УДК 621.3:519.673

Олецький О. В.

АДАПТИВНА РЕГУЛЯРИЗАЩЯ РОЗВ'ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ НА ОСНОВІ РОЗКЛАДУ КАРУНЕНА-ЛОЕВА

Розвивається підхід до розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма першого роду на основі розкладу за власними функціями. Пропонується адаптивна процедура усікнення ряду на основі аналізу похибок, що виникають у ході розв'язання задачі, а також підхід на основі розкладів підінтегральної функції та правої частини у власних просторах Карунена-Лоева.

Розглядається інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$Ay \equiv \int_a^b K(t,s)y(s)ds = u(t). \qquad (1)$$

Даний інтегральний оператор у найбільш типовому випадку вважається компактним; достатньою умовою його компактності є обмеженість ядра $K(t, s)$ на квадраті $\{t, s\colon a \le t \le b,\ a \le s \le b\}$. Тоді обернений оператор не є обмеженим, і задача є некоректною.

До рівнянь типу (1) можуть бути зведені різні науково-технічні задачі. Типовою є, зокрема, задача редукції до ідеального приладу, яка розглядається як частковий випадок загальної проблеми інтерпретації експериментальних залежностей. Задача полягає у відновленні за величиною $u(t)$, що спостерігається на виході неідеальної вимірювальної апаратури, істинної величини $y(t)$, яка нас цікавить. Відомо багато методів і алгоритмів розв'язання цієї задачі, а також відповідних програмних засобів [1—7]. Кожний алгоритм пов'язаний з тією чи іншою регуляризацією, яка залежить від параметрів методу.

Некоректність задачі (1) вимагає ретельного підбору параметрів регуляризації. Так, апроксимація рівняння (1) на основі дискретизації і використання квадратурних формул фактично являє собою перехід до скінченно-вимірного простору, в якому дискретний аналог рівняння (1) може являти собою цілком коректну задачу. Тоді, з одного боку, надмірне зменшення кількості дискрет призводить до втрати точності. З другого боку, збільшення кількості дискрет наближає задачу до нескінченно-вимірної, у зв'язку з чим похибка розв'язку не зменшується, як можна було б сподіватися, а навпаки — різко зростає. Аналогічні проблеми виникають і при заміні рівняння (1) близьким йому рівнянням другого роду, і в інших методах.

Одним з найбільш перспективних методів, які можна застосовувати до розв'язання рівняння (1), видається метод власних функцій, теоретичні основи якого описані в [3, 8]. Цей метод по своїй суті являє собою застосування розкладу Карунена-Лоева [9].

Можна вважати, що оператор A є симетричним і невід'ємно визначеним. Якщо це не так, ми можемо перейти від рівняння (1) до симетризованого рівняння

$$A^*Ay = A^*u. \qquad (2)$$

Аналіз, наведений в [10], показує, що розв'язок рівняння (1) можна шукати наступним чином. Ядро інтегрального оператора розкладається в ряд

$$K(t,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k\varphi_k(t)\varphi_k(s), \qquad (3)$$

де $\{\varphi_k(t)\}$ — власні функції оператора, що відповідають власним значенням σ_k, упорядкованим за спаданням. Тоді розклад правої частини, що спостерігається, за цими ж власними функціями має вигляд

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k\varphi_k(t). \qquad (4)$$

Тоді розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді ряду

$$y(t) = F(t) + G(t), \qquad (5)$$

де

$$F(t)=\sum_{k=1}^{r_0}\frac{\rho_k-w(\varepsilon_k)}{\sigma_k+\alpha_k}\varphi_k(t), \qquad (6)$$

$$G(t)=\sum_{k=r_0+1}^{\infty}\gamma_k\varphi_k(t). \qquad (7)$$

Тут $w(\varepsilon_k)$ — фільтр, який залежить від випадкової похибки ε_k, α_k — параметри регуляризації, які повинні зростати зі зростанням σ_k та ε_k, r_0 — номер члена ряду, який вибирається з умови $\sigma_k = 0$ при $k > r_0$.

Що ж стосується компоненти $G(t)$, то вона пов'язана з принципово іншим типом некоректності — неєдиністю розв'язку. Коефіцієнти γ_k можна брати будь-якими з урахуванням того, що ряд (5—7) повинен збігатися, і єдиний задовільний спосіб визначити їх — максимальне врахування апріорної інформації про характер підінтегральної функції.

Питання про вибір параметрів α_k сьогодні досліджено недостатньо. Очевидно, при $\sigma_k > 1$ інтегральний оператор не посилює похибки відповідних компонент, а навпаки — послаблює, і тому за вказаних умов можна прийняти $\alpha_k = 0$.

Крім того, при практичному застосуванні формули (6) необхідно стежити за накопиченням похибок. Можна запропонувати таке правило: ряд (6) потрібно усікти при деякому номері R, при якому оцінка похибок, що виникають внаслідок шумів та α-регуляризації починає перевищувати оцінку похибок, пов'язаних з усіканням ряду. Тоді процедура регуляризації набуває адаптивних рис і може автоматично пристосовуватися до особливостей конкретних підінтегральних функцій.

Деякі практичні методики отримання інтегральних розкладів Карунена-Лоева (базова квадратурна схема, що включає до свого складу два алгоритми: прямий квадратурний та двоїстий квадратурний) були запропоновані в [11—13].

Зокрема, можна запропонувати підходи, які на основі цих алгоритмів дозволяють додатково враховувати апріорну інформацію про характер розв'язку.

Нехай у нас є дві базові вибірки: набір відомих підінтегральних функцій Y та набір відомих правих частин U. Така ситуація є досить типовою, оскільки ядро інтегрального оператора, що входить до рівняння (1), врешті-решт оцінюється на основі наявних експериментальних даних. Тоді на основі алгоритмів, описаних в [11—13], можна побудувати власні модельні простори Карунена-Лоева, тобто отримати відповідні набори ортонормованих функцій, що породжують U та Y, а також оцінити дисперсії спектральних коефіцієнтів.

Нехай y_Y та u_U — вектори спектральних коефіцієнтів підінтегральної функції y та правої частини u відповідно у власних модельних просторах Карунена-Лоева. Нехай, далі, M_{YL} — оператор переходу від модельного простору, породженому набором Y до простору L, координатними осями якого є власні функції $\{\varphi_k(t)\}$ інтегрального оператора A; $\Lambda = \mathrm{diag}(\sigma_k)$, M_{LU} — оператор переходу від L до модельного простору, породженому набором U. Тоді від рівняння (1) можна перейти до рівняння

$$M_{LU}\,\Lambda M_{YL}\,y = u. \tag{8}$$

Такий перехід дозволяє зменшити розмірність задачі, а також максимально повно враховувати апріорну інформацію за рахунок того, що дисперсії спектральних коефіцієнтів правої частини та підінтегральної функції є відомими. Крім того, запис рівняння (1) у формі (8), очевидно, істотно полегшує розв'язання задачі ідентифікації, тобто відновлення ядра інтегрального оператора на основі відомих вхідних і вихідних даних.

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1986,— 288 с.
2. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.— М.: Наука, 1987.— 240 с.
3. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.— К.: Наукова думка, 1986.— 544 с.
4. *Верлань А. Ф., Абдусатаров Б. Б., Игнатченко А. А., Максимович Н. А.* Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов.— К.: Наукова думка, 1993.— 208 с.
5. *ПытьевЮ. П.* Математические методы интерпретации эксперимента.— М.: Высшая школа, 1989.— 351 с.
6. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие.— К.: Наукова думка, 1986.— 584 с.
7. *Верлань А. Ф„ Контрерас Д. Э., Сизиков В.* С, *Тихончук С. Т., ФедорчукВ. А.* Integral Equations Toolbook — пакет программ для решения интегральных уравнений в среде MATLAB— К.: ИПМЭ НАНУ 1997 — 44 с.
8. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л.* С, *Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 448 с.
9. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М.: Наука, 1979.— 368 с.
10. *Олецький О. В.* Про застосування інтегрального розкладу Карунена-Лоева для вирішення інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду // Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці.— К., 2000.— С 35—40.
11. *Олецкий А. В.* Параметризация непрерывных диагностических сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. тех. наук.— Киев, 1991.— 17 с.
12. *Верлань А. Ф., Игнатченко А. А., Олецкий А. В.* Построение математических моделей непрерывных сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва // Электронное моделирование.— 1992.— № 2.— С. 3—7.
13. *Олецкий А. В.* О применении интегрального разложения Карунена—Лоэва при моделировании динамических систем // УСиМ.— 1999.— № *1*.— *С.* 12—15.

Oletskyy O. V.

THE ADAPTIVE REGULARIZATION OF SOLVING INTEGRAL FREDGHOLM EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE BASE OF THE KARHUNEN-LOEVE EXPANSION

The approach to solving integral Fredgholm equations of the first kind on ihe base of expansion by eigenfunctions is being developed. The adaptive procedure of truncating series by means of analyzing errors, and the approach on the base of expanding the right part of equation and the unknown function in their own Karhunen-Loeve spaces are proposed.