf{C_4}-2}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda(a_3^2 + a_4^2) \tag{12}$$

Тоді з характеристичного многочлена вихідного графа(9) і підграфів: $\mathbf{C_4} - \{4\}(10)$,$\mathbf{C_4} - \{2\}(12)$ маємо такі коефіцієнти:$a_1^2 + a_2^2$,$a_3^2 + a_4^2$, $a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_4^2$,$a_1 a_2 a_3 a_4$.

5. Оберемо A_3: $C_4 - \{4\}$ і A_2: ребро(1;2). Зі спектра ребра відновлюємо вагу a_1, тоді зі спектра $\mathbf{C_4} - \{4\}(10)$, можна відновити вагу a_2. Отримаємо таку саму ситуацію, як в першому пункті.

6. Оберемо A_3: $C_4 - \{4\}$ і A_2: ребро(2;3). Зі спектра ребра відновлюємо вагу a_4, тоді зі спектра $\mathbf{C_4}(9)$, коефіцієнту $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, можна відновити вагу a_4, оскільки нам відомо значення $a_1^2 + a_2^2$ зі спектра $\mathbf{C_4} - \{4\}(10)$ і вага a_3. Отримаємо таку саму ситуацію, як в другому пункті.

7. Оберемо A_3: $C_4 - \{4\}$, $C_4 - \{1\}$, $C_4 - \{2\}$. З їх характеристичних многочленів маємо такі коефіцієнти: $a_1^2 + a_2^2$,$a_2^2 + a_3^2$,$a_3^2 + a_4^2$, яких недостатньо для відновлення ваг

8. Оберемо такі $2A_3$: $C_4 - \{4\}$,$C_4 - \{1\}$ і A_2: ребро(1;4). Зі спектра ребра відновлюємо вагу a_4. Також маємо такі коефіцієнти з підспектрів: $a_1^2 + a_2^2$,$a_2^2 + a_3^2$, яких недостатньо для відновлення ваг.

9. Оберемо такі $2A_3$: $C_4 - \{4\}$,$C_4 - \{2\}$ і A_2: ребро$(1;2)$. Зі спектра ребра відновлюємо вагу a_1. Також відновлюємо a_2 зі спектра $\mathbf{C_4} - \{4\}(10)$. Знаємо також коефіцієнт $a_3^2 + a_4^2$, проте його недостатньо для відновлення ваг a_3 та a_4.

10. Оберемо A_3: $C_4 - \{4\}$ та ребра $(3;4), (4;1)$. З ребер відновлюємо ваги a_3,a_4 відповідно. Зі спектра $\mathbf{C_4} - \{4\}(10)$ знаємо коефіцієнт $a_1^2 + a_2^2$, проте його недостатньо для відновлення ваг a_1 та a_2.

Відновлення ваг $\mathbf{C_n}$

Для зваженого графа $\mathbf{C_n} = (C_n, w)$, який є циклом, розглянемо поставлену задачу.

Пронумеруємо його вершини від 1 до n, тобто $V(C_n) = \{1, 2, ..., n\}$, вершина k суміжна з вершинами $k-1$ і $k+1$: $\forall k \in \{2, ..., n-1\}$ і вершина n також суміжна з вершиною 1. Вагу ребра, що з'єднує i та $i+1$ вершини $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, позначимо a_i і вагу ребра $(n, 1)$: a_n.

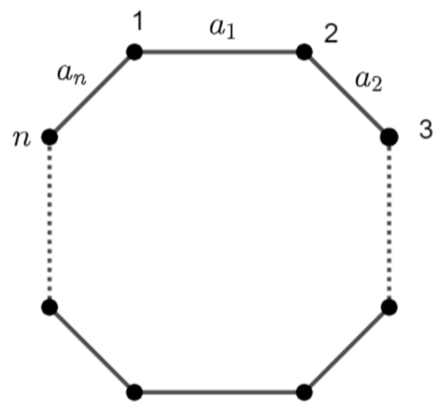

Рис. 8: $\mathbf{C_n}$

Твердження 2.
Для відновлення C_n, $n \geq 5$ достатньо таких трьох підспектрів: $\sigma(\mathbf{C_n} - \{2\})$, $\sigma(\mathbf{C_n} - \{2, 3\})$, $\sigma(\mathbf{C_n} - \{5, ..., n\})$.

3.4 Задача відновлення ваг для графа метелика

Для зваженого графа метелика $\mathbf{G}$, зображеного на рисунку 9, розглянемо поставлену задачу.

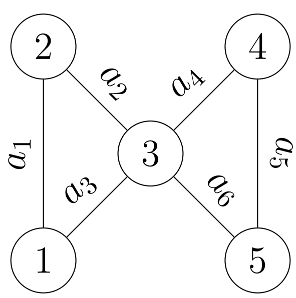

Рис. 9: $\mathbf{G}$ - граф метелик

Твердження 3.

Зважений граф метелик можна відновити за такими чотирма підспектрами:$\sigma((4,5))$, $\sigma((2,3))$, $\sigma(\mathbf{G} - \{5\})$, $\sigma(\mathbf{G})$.

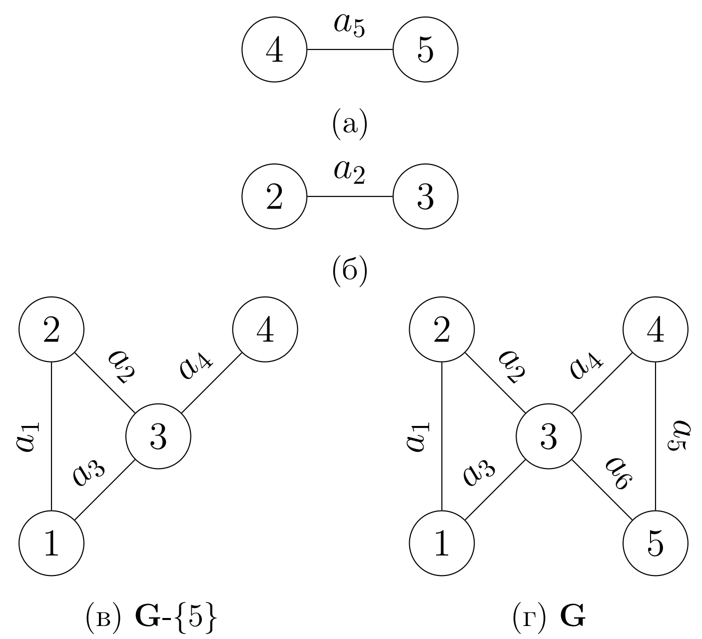

Рис. 10: Індуковані підграфи графа **G**

Доведення.

Запишемо характеристичні многочлени для графів **G** і $\mathbf{G} - \{5\}$.

$$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^5 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^3 - 2\lambda^2(a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6) + \\ + (a_1^2a_4^2 + a_1^2a_5^2 + a_2^2a_5^2 + a_3^2a_5^2 + a_1^2a_6^2)\lambda + 2(a_1a_2a_3a_5^2 + a_4a_5a_6a_1^2)$$

$P_{\mathbf{G}-\{5\}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - 2a_1a_2a_3\lambda + a_1^2a_4^2$

Спектр ребра (4;5) відновлює a_5. Оскільки нам відомо чому дорівнює коефіцієнт $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$ зі спектра $\mathbf{G} - \{5\}$ і a_5, то з коефіцієнта характеристичного многочлена вихідного графа $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$ однозначно відновлюємо a_6.

Зі спектра $\mathbf{G} - \{5\}$ відомо чому дорівнює $a_1a_2a_3$. З коефіцієнта $(a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6)$ спектра **G** можемо знайти значення $a_4a_5a_6$. Оскільки нам відомо a_5, $a_1a_2a_3$ і $a_4a_5a_6$, з $(a_1a_2a_3a_5^2 + a_4a_5a_6a_1^2)$ однозначно відновлюємо a_1.

Оскільки нам відомо a_1 з коефіцієнта $a_1^2a_4^2$ однозначно відновлюємо a_4. Для відновлення ваг a_2, a_3, треба знати спектр ребра (2;3) або (1;3).Тобто такий набір підспектрів однозначно відновлює ваги вихідного графа метелика.

3.5 Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для уніциклічного графа

Для зваженого уніциклічного графа, розглянемо поставлену задачу. Для цього введемо теорему, на якій буде будуватися розв'язок.

Теорема 4. [14]
Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y. Граф G — об'єднання графів F, H та ребра, що з'єднує вершини z та y. Тоді за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$ — множина висячих вершин, можна відновити ваги на ребрах графа $\mathbf{H}$, вагу на ребрі (z, y), а також $P_{\mathbf{F}}$,$P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.

Знайдемо верхню оцінку спектрального відновлюючого числа для уніциклічного графа. Розглянемо перший випадок, $F = C_n$, і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рисунку 11.

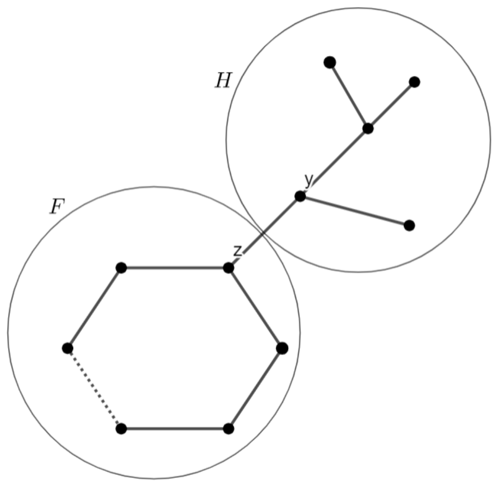

Рис. 11

За теоремою 4, ми відновлюємо ваги на ребрах графа H, вагу на ребрі (z, y), а також $P_{\mathbf{F}}$,$P_{\mathbf{F}-\{z\}}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$. Нам також необхідно відновити ваги не ребрах циклу. Оскільки ми знаємо характеристичний многочлен ланцюга $P_{\mathbf{F}-\{z\}}$, то знаючи характеристичний многочлен $P_{\mathbf{F}-\{z,u\}}$, де u — суміжна вершина з z, ми відновлюємо ваги усіх ребер, окрім тих, які є інцидентні з вершиною z. Отже, нам ще треба знати вагу одного з ребра, яке інцидентне з вершиною z

і ми зможемо відновити усі ваги графа $\mathbf{G}$. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$(див. рисунок 11) $Srn(G) \leq cv(G) + 3$, де $cv(G)$ — кількість висячих вершин.

Розглянемо другий випадок, коли ми маємо декілька дерев H_k, що приєднані через ребро-міст і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рисунку 12.

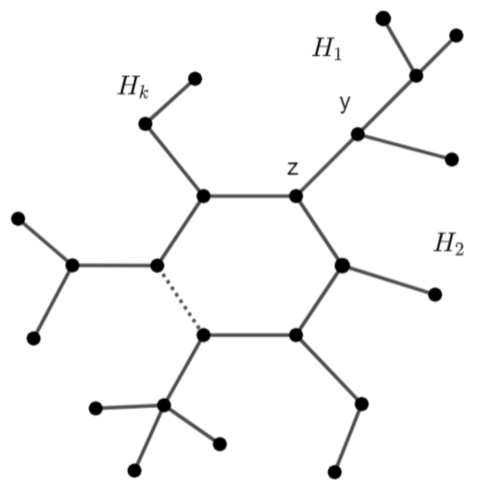

Рис. 12

Застосуємо теорему k разів, тобто для кожного $F = G - H_i$ і дерева H_i, $i \in 1, ..., k$. Ми відновлюємо ваги на ребрах графів $\mathbf{H_1}, ..., \mathbf{H_k}$, $k \in 1, ..., n$, де n — кількість вершин у циклі, ваги на ребрах (z_i, y_i), а також $P_{\mathbf{F}}$,$P_{\mathbf{F}-\{z_i\}}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H) = CV(H_1) \cup ... \cup CV(H_k)$. Нам також необхідно відновити ваги не ребрах циклу, які ми точно можемо відновити знаючи ще 2 підспектри, що розписано у попередньому пункті. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$(див. рисунок 12) $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

Розглянемо також третій випадок коли $F = C_n$, ми маємо декілька дерев H_k і граф $\mathbf{G}$ — уніциклічний, зображений на рисунку 13.

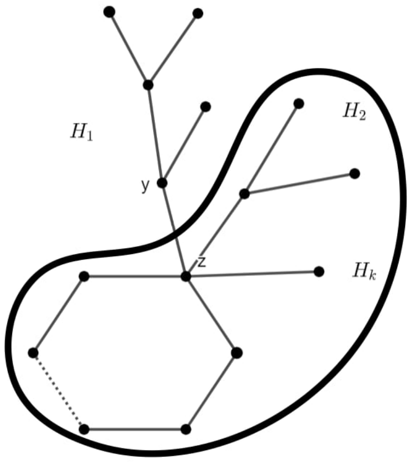

Рис. 13

Як і у попередньому випадку для кожного $F = G - H_i$ і дерева H_i, $i \in 1, ..., k$, застосуємо теорему 4 і відновимо ваги на ребрах графів $\mathbf{H_1}, ..., \mathbf{H_k}$, $k \in \mathbf{N}$, ваги на ребрах (z, y_i), а також $P_{\mathbf{F}}$,$P_{\mathbf{F}-\{z\}}$ за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H) = CV(H_1) \cup ... \cup CV(H_k)$. Нам також необхідно відновити ваги не ребрах циклу, які ми точно можемо відновити за двома підспектрами, що розписано у першому пункті. Тобто для такого графа $\mathbf{G}$(див. рисунок 13) $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

Отже, для довільного уніциклічного графа $\mathbf{G}$: $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

3.6 Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для графа кактуса-ланцюжка

Для довільного зваженого графа кактуса-ланцюжка $\mathbf{G}$, зображеного на рисунку 14, розглянемо поставлену задачу.

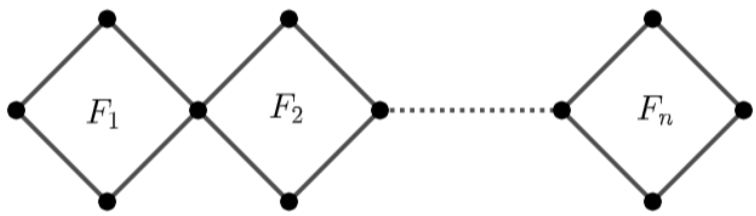

Рис. 14: $\mathbf{G}$ — граф кактус-ланцюг

Нехай елементами ланцюга є графи $F_1, ..., F_n$ і для будь-якого $i \in 1...n$:

F_i — цикл C_m, де $m \geq 4$, $\forall j \in 1...n-1$ пронумеруємо вершини, що належать множині вершин F_j і множині вершин F_{j+1}, тобто $V(F_j) \cap V(F_{j+1}) = j$. Також вершини, у яких степінь дорівнює чотирьом, не є суміжними.

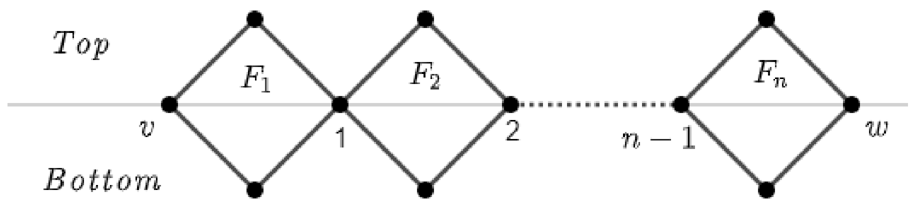

Рис. 15

Розташуємо вершини $1, ..., n$ і вершини v, w горизонтально у лінію, де $v \in V(F_1)$ і відстань від v до вершини 1 дорівнює двом, $w \in V(F_n)$ і відстань від w до вершини n дорівнює двом. Розіб'ємо $F_1, ..., F_n$ на верх і низ(див. рисунок 15). Будемо мати такі дві множини $VT(G)$ і $VB(G)$, де $VT(G)$ — множина вершин, що знаходять у верхній області, тобто зверху лінії, і $VB(G)$ — множина вершин, що знаходять у нижній області, тобто знизу лінії.

Видалимо з графа **G** вершини з множини $VT(G)$ і отримаємо підграф — звичайний ланцюг A_B, що знаходиться у нижній області, та видалимо з графа **G** вершини з множини $VB(G)$ і отримаємо підграф — звичайний ланцюг A_T, що знаходиться у верхній області.

Тоді за твердженням 1, ми можемо відновити ваги ребер підграфів $\mathbf{A_B}$ і $\mathbf{A_T}$, знаючи також підспектри: $\sigma(\mathbf{A_B} - v)$ і $\sigma(\mathbf{A_T} - v)$, де v — висяча вершина ланцюга A_B і A_T.

Отже, такий граф кактус-ланцюжок(див. рисунок 14), можна відновити за чотирма підспектрами:$\sigma(\mathbf{A_B})$, $\sigma(\mathbf{A_B} - v)$, $\sigma(\mathbf{A_T})$, $\sigma(\mathbf{A_T} - v)$, і $Srn(G) \leq 4$.

3.7 Приклад конкретної задачі відновлення ваг і алгоритм її розв'язання

Наведемо приклад конкретної задачі відновлення ваг.

Приклад задачі відновлення ваг.

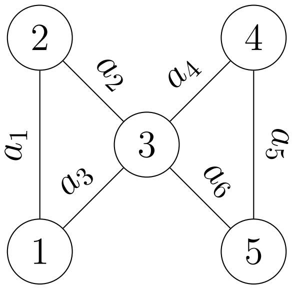

Рис. 16: **G** - граф метелик

Умова: Нехай нам відомий граф G зображений на рисунку 16. Необхідно відновити усі ваги за спектром вихідного графа, і спектром його підграфів: ребер (4,5) і (2,3), $\mathbf{G} - \{5\}$.

$\sigma(\mathbf{G}) = \{-6.91, -4.406, -0.962, 1.75, 10.528\}$

$\sigma((4,5)) = \{-5, 5\}$

$\sigma((2,3)) = \{-2, 2\}$

$\sigma(\mathbf{G} - \{5\}) = \{-5.206, -0.977, 0.559, 5.624\}$

Розв'язання

1. Відновимо характеристичні многочлени з відомих за умовою спектрів.

$P_{\mathbf{G}}(\lambda) = (\lambda + 6.91)(\lambda + 4.406)(\lambda + 0.962)(\lambda - 1.75)(\lambda - 10.528) = \lambda^5 - 91\lambda^3 - 252\lambda^2 + 402\lambda + 540$

$P_{(4,5)}(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda - 5) = \lambda^2 - 25$

$P_{(2,3)}(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 4$

$P_{\mathbf{G}-\{\mathbf{5}\}}(\lambda) = (\lambda+5.206)(\lambda+0.977)(\lambda-0.559)(\lambda-5.624) = \lambda^4 - 30\lambda^2 - 12\lambda + 16$

2. Випишемо характеристичні многочлени у загальному вигляді, де коефіцієнти невідомі.

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{G}}(\lambda) = \lambda^5 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\lambda^3 - 2\lambda^2(a_1a_2a_3 + a_4a_5a_6) + \\ + (a_1^2a_4^2 + a_1^2a_5^2 + a_2^2a_5^2 + a_3^2a_5^2 + a_1^2a_6^2)\lambda + 2(a_1a_2a_3a_5^2 + a_4a_5a_6a_1^2) \end{aligned}$$

$P_{\mathbf{G}-\{\mathbf{5}\}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) - 2a_1a_2a_3\lambda + a_1^2a_4^2$

$P_{(4,5)}(\lambda) = \lambda^2 - a_5^2$

$P_{(2,3)}(\lambda) = \lambda^2 - a_2^2$

3. Прирівняємо коефіцієнти з характеристичних многочленів і утворимо

систему рівнянь.

$$\begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=91 \\ 2(a_1a_2a_3+a_4a_5a_6)=252 \\ a_1^2a_4^2+a_1^2a_5^2+a_2^2a_5^2+a_3^2a_5^2+a_1^2a_6^2=402 \\ 2(a_1a_2a_3a_5^2+a_4a_5a_6a_1^2)=540 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=30 \\ 2a_1a_2a_3=12 \\ a_1^2a_4^2=16 \\ a_5^2=25 \\ a_2^2=4 \end{cases}$$

Видно, що з системи одразу можна відновити ваги a_2, a_5, отримаємо, що $a_2=2$, $a_5=5$. Підставимо їх значення в інші рівняння.

$$\begin{cases} a_1^2+a_3^2+a_4^2+a_6^2=62 \\ 2a_1a_3+5a_4a_6=126 \\ 25a_1^2+25a_3^2+a_1^2a_6^2=286 \\ 50a_1a_3+5a_4a_6a_1^2=270 \\ a_1^2+a_3^2+a_4^2=26 \\ a_1a_3=3 \\ a_1^2a_4^2=16 \\ a_2=2 \\ a_5=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1a_3+30a_4=126 \\ 61a_1^2+25a_3^2=286 \\ 50a_1a_3+30a_4a_1^2=270 \\ a_1^2+a_3^2+a_4^2=26 \\ a_1a_3=3 \\ a_1^2a_4^2=16 \\ a_2=2 \\ a_5=5 \\ a_6=6 \end{cases}$$

Підставили значення п'ятого рівняння у перше і отримаємо, що $a_6=6$, підставили його у інші рівняння.

$$\begin{cases} 30a_4 = 120 \\ 61a_1^2 + 25a_3^2 = 286 \\ 50a_1a_3 + 30a_4a_1^2 = 270 \\ a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 = 26 \\ a_3 = \frac{3}{a_1} \\ a_1^2a_4^2 = 16 \\ a_2 = 2 \\ a_5 = 5 \\ a_6 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \\ a_4 = 4 \\ a_5 = 5 \\ a_6 = 6 \end{cases}$$

Значення a_1a_3 з п'ятого рівняння підставляємо у перше рівняння і знаходимо значення a_4. З шостого рівняння знаходимо a_1, підставляємо у п'яте і знаходимо a_3. Отже, ми відновили усі ваги і розв'язали задачу.

Запишемо алгоритм для розв'язку задач такого типу.

Нехай нам дано деякий зважений граф і спектри його підграфів за якими треба відновити ваги усіх ребер.

1. Відновлюємо характеристичний многочлен за спектром.
2. Записуємо характеристичні многочлени для кожного підспектра.
3. Прирівнюємо коефіцієнти з характеристичних многочленів і записуємо систему з рівнянь.
4. Розв'язуємо систему рівнянь і знаходимо вагу для кожного ребра.

4 Загальні обернені спектральні задачі на зважених графах

Також розглянемо загальні обернені спектральні задачі.

4.1 Загальне відновлююче спектральне число $srn(G)$

Введемо деякі означення.

Означення 14.

Загальне відновлююче спектральне число $srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів підграфів, що були утворені видаленням ребер, за якими однозначно відновлюються ваги ребер вихідного графа. Будемо позначати з малої літери.

Отже, для наступних графів розглянемо задачу, що буде мати такі дві підзадачі: навести приклад такого набору підспектрів, за яким можна відновити усі ваги, та знайти $srn(G)$. Таку задачу будемо називати загальною.

4.2 Загальна задача відновлення ваг для графів, що містять $2k$ непарних вершин

Для довільного зваженого графа $\mathbf{G}$, що містить $2k$ непарних вершин, розглянемо поставлену задачу. Для цього наведемо таку теорему.

Теорема 5.[8]

Множину ребер $E(G)$ довільного зв'язного графа G, який містить $2k$ непарних вершин, можна покрити k ланцюгами.

Твердження 4.

Для довільного зваженого графа $\mathbf{G}$, що має $2k$ непарних вершин, $srn(G) \leq 2k$.

Доведення.

За теоремою такий граф G можна покрити k ланцюгами. Оскільки довільний ланцюг можна відновити за двома підспектрами, то для k ланцюгів треба $2k$ підспектрів. Отже, $srn(G) \leq 2k$.

4.3 Загальна задача відновлення ваг для циклу

Для зваженого графа-цикла $\mathbf{C_n}$, розглянемо поставлену задачу.

Спершу розглянемо випадок для циклу на чотирьох вершинах.

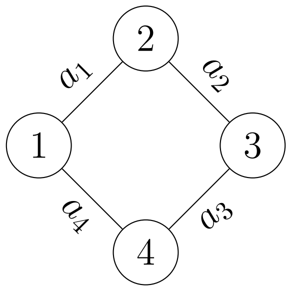

Рис. 17: $\mathbf{C_4}$

Граф C_4(див. рисунок 17) можна відновити за такими трьома підспектрами: $\sigma(\mathbf{C_4} - (1;4))$, $\sigma(\mathbf{C_4} - (1;4),\ (3;4))$, $\sigma((1;4))$. Оскільки, якщо видалити ребро (1;4) ми отримаємо ланцюг, який можна відновити за двома підспектрами $\sigma(\mathbf{C_4} - (1;4))$ і $\sigma(\mathbf{C_4} - \{(1;4),\ (3;4)\})$. І ще необхідно відновити вагу a_4 на ребрі (1;4) за підспектром $\sigma((1;4))$. Отже, $srn(C_4) \leq 3$.

Оскільки раніше було доведено, що $Srn(C_3) = 3$ і $Srn(C_n) \leq 3,\ n \geq 5$, то $srn(C_m) \leq 3$, де $m \geq 3$.

4.4 Верхня оцінка загального відновлюючого спектрального числа для графа кактуса

Для довільного зваженого графа кактуса $\mathbf{G}$, зображеного на рисунку 18, і $G \neq C_n$ розглянемо поставлену задачу.

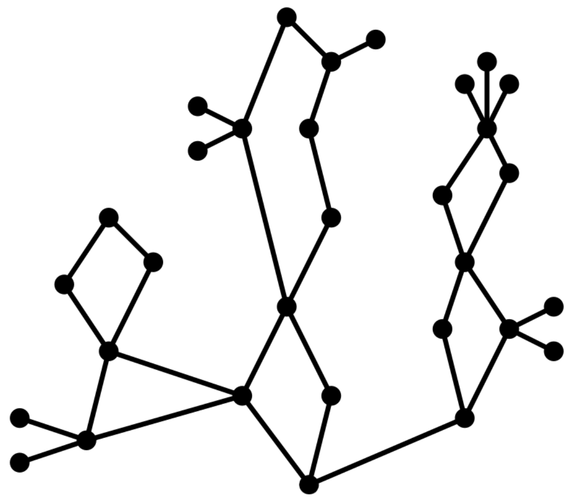

Рис. 18: **G** — граф кактус

Нехай c — це кількість циклів у графі кактусі. Видалимо c ребер, тобто одне ребро з кожного циклу, що інцидентній вершині, у якої степінь більше або дорівнює трьом. Отримаємо дерево H і застосуємо теорему 4. Тобто за $cv(H)$ підспектрами, де cv — кількість висячих вершин, можна відновити ваги на дереві H. І $cv(H)$ дорівнює $cv(G)+c$, оскільки з видаленням ребра з одного циклу кількість висячих вершин збільшується на 1, а ми видаляємо ребро c разів. Ще треба c підспектрів, щоб відновити c ребер, які ми видалили.

Отже, $srn(G) \leq cv(G) + 2c$.

Висновки

Кваліфікаційна робота присвячена дослідженню обернених спектральних задач на зважених графах.

У другому розділі розглядалися основі означення з теорії графів(підрозділ 2.1) та зі спектральної теорії зважених графів(підрозділ 2.2), теореми для знаходження визначника та характеристичного многочлена(підрозділ 2.3).

У третьому розділі була наведена постановка задачі, означення відновлюючого спектрального числа та додаткового відновлюючого спектрального числа, теореми та твердження, які використовувались для досліджень. Також були отримані такі результати:

- знайдено відновлююче спектральне число для C_3.
- знайдено відновлююче спектральне число для C_4.
- досліджена обернена спектральна задача для графа метелика.
- знайдена оцінка для відновлюючого спектрального числа для уніциклічного графа.
- знайдена оцінка для відновлюючого спектрального числа для графа кактуса-ланцюга.
- досліджена додаткова обернена задача для графів, що містять $2k$ непарних вершин.
- досліджена додаткова обернена задача для графів-циклів.
- знайдена верхня оцінка додаткового відновлюючого спектрального числа для графів кактусів.

Список літератури

1. *Cvetkovic D., Doob M., Sachs H.,* Spectra of Graphs, 1980.

2. *Cvetkovic D., Doob M., Gutman I., Torgasev A.,* Recent Results in the Theory of Graph Spectra, in: Annals of Discrete Mathematics, vol.36, North Holland, Amsterdam, 1988.

3. *Cvetkovic D., Rowlinson M., Simic S.,* Eigenspaces of graphs, Cambridge University Press, 1997.

4. *Cvetkovic D. M.* Applications of graph spectra, in: Zbornik radova, 2009, 13(21), 138pp.

5. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.,*Спектры графов, теория и применение Киев, "Наукова думка", 1984.

6. *Chung F.R.K.,* Spectral Graph Theory, AMS, Providence, RI, 1994

7. *Gladwell G.M.L.,* Inverse Problems in Vibration, in: Kluwer Academic Publishers,New York, 2005,457pp.

8. *Харари Ф.,* Теория графов, "Мир", Москва, 1973.

9. *Оре О.,* Теория графов, "Наука", Москва, 1980.

10. *Bondy J.A., Murty U.S.R.,* Graph Theory with Applications graphs , American Elsevier Publishing Company, Inc., New York, 1976

11. *Harary F.,* The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev., 4 (1962), 202-210

12. *H. Sachs,* Beziehungen zwischen den in einem graphen enthaltenen kreisen und seinem charakteristischen polynom, Publ. Math. Debrecen, 11 (1964), 119–134.

13. *Schwenk A. J.*, Computing the characteristic polynomial of a graph, Graphs and Combinatorics, volume 406 of Lecture Notes in Mathematics, pages 153-172. AMS, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.

14. *Тимошкевич Лариса Миколаївна,* Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і зліченних графів Кокстера.- Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. - Київ, 2015.- 160 с.