ПРО T-ГРУПОЇДИ НА СКІНЧЕННИХ ДЕРЕВАХ

К.О. АНТОШИНА, С.О. КОЗЕРЕНКО, К.І. ПЕРВУШИН

В цій роботі всі графи прості, неорієнтовані, скінченні та зв'язні. Граф називається геодетичним, якщо між кожною парою його вершин існує єдиний найкоротший ланцюг. Наприклад, повні графи, непарні цикли та дерева є геодетичними графами.

На множині вершин $V(G)$ геодетичного графа G коректно визначена бінарна операція $+$: для $u, v \in V(G)$ покладемо $u + u = u$ та для $u \neq v$, $u + v$ є першою вершиною, відмінною від u, що лежить на (єдиному) найкоротшому ланцюгу між u та v. Пара $(V(G), +)$ називається T-групоїдом (англ. travel groupoid [1]), породженим геодетичним графом G. Наприклад, якщо $uv \in E(G)$, то $u + v = v$, а $v + u = u$. Якщо $d_G(u, v) = 2$, то $u + v = v + u$ – єдина вершина, яка суміжна з обома вершинами u, v у G.

Ми розглядатимемо властивості T-групоїдів лише на деревах. Отже, нехай T – скінченне дерево. Із означення одразу випливає, що операція $+$ є ідемпотентною на $V(T)$. Також, $+$ комутативна лише у випадку, коли $T \simeq K_{1,n-1}$ – зірка. Дійсно, неважко побачити, що $a + b = b + a$ тоді й тільки тоді, коли $a = b$ або $d_T(a, b) = 2$.

Твердження 1. *Кількість (невпорядкованих) комутуючих пар вершин відносно $+$ на дереві T дорівнює $1 + \frac{1}{2}M_1(T)$, де $M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G^2(u)$ – це перший загребський індекс графа G.*

Питання опису асоціативних трійок для операції $+$ є дещо цікавішим.

Теорема 1. *Нехай T – дерево. Впорядкована трійка $(a, b, c) \in V(T)^3$ є асоціативною для $+$ тоді й тільки тоді, коли $a = b$, або $a + b = c$, або $b + c = a$.*

Із теореми 1 одразу можна обчислити кількість таких трійок, яка як виявляється, не залежить від структури самого дерева.

Наслідок 1. *Кількість асоціативних трійок відносно $+$ на n-вершинному дереві дорівнює $3n^2 - 2n$.*

Зауважимо, що опис асоціативних трійок лише через операцію $+$ (а не структуру дерева) є невипадковим, адже в роботі [1] була отримана абстрактна характеризація T-групоїдів за допомогою трьох властивостей.

Нехай тепер $(X, \circ)$ – деякий групоїд. Його підгрупоїдом називається підмножина $A \subset X$, замкнена відносно операції $\circ$.

Твердження 2. *Нехай T – дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є підгрупоїдом відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A – зв'язна множина.*

Як і підгрупи в групі, підгрупоїди в групоїді утворюють решітку відносно включення. Для T-групоїдів ця решітка вивчалась раніше в роботі [2].

Множину $A \subset X$ в групоїді $(X, \circ)$ назвемо твірною, якщо найменшим підгрупоїдом у X, який містить A, є весь X.

Твердження 3. *Нехай T – дерево. Тоді $A \subset V(T)$ є твірною відносно $+$ тоді й тільки тоді, коли A містить всі висячі вершини T.*

Таким чином, T-групоїд $(V(T), +)$ має єдину найменшу твірною множину, якою є множина всіх висячих вершин дерева T.

Гомоморфізмом між двома групоїдами $(X, \circ)$ та $(Y, *)$ називається відображення $f : X \to Y$ таке, що $f(a \circ b) = f(a) * f(b)$ для всіх $a, b \in X$. Відображення $f : V(G) \to V(H)$ між графами G, H називається гомоморфізмом, якщо для всіх ребер $uv \in E(G)$ виконано $f(u)f(v) \in E(H)$.

Теорема 2. *Відображення $f : V(T_1) \to V(T_2)$ між двома деревами T_1, T_2 є гомоморфізмом між їхніми T-групоїдами тоді й тільки тоді, коли f – постійне або є ін'єктивним гомоморфізмом дерев.*

Література

[1] L. Nebesky, *A tree as a finite nonempty set with a binary operation* // Math. Bohem. **125** (2000), 455–458.

[2] B. Zelinka, *The lattice of all subtrees of a tree* // Math. Slovaca **27** (1977), 277–286.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: kantoshyna@imath.kiev.ua

Національний університет "Києво-Могилянська академія"
Інститут математики НАН України
Київська школа економіки, Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

Національний університет "Києво-Могилянська академія", Київ, Україна
Email address: kyrylo.pervushyn@ukma.edu.ua